Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. В. Лобода, О непрерывности приведения гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^2$ к нормальной форме, *Функц. анализ и его прил.*, 1993, том 27, выпуск 4, 81–84

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.87
18 февраля 2025 г., 10:28:10

где $\omega > \mu$ и константа M не зависит от ω, μ. Она позволяет оценить приближенное решение на высоких частотах, если $\overline{f}^*$ непрерывно на этих частотах. Параметр μ, входящий в приближенное решение, определяет его свойства на низких и высоких частотах.

В случае когда (1), (2) является параболической граничной задачей, близость точного и приближенного решений может быть оценена в более сильной метрике, чем метрика пространства L_2, на основе априорных оценок решения при достаточной гладкости правых частей задачи [4].

Эволюционная задача (1), (2) может рассматриваться как естественное обобщение параболических граничных задач без начального условия. Легко видеть, что решение этой задачи может быть определено как предел решений задач с нулевым начальным условием при $t = t_0$, если $t_0 \to -\infty$. Такое определение решения задачи Дирихле для параболического уравнения было использовано в [5], где получена оценка, аналогичная (9). Там же показано, что константа β, ограничивающая показатель экспоненты в этой оценке, является точной, т.е. не может быть увеличена.

Литература

1. *Красовский Ю. П., Казаков С. И.* // Океанология. – 1992. – Т. 32, вып. 2. – С. 219–227. **2.** *Агранович М. С., Вишик М. И.* // УМН. – 1964. – Т. 19, вып. 3. – С. 53–161. **3.** *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977. **4.** *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. **5.** *Красовский Ю. П.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1991. – Т. 55, №2. – С. 439–443.

Экспериментальное отделение
Морского гидрофизического института
Академии наук Украины

Поступило в редакцию
27 апреля 1992 г.
В переработанном виде
25 марта 1993 г.

УДК 517.5

О непрерывности приведения гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^2$ к нормальной форме

© 1993. А. В. Лобода

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^2$ с координатами $z = x + iy$, $w = u + iv$ вещественно-аналитическую гиперповерхность M вида $v = F(x, u, y)$. Пусть форма Леви этой поверхности в некоторой ее точке невырожденна. Тогда после плоской нормализации [4] в новом уравнении гиперповерхности M

$$F(x, u, y) = 2y^2 + \sum_{k \geqslant 4} F_k(x, u) y^k.$$

При этом функциональные коэффициенты $F_4(x, u)$, $F_5(x, u)$ удовлетворяют некоторым дополнительным требованиям.

В заметке рассматривается приведение к плоской нормальной форме семейства поверхностей M_α, зависящего от вещественного параметра α. Обсуждаются условия, при которых нормальные уравнения и нормализующие отображения непрерывно зависят от α.

1. Будем пока считать, что все поверхности M_α содержат плоскость $\mathbb{R}^2_{(x,u)}$. Тогда для семейства M_α имеется представление вида

$$v = F_1^{(\alpha)}(x,u)y + F_2^{(\alpha)}(x,u)y^2 + F_3^{(\alpha)}(x,u)y^3 + \dots. \tag{1}$$

Определение 1. Семейство поверхностей M_α вида (1) *сходится вдоль плоского подмногообразия* $N = \mathbb{R}^2_{(x,u)} = \{y=0,\ v=0\}$ *к поверхности* M_0 такого же вида, если:

1) существует замкнутый квадрат $D \subset \mathbb{R}^2_{(x,u)}$, на котором определены все функции $F_k^{(\alpha)}(x,u)$;

2) для всех k функции $F_k^{(\alpha)}(x,u)$ равномерно с производными всех порядков сходятся при $\alpha \to 0$ к $F_k^{(0)}(x,u)$.

Нормализацию любой из поверхностей (1) можно провести поэтапно. Например, коэффициент $F_1^{(\alpha)}(x,u)$ уничтожается заменой

$$z = z^*, \qquad w = g^{(\alpha)}(z^*, w^*).$$

Здесь вещественнозначная аналитическая функция $g^{(\alpha)}(x^*, u^*)$ ищется как решение задачи Коши

$$\partial g^{(\alpha)}/\partial x^* = F_1^{(\alpha)}(x^*, g^{(\alpha)}(x^*, u^*)), \qquad g^{(\alpha)}(0, u^*) = u^*.$$

В силу теорем существования и непрерывной зависимости решения ОДУ от параметров и начальных данных аналитические функции $g^{(\alpha)}(x^*, u^*)$ определены при малых α на некотором замкнутом квадрате $G \subset \mathbb{R}^2_{(x^*,u^*)}$ и сходятся вместе с производными к $g^{(0)}(x^*, u^*)$.

Лемма 1. *Пусть семейство поверхностей M_α вида* (1) *сходится вдоль $\mathbb{R}^2_{(x,u)}$ к поверхности M_0 такого же вида. Если голоморфные преобразования координат*

$$z = f^{(\alpha)}(z^*, w^*), \qquad w = g^{(\alpha)}(z^*, w^*)$$

заданы посредством функций $f^{(\alpha)}$, $g^{(\alpha)}$, равномерно сходящихся вместе с производными на некотором вещественном замкнутом квадрате $G \subset \mathbb{R}^2_{(x^*,u^*)}$, то сходимость поверхностей M_α к M_0 вдоль $\mathbb{R}^2_{(x^*,u^*)}$ сохраняется и в новых координатах.

Для нормализации коэффициентов $F_2^{(\alpha)}(x,u)$ нужна теперь замена координат вида

$$z^* = z + f^{(\alpha)}(z,w), \qquad w^* = w. \tag{2}$$

Здесь основным требованием к вещественным функциям $f^{(\alpha)}(x,u)$ является уравнение

$$\partial f^{(\alpha)}/\partial x = \sqrt{\tfrac{1}{2}F_2^{(\alpha)}(x,u)} - 1.$$

В силу невырожденности форм Леви поверхностей семейства M_α можно считать, что $F_2^{(\alpha)}(0,0)=2$. При этом функции $f^{(\alpha)}(x,u)$ равномерно сходятся вместе с производными к $f^{(0)}(x,u)$.

Для того чтобы установить, что замена (2) сохраняет сходимость семейства M_α вдоль $\mathbb{R}^2_{(x,u)}$, нужна еще одна вспомогательная

Лемма 2. *Пусть $\varphi_\alpha(x)$ $(\alpha \in (-\varepsilon,\varepsilon))$ — семейство непрерывно дифференцируемых отображений n-мерного замкнутого куба*

$$Q=\{|x_k-x_k^*|\leqslant\beta,\ k=1,\dots,n\}\subset\mathbb{R}^n_x$$

в пространство $\mathbb{R}^n_y$. Если при $\alpha\to0$ сами отображения и их частные производные равномерно сходятся на компакте Q к отображению $\varphi_0(x)$ и его соответствующим производным, а предельное отображение имеет невырожденную матрицу Якоби в кубе Q, то

а) *существует замкнутый куб $D=\{|y_k-y_k^*|\leqslant\gamma,\ k=1,\dots,n\}$, на котором определены и непрерывно дифференцируемы обратные отображения $\psi_\alpha(y)=\varphi_\alpha^{-1}(y)$ при всех достаточно малых α;*

б) *$\psi_\alpha(y)$ и их производные сходятся равномерно на D к отображению $\psi_0(y)=\varphi_0^{-1}(y)$ и его соответствующим производным.*

В силу этой леммы отображения, обратные к (2), сходятся, что означает сходимость M_α в новых координатах.

2. Нормализовать коэффициенты $F_1^{(\alpha)}(x,u)$ и $F_2^{(\alpha)}(x,u)$ в уравнении (1) можно, опираясь на любое вполне вещественное подмногообразие N_α, предварительно выпрямив его.

Определение 2. Двумерное вещественное подмногообразие N вещественной гиперповерхности $M\subset\mathbb{C}^2$ назовем *цепным*, если в некоторых нормальных координатах N превращается в плоскость $\mathbb{R}^2_{(x,u)}=\{y=0,\ v=0\}$.

Необходимым условием того, что плоскость $N=\mathbb{R}^2_{(x,u)}$ является цепью для поверхности M вида

$$v=2y^2+F_3(x,u)\,y^3+\dots,\tag{3}$$

является, например, равенство $\partial^2F_3(x,u)/\partial x^2=0$. В этом случае окончательная нормализация уравнения (3) имеет весьма простой вид и сохраняет сходимость вдоль плоской цепи $N=\mathbb{R}^2_{(x,u)}$ для семейства поверхностей M_α.

Остается разобрать общую ситуацию.

Определение 3. Семейство поверхностей M_α будем называть *сходящимся к поверхности M_0 вдоль подмногообразий N_α* $(N_\alpha\subset M_\alpha,\ N_0\subset M_0)$, если:

1) каждое из подмногообразий N_α можно задать уравнениями

$$N_\alpha=\{y=\gamma_\alpha(x,u),\ v=\lambda_\alpha(x,u)\}$$

над общим для всех N_α замкнутым квадратом $D\subset\mathbb{R}^2_{(x,u)}$;

2) функции $\gamma_\alpha(x,u)$ и $\lambda_\alpha(x,u)$ равномерно с производными сходятся на D к $\gamma_0(x,u)$ и $\lambda_0(x,u)$ соответственно;

3) поверхности M_α задаются каждая вблизи своего подмногообразия N_α уравнениями $v=F^{(\alpha)}(x,u,y)$;

4) все функции $\{\partial^{k+l+m}F^{(\alpha)}(x,u,y)/\partial x^k\partial u^l\partial y^m\}|_{y=\gamma_\alpha(x,u)}$ равномерно сходятся к аналогичным производным функции $F^{(0)}(x,u,y)$, вычисленным в точках многообразия N_0.

В случае когда все N_α совпадают с вещественной плоскостью $\mathbb{R}^2_{(x,u)}$, определение 3 превращается в более простое определение 1.

Теорема. *Если семейство гиперповерхностей M_α сходится вдоль цепных подмногообразий $N_\alpha \subset M_\alpha$ при $\alpha \to 0$ к невырожденной гиперповерхности M_0 с выделенным цепным подмногообразием N_0, то существуют нормальные уравнения M^*_α поверхностей этого семейства, сходящиеся вдоль $\mathbb{R}^2_{(x,u)}$ к нормальному уравнению M^*_0.*

Для доказательства необходимо выпрямить каждое из M_α вдоль N_α, а затем воспользоваться поэтапной нормализацией, описанной выше.

Литература

1. *Chern S. S., Moser J. K.* // Acta Math. – 1974. – V. 133. – p. 219–271. **2.** *Витушкин А. Г.* // УМН. – 1985. – Т. 40, вып. 2. – С. 3–31. **3.** *Кружилин Н. Г.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1985. - Т. 49, №3. – С. 566–591. **4.** *Лобода А. В.* // Матем. заметки. – 1992. – Т. 52, №1. – С. 76–85.

Воронежский
инженерно-строительный институт

Поступило в редакцию
10 июля 1992 г.
В переработанном виде
14 апреля 1993 г.

УДК 517.988

Дифференцирование обратной функции в ненормированных пространствах

© 1993. С. Я. Серовайский

Устанавливается расширенная дифференцируемость обратного оператора в линейных топологических пространствах при возможном нарушении условий теоремы об обратной функции.

Задаются линейные топологические пространства X, Y, оператор $L\colon Y \to X$ и точка $y_0 \in Y$. Рассматриваются линейные пространства X_0, Y_0 и линейные топологические пространства X_*, Y_*, такие, что X и X_0 являются подпространствами пространства X_*, а Y_* — подпространством пространств Y_0 и Y. Пусть β есть некоторое семейство множеств из Y_*.

Определение. Линейный оператор $D\colon Y_0 \to X_0$ назовем $(Y_0, X_0; Y_*, X_*)$-расширенной β-производной оператора L в точке y_0, если его сужение D_* на Y_* есть непрерывный оператор $Y_* \to X_*$, удовлетворяющий равенству $L(y_0 + h) = Ly_0 + D_*h + r(h)$, и для любого $B \in \beta$ при $\sigma \to 0$ имеет место равномерная по $h \in B$ сходимость $r(\sigma h)/\sigma \to 0$ в X_*.