



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. H. Begmatov, A perturbed integral geometry problem in three-dimensional space,  
*Sibirsk. Mat. Zh.*, 2000, Volume 41, Number 1, 3–14

<https://www.mathnet.ru/eng/smj1515>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

April 23, 2025, 21:57:07



## ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ВОЗМУЩЕНИЕМ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Акбар Х. Бегматов

**Аннотация:** Изучается задача интегральной геометрии в трехмерном слое на семействе параболоидов с возмущением, которое представляет собой интеграл с заданной весовой функцией достаточно общего вида по областям, ограниченным параболоидами. В случае, когда весовая функция возмущения тождественно равна 0, в работе получено аналитическое представление для образа Фурье искомой функции по первым двум переменным. Доказана теорема единственности решения рассмотренной задачи интегральной геометрии с возмущением в классе гладких финитных функций с носителем в слое. Библиогр. 10.

### Введение

В работе рассматривается задача восстановления функции в трехмерном слое, если известны суммы интегралов от нее по поверхности параболоидов, опирающихся на плоскость  $x_3 = 0$ , и по областям, ограниченным параболоидами и плоскостью  $x_3 = 0$ , с заданной весовой функцией.

В § 1 приводятся используемые обозначения и формулируются основные результаты работы. Вывод аналитического представления для образа Фурье искомой функции по переменным  $(x_1, x_2)$  в случае, когда возмущение тождественно равно 0, содержится в § 2. В § 3 приводятся формулировки и доказательства вспомогательных утверждений, которые затем используются в § 4 при доказательстве теоремы единственности решения рассмотренной задачи интегральной геометрии с возмущением в классе гладких финитных функций с носителем в слое. Весовая функция возмущения имеет достаточно общий вид.

Вопросы единственности решения плоской задачи интегральной геометрии на семействе парабол с возмущением рассматривались в статье [1]. Формулы обращения для задачи интегральной геометрии на семействах парабол (параболоидов) получены в [2, 3]. В работах автора [4, 5] изучались различные постановки задач интегральной геометрии на плоскости и в трехмерном пространстве.

Пользуясь случаем, автор благодарит академика М. М. Лаврентьева за внимание к работе.

### § 1. Постановка задачи.

#### Формулировка основных результатов

Введем обозначения:  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^3$ ;  $\bar{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ ;  $\lambda \in \mathbb{R}^2$ ;  $\mathbb{R}_+^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_3 \geq 0\}$ ;  $S = \{x \in \mathbb{R}_+^3 : 0 < x_3 < h, h < \infty\}$ ;  $\bar{S} = \{x \in$

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Госкомитета по науке и технике Республики Узбекистан (грант № 15/99).

$\mathbb{R}_+^3 : 0 \leq x_3 \leq h$ ;  $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}_+^3 : |x_k| \leq a_k (k = 1, 2), a_k < \infty; 0 < x_3 < h\}$ ;  $\{\mathcal{P}(x)\}$  — семейство параболоидов в слое  $S$  с вершинами в точках  $x$ :

$$\mathcal{P}(x) = \{\xi : x_3 - \xi_3 = |\bar{x} - \bar{\xi}|^2; 0 \leq \xi_3 \leq h\};$$

$p(x)$  — проекция параболоида  $\mathcal{P}(x)$  на плоскость  $x_3 = 0$ ;  $P(x)$  — часть слоя  $\bar{S}$ , ограниченная поверхностью параболоида  $\mathcal{P}(x)$  и плоскостью  $x_3 = 0$ .

Рассмотрим операторное уравнение относительно функции  $u$ :

$$\int_{p(x)} u(\xi) d\bar{\xi} + \int_{P(x)} W(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad (1)$$

где  $W$  — заданная весовая функция.

Пусть  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^2$ ;

$$\hat{u}(\lambda, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle \lambda, \bar{x} \rangle} u(x) d\bar{x}; \quad \hat{f}(\lambda, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle \lambda, \bar{x} \rangle} f(x) d\bar{x}.$$

**Теорема 1.** Пусть функция  $f(x)$  известна для всех  $x \in \bar{S}$ , весовая функция  $W(x, \xi)$  тождественно равна 0. Тогда решение уравнения (1) в классе  $C_0^2(S)$  единственно и имеет место представление

$$\hat{u}(\lambda, x_3) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \int_0^{x_3} I_0(|\lambda| \sqrt{x_3 - \xi_3}) \hat{f}(\lambda, \xi_3) d\xi_3. \quad (2)$$

Здесь  $I_0$  — функция Бесселя мнимого аргумента (см. [6]).

**Теорема 2.** Пусть  $f(x)$  известна для всех  $x \in \bar{S}$ , весовая функция  $W$  имеет все непрерывные производные до второго порядка включительно и обращается в 0 вместе со своими производными на поверхности параболоида  $\mathcal{P}(x)$ . Тогда решение уравнения (1) в классе  $C_0^3(\mathcal{A})$  единственно.

## 2. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим получившееся уравнение относительно функции  $u$ :

$$\int_{p(\bar{x})} u(\xi) d\bar{\xi} = f(x). \quad (3)$$

Перейдя к цилиндрическим координатам, перепишем уравнение (3) следующим образом:

$$\int_0^{x_3} \int_0^{2\pi} u(x_1 + \rho \cos \varphi, x_2 + \rho \sin \varphi, \xi_3) d\varphi d\xi_3 = f(x), \quad (4)$$

где  $\rho = \sqrt{x_3 - \xi_3}$ .

Обозначим  $\alpha = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ . Используя интегральное представление для функции Бесселя нулевого порядка

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \cos \theta) d\theta$$

(см. [7]), легко показать, что

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho\langle\lambda,\alpha\rangle} d\varphi = 2\pi J_0(|\lambda|\rho). \quad (5)$$

Применим к обеим частям уравнения (4) преобразование Фурье по переменным  $(x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle\lambda,\bar{x}\rangle} \left[ \int_0^{x_3} \int_0^{2\pi} u(x_1 + \rho \cos \varphi, x_2 + \rho \sin \varphi, x_3) d\varphi d\xi_3 \right] d\bar{x} \\ = \int_0^{x_3} \int_0^{2\pi} e^{-i\rho\langle\lambda,\alpha\rangle} \hat{u}(\lambda, \xi_3) d\varphi d\xi_3 = \hat{f}(\lambda, x_3). \end{aligned}$$

С учетом (5) запишем

$$\hat{f}(\lambda, x_3) = 2\pi \int_0^{x_3} J_0(|\lambda|\sqrt{x_3 - \xi_3}) \hat{u}(\lambda, \xi_3) d\xi_3. \quad (6)$$

Поддействуем на обе части (6) вольтерровым интегральным оператором с ядром

$$\frac{\text{ch}(|\lambda|\sqrt{x_3 - \xi_3})}{\sqrt{x_3 - \xi_3}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{x_3} \frac{\text{ch}(|\lambda|\sqrt{x_3 - \xi_3})}{\sqrt{x_3 - \xi_3}} \hat{f}(\lambda, \xi_3) d\xi_3 \\ = 2\pi \int_0^{x_3} \int_0^{\xi_3} \frac{\text{ch}(|\lambda|\sqrt{x_3 - \xi_3}) J_0(|\lambda|\sqrt{\xi_3 - t})}{\sqrt{x_3 - \xi_3}} \hat{u}(\lambda, t) dt d\xi_3. \quad (7) \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int_0^1 \frac{y \text{ch}(c\sqrt{1-y^2}) J_0(cy)}{\sqrt{1-y^2}} dy = 1$$

(см. [8]), из (7) получаем

$$\int_0^{x_3} \sqrt{x_3 - \tau} \hat{u}(\lambda, \tau) d\tau = \frac{1}{4\pi} \int_0^{x_3} \frac{\text{ch}(|\lambda|\sqrt{x_3 - \xi_3})}{\sqrt{x_3 - \xi_3}} \hat{f}(\lambda, \xi_3) d\xi_3.$$

Отсюда нетрудно вывести следующее интегральное уравнение относительно функции  $\hat{u}$ :

$$\int_0^{x_3} \frac{\hat{u}(\lambda, \tau)}{\sqrt{x_3 - \tau}} d\tau = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_3} \int_0^{x_3} \frac{\text{ch}(|\lambda|\sqrt{x_3 - \xi_3})}{\sqrt{x_3 - \xi_3}} \hat{f}(\lambda, \xi_3) d\xi_3.$$

Его решение имеет вид

$$\hat{u}(\lambda, x_3) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial x_3} \int_0^{x_3} \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left[ \int_0^{\xi_3} \frac{\text{ch}(|\lambda|\sqrt{\xi_3 - \tau})}{\sqrt{\xi_3 - \tau}} \hat{f}(\lambda, \tau) d\tau \right] \frac{d\xi_3}{\sqrt{x_3 - \xi_3}}. \quad (8)$$

Для завершения доказательства нам понадобится формула (см. [6])

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{ch}(ax)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} I_0(a). \quad (9)$$

Из условий теоремы и (8), (9) вытекает, что

$$\begin{aligned} \hat{u}(\lambda, x_3) &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \int_0^{x_3} \int_0^{\xi_3} \frac{\operatorname{ch}(|\lambda|\sqrt{\xi_3-\tau})}{\sqrt{\xi_3-\tau}\sqrt{x_3-\xi_3}} \hat{f}(\lambda, \tau) d\tau d\xi_3 \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \int_0^{x_3} I_0(|\lambda|\sqrt{x_3-\xi_3}) \hat{f}(\lambda, \xi_3) d\xi_3. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили требуемое представление (2) для функции  $\hat{u}$ .

### 3. Вспомогательные утверждения

Функция  $u$  предполагается трижды непрерывно дифференцируемой и финитной с носителем в  $\mathcal{A}$ . Функция  $W$  имеет все непрерывные производные до второго порядка включительно и вместе со своими производными обращается в 0 на поверхности параболоида  $\mathcal{P}(x)$ .

Пусть  $f(x)$  — правая часть уравнения (1) — тождественно равна 0. Тогда

$$f_0(x) = -f_1(x). \quad (10)$$

Здесь через  $f_0$  и  $f_1$  обозначены соответственно первое и второе слагаемые в левой части (1).

Рассмотрим функцию

$$\psi(x, y) = \int_0^{x_3} \int_0^{2\pi} u(x_1 + \sqrt{1-y\rho} \cos \varphi, x_2 + \sqrt{1-y\rho} \sin \varphi, \xi_3) d\varphi d\xi_3,$$

где  $\rho$  определено выше,  $y \in [0; 1]$ . Из определения функции  $\psi$  следует, что справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x_3} \psi(x, y) = -\frac{1}{4} \Delta_{\bar{x}} \psi(x, y); \quad (11)$$

$$\psi(x, 0) = f_0(x); \quad (12)$$

$$\psi(x, 1) = 2\pi \int_0^{x_3} u(\bar{x}, \xi_3) d\xi_3. \quad (13)$$

Здесь и всюду далее

$$\Delta_{\bar{x}} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$q(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y). \quad (14)$$

Из (11) и (14) с учетом соотношения (12) вытекает, что функция  $q$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_3} q(x, y) = -\frac{1}{4} \int_0^y \Delta_{\bar{x}} q(x, \eta) d\eta + q_0(x), \quad (15)$$

где

$$q_0(x) = -\frac{1}{4}\Delta_{\bar{x}}f_0(x). \quad (16)$$

**Лемма 1.** Функция  $q_0(x)$  может быть представлена в виде

$$q_0(x) = \int_0^1 \int_{P(x)} W_1(x, \xi) q(\xi, y) d\xi dy,$$

где весовая функция  $W_1$  непрерывна и выражается через функцию  $W$  и ее производные.

**Доказательство.** Проинтегрируем функцию  $q(x, y)$  по  $y$  от 0 до 1. Из формул (12)–(14) следует, что

$$\int_0^1 q(x, y) dy = 2\pi \int_0^{x_3} u(\bar{x}, \xi_3) d\xi_3 - f_0(x).$$

Учитывая (10), последнее равенство можно записать следующим образом:

$$2\pi \int_0^{x_3} u(\bar{x}, \xi_3) d\xi_3 + \int_{P(x)} W(x, \xi) u(\xi) d\xi = \int_0^1 q(x, y) dy.$$

В силу ограничений, наложенных на функции  $u$  и  $W$ , имеем

$$u(x) + \int_{P(x)} W_2(x, \xi) u(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_3} q(x, y) dy, \quad (17)$$

где  $W_2(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial x_3} W(x, \xi)$ .

Уравнение (17) является операторным уравнением Вольтерра 2-го рода (см. [9]) относительно функции  $u$ . Его решение имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_3} q(x, y) dy + \int_0^1 \int_{P(x)} W_3(x, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi_3} q(\xi, y) d\xi dy,$$

где  $W_3$  — непрерывная функция, выражающаяся через функцию  $W$  и ее производные.

Используя выражение для возмущения  $f_1$ , т. е. второго слагаемого в левой части уравнения (1), получаем

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_{P(x)} W(x, \xi) u(\xi) d\xi \\ &= \int_{P(x)} W(x, \xi) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_3} q(x, y) dy + \int_0^1 \int_{P(\xi)} W_3(\xi, \zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta_3} q(\zeta, y) d\zeta dy \right] d\xi. \end{aligned} \quad (18)$$

По нашему предположению весовая функция  $W$  вместе со своими производными обращается в 0 на параболах  $\mathcal{P}(x)$ . Из определения функции  $q_0(x)$  (см.

(16) и (18)) вытекает, что

$$q_0(x) = \int_0^1 \int_{P(x)} W_1(x, \xi) q(\xi, y) d\xi dy,$$

где функция  $W_1$  зависит только от функции  $W$  и ее производных. Лемма 1 доказана.

Введем следующие обозначения:

$$\hat{q}(\lambda, x_3, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle \lambda, \bar{x} \rangle} q(x, y) d\bar{x}; \quad (19)$$

$$\hat{q}_0(\lambda, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle \lambda, \bar{x} \rangle} q_0(x) d\bar{x}; \quad (20)$$

$$q_1(\lambda, y) = \begin{cases} \hat{q}(\lambda, h, y), & \text{если } 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{если } y > 1. \end{cases} \quad (21)$$

В пространстве переменных  $(x_3, y)$  рассмотрим полуполосу  $\Omega = \{(x_3, y) : 0 \leq x_3 \leq h, 0 \leq y < \infty\}$  и область  $\Omega_0 = \{(x_3, y) : 0 \leq x_3 \leq h, 0 \leq y \leq 1\}$ .

Пусть функция  $Q(\lambda, x_3, y)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_3} Q(\lambda, x_3, y) = \frac{|\lambda|^2}{4} \int_0^y Q(\lambda, x_3, \eta) d\eta + \hat{q}_0(\lambda, x_3) \quad (22)$$

и условию

$$Q(\lambda, h, y) = q_1(\lambda, y). \quad (23)$$

Здесь  $\hat{q}_0$  и  $q_1$  определяются формулами (20) и (21) соответственно.

При фиксированных  $(\lambda_1, \lambda_2)$  рассмотрим для функции  $Q$  задачу Коши (22), (23).

**Лемма 2.** *Функция  $\hat{q}$  может быть продолжена из  $\mathbb{R}^2 \times \Omega_0$  на всю область  $\mathbb{R}^2 \times \Omega$  как решение задачи Коши (22), (23).*

**Доказательство.** Решение задачи Коши (22), (23) имеет вид

$$Q(\lambda, x_3, y) = \int_0^y J_0(|\lambda| \sqrt{(h-x_3)(y-\eta)}) \frac{\partial}{\partial \eta} q_1(\lambda, \eta) d\eta + \frac{1}{2|\lambda|\sqrt{y}} \int_{x_3}^h \sqrt{t-x_3} J_1(|\lambda| \sqrt{y(t-x_3)}) \hat{q}_0(\lambda, t) dt, \quad (24)$$

где  $J_0$  и  $J_1$  — функции Бесселя нулевого и первого порядков соответственно. Действительно, непосредственной подстановкой в уравнение (22) нетрудно убедиться, что функция  $Q$ , определенная формулой (24), удовлетворяет этому уравнению. Далее, легко показать, что задача Коши (23) для эволюционного уравнения (22) равномерно корректна, и в силу этого ее решение единственно (см. [10]).

Применим к обеим частям уравнения (15) преобразование Фурье по  $(x_1, x_2)$ . Исходя из известных свойств преобразования Фурье, заключаем, что функция

$\hat{q}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \hat{q}(\lambda, x_3, y) = \frac{|\lambda|^2}{4} \int_0^y \hat{q}(\lambda, x_3, \eta) d\eta + \hat{q}_0(\lambda, x_3).$$

Таким образом,

$$Q(\lambda, x_3, y) = \hat{q}(\lambda, x_3, y), \quad \text{если } (x_3, y) \in \Omega_0. \quad (25)$$

Из (25) следует справедливость утверждения леммы.

Пусть  $b > 0$ . Рассмотрим функции

$$\hat{g}(\lambda, x_3, y; b) = e^{b(x_3-h)^2 - bh^2} Q(\lambda, x_3, y), \quad (26)$$

$$g_0(x; b) = e^{b(x_3-h)^2 - bh^2} q_0(x) \quad (27)$$

и

$$g(x, y; b) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\langle \lambda, \bar{x} \rangle} \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) d\lambda, \quad (28)$$

$$\hat{g}_0(\lambda, x_3; b) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle \lambda, \bar{x} \rangle} g_0(x; b) d\bar{x}. \quad (29)$$

**Лемма 3.** Функция  $\hat{g}$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) = \frac{|\lambda|^2}{4} \int_0^y \hat{g}(\lambda, x_3, \eta; b) d\eta + 2b(x_3 - h)\hat{g}(\lambda, x_3, y; b) + \hat{g}_0(\lambda, x_3; b). \quad (30)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Справедливость утверждения леммы вытекает из (22) и (26).

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{L}\hat{g}(\lambda, x_3, y; b) = \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) - \frac{|\lambda|^2}{4} \int_0^y \hat{g}(\lambda, x_3, \eta; b) d\eta - 2b(x_3 - h)\hat{g}(\lambda, x_3, y; b); \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^* \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) &= -\frac{\partial}{\partial x_3} \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \\ &\quad - \frac{|\lambda|^2}{4} e^{ay} \int_y^\infty e^{-a\eta} \hat{g}(\lambda, x_3, \eta; b) d\eta - 2b(x_3 - h)\hat{g}(\lambda, x_3, y; b); \end{aligned} \quad (32)$$

$$\hat{g}'_3(\lambda, h, y; b) = \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \Big|_{x_3=h}.$$

**Лемма 4.** Имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_0^h \int_0^\infty e^{-ay} [\mathbf{L}\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)]^2 dy dx_3 &= \int_0^h \int_0^\infty e^{-ay} \mathbf{L}^* \mathbf{L}\hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) dy dx_3 \\ &\quad + \int_0^\infty e^{-ay} \left[ \hat{g}'_3(\lambda, h, y; b) \hat{g}(\lambda, h, y; b) - \frac{|\lambda|^2}{4} \int_0^y \hat{g}(\lambda, h, \eta; b) d\eta \hat{g}(\lambda, h, y; b) \right] dy. \end{aligned}$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (31) и (32) имеем

$$\begin{aligned}
[\mathbf{L}\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)]^2 &= \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \right]^2 - 2 \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \frac{|\lambda|^2}{4} \int_0^y \hat{g}(\lambda, x_3, \eta; b) d\eta \\
&\quad - 4b(x_3 - h) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) + \left[ \frac{|\lambda|^2}{4} \int_0^y \hat{g}(\lambda, x_3, \eta; b) d\eta \right]^2 \\
&\quad + 4b(x_3 - h) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \frac{|\lambda|^2}{4} \int_0^y \hat{g}(\lambda, x_3, \eta; b) d\eta + 4b^2(x_3 - h)^2 \hat{g}^2(\lambda, x_3, y; b); \\
\mathbf{L}^* \mathbf{L} \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) &= - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \\
&\quad + \frac{|\lambda|^2}{4} (I - I^*) \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \\
&\quad - 2b[\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)]^2 + \frac{|\lambda|^4}{16} I^* I \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \\
&\quad + 2b(x_3 - h) \frac{|\lambda|^2}{4} (I + I^*) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) + 4b^2(x_3 - h)^2 [\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)]^2.
\end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое в разложении  $[\mathbf{L}\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)]^2$ . Поскольку  $u \in C_0^3(\mathcal{A})$ , с помощью интегрирования по частям легко показать, что

$$\begin{aligned}
&\int_0^h \int_0^\infty e^{-ay} \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \right]^2 dy dx_3 \\
&= - \int_0^h \int_0^\infty e^{-ay} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) dy dx_3 \\
&\quad + \int_0^\infty e^{-ay} \frac{\partial}{\partial x_3^2} \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) dy.
\end{aligned}$$

Проделав подобные операции над остальными слагаемыми в полученных выражениях для  $[\mathbf{L}\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)]^2$  и  $\mathbf{L}^* \mathbf{L} \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b)$ , после несложных, хотя и довольно громоздких, преобразований убеждаемся в справедливости утверждения леммы.

Аналогично можно показать, что справедлива

**Лемма 5.** *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned}
&\int_0^h \int_0^\infty e^{-ay} [\mathbf{L}^* \hat{g}(\lambda, x_3, y; b)]^2 dy dx_3 \\
&= \int_0^h \int_0^\infty e^{-ay} \mathbf{L} \mathbf{L}^* \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) dy dx_3 \\
&+ \int_0^\infty e^{-ay} \left[ \hat{g}'_3(\lambda, h, y; b) \hat{g}(\lambda, h, y; b) + \frac{|\lambda|^2}{4} e^{ay} \int_y^\infty e^{-a\eta} \hat{g}(\lambda, h, \eta; b) d\eta \hat{g}(\lambda, h, y; b) \right] dy.
\end{aligned}$$

Как следует из условий теоремы и леммы 2, при фиксированных  $\lambda$ ,  $x_3$  и  $b$  функцию  $\hat{g}$  можно рассматривать как элемент гильбертова пространства  $\mathcal{H}$  функций, определенных на полуоси  $0 \leq y < \infty$ , со скалярным произведением

$$(h_1, h_2) = \int_0^{\infty} e^{-ay} h_1(y) h_2(y) dy, \quad a > 0.$$

В пространстве  $\mathcal{H}$  рассмотрим интегральный оператор

$$Ip = \int_0^y p(\eta) d\eta. \quad (33)$$

Легко видеть, что сопряженный оператор определяется равенством

$$I^*g = e^{ay} \int_y^{\infty} e^{-a\eta} g(\eta) d\eta. \quad (34)$$

**Лемма 6.** Пусть операторы  $I$  и  $I^*$  определяются формулами (33) и (34) соответственно. Тогда справедливо соотношение

$$(I^*I - II^*)\hat{g} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-a\eta} \hat{g}(\eta) d\eta.$$

Доказательство леммы 6 аналогично доказательству леммы 3 из [1].

#### § 4. Доказательство теоремы единственности

Возьмем функцию  $\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)$ , определенную формулой (24), и рассмотрим функционал

$$\mathbf{F}(\hat{g}) = \int_0^h \int_0^{\infty} e^{-ay} [\mathbf{L}\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)]^2 dy dx_3.$$

Из (31), (32) и леммы 4 следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\hat{g}) &= \int_0^h \int_0^{\infty} e^{-ay} \mathbf{L}\mathbf{L}^* \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) dy dx_3 \\ &+ \int_0^h \int_0^{\infty} e^{-ay} \left[ 4b + \frac{|\lambda|^4}{16} (I^*I - II^*) \right] \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) dy dx_3 \\ &+ \int_0^{\infty} e^{-ay} \left[ \hat{g}'_3(\lambda, h, y; b) \hat{g}(\lambda, h, y; b) - \frac{|\lambda|^2}{4} I\hat{g}(\lambda, h, y; b) \hat{g}(\lambda, h, y; b) \right] dy. \end{aligned}$$

Аналогично, используя лемму 5, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\hat{g}) &= \int_0^h \int_0^{\infty} e^{-ay} [\mathbf{L}^* \hat{g}(\lambda, x_3, y; b)]^2 dy dx_3 \\ &+ \int_0^h \int_0^{\infty} e^{-ay} \left[ 4b + \frac{|\lambda|^4}{16} (I^*I - II^*) \right] \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) dy dx_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\infty} e^{-ay} \left[ \hat{g}'_3(\lambda, h, y; b) + \frac{|\lambda|^2}{4} I^* \hat{g}(\lambda, h, y; b) \right] \hat{g}(\lambda, h, y; \delta) dy \\
& + \int_0^{\infty} e^{-ay} \left[ \hat{g}'_3(\lambda, h, y; b) - \frac{|\lambda|^2}{4} I \hat{g}(\lambda, h, y; b) \right] \hat{g}(\lambda, h, y; b) dy.
\end{aligned}$$

Последнее равенство с помощью леммы 6 можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\hat{g}) &= \int_0^h \int_0^{\infty} e^{-ay} [\mathbf{L}^* \hat{g}(\lambda, x_3, y; b)]^2 dy dx_3 + 4b \int_0^h \int_0^{\infty} e^{-ay} [\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)]^2 dy dx_3 \\
& + \frac{|\lambda|^4}{16a} \int_0^h \int_0^{\infty} e^{-ay} \left[ \int_0^{\infty} e^{-a\eta} \hat{g}(\lambda, x_3, \eta; b) d\eta \right] \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) dy dx_3 \\
& - \frac{|\lambda|^2}{4} \int_0^{\infty} e^{-ay} (I + I^*) \hat{g}(\lambda, h, y; b) \hat{g}(\lambda, h, y; b) dy. \quad (35)
\end{aligned}$$

С другой стороны, как следует из леммы 3,  $\mathbf{F}(\hat{g})$  может быть представлен в виде

$$\mathbf{F}(\hat{g}) = \frac{1}{a} \int_0^h \hat{g}_0^2(\lambda, x_3; b) dx_3. \quad (36)$$

Из (35) и (36) имеем

$$\begin{aligned}
& \int_0^h \int_0^{\infty} e^{-ay} [\mathbf{L}^* \hat{g}(\lambda, x_3, y; b)]^2 dy dx_3 + 4b \int_0^h \int_0^{\infty} e^{-ay} [\hat{g}(\lambda, x_3, y; b)]^2 dy dx_3 \\
& + \frac{|\lambda|^4}{16a} \int_0^h \int_0^{\infty} e^{-ay} \left[ \int_0^{\infty} e^{-a\eta} \hat{g}(\lambda, x_3, \eta; b) d\eta \right] \hat{g}(\lambda, x_3, y; b) dy dx_3 \\
& = \frac{|\lambda|^2}{4} \int_0^{\infty} e^{-ay} (I + I^*) \hat{g}(\lambda, h, y; b) \hat{g}(\lambda, h, y; b) dy + \frac{1}{a} \int_0^h \hat{g}_0^2(\lambda, x_3; b) dx_3. \quad (37)
\end{aligned}$$

Отсюда нетрудно получить неравенство

$$\begin{aligned}
& 4b \int_0^h \int_0^{\infty} e^{-ay} \hat{g}^2(\lambda, x_3, y; b) dy dx_3 \\
& \leq \frac{|\lambda|^2}{4} \int_0^{\infty} e^{-ay} (I + I^*) \hat{g}(\lambda, h, y; b) \hat{g}(\lambda, h, y; b) dy + \frac{1}{a} \int_0^h \hat{g}_0^2(\lambda, x_3; b) dx_3. \quad (38)
\end{aligned}$$

Из определения функций  $g$ ,  $g_0$  и (37), (38) следует, что

$$\begin{aligned} & 4b \int_0^h \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ay} g^2(x, y; b) d\bar{x} dy dx_3 \\ & \leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ay} (I + I^*) \Delta_{\bar{x}} g(\bar{x}, h, y; b) g(\bar{x}, h, y; b) d\bar{x} dy + \frac{1}{a} \int_0^h \int_{\mathbb{R}^2} g_0^2(x; b) d\bar{x} dx_3. \end{aligned} \quad (39)$$

При  $y \in [0, 1]$  из леммы 2 и (26), (28) вытекает, что

$$g(x, y; b) = e^{b(x_3-h)^2 - bh^2} q(x, y), \quad (40)$$

$$g(\bar{x}, h, y; b) = e^{-bh^2} q(\bar{x}, h, y). \quad (41)$$

По условию теоремы  $u \in C_0^3(\mathcal{A})$ . Тогда из (41) и определения функции  $q(x, y)$  по теореме об интегральном среднем получаем

$$\frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ay} (I + I^*) \Delta_{\bar{x}} g(\bar{x}, h, y; b) g(\bar{x}, h, y; b) d\bar{x} dy \leq C_1 e^{-2bh^2}, \quad (42)$$

где  $C_1$  — некоторая постоянная.

Теперь рассмотрим второе слагаемое в правой части неравенства (39):

$$\frac{1}{a} \int_0^h \int_{\mathbb{R}^2} g_0^2(x; b) d\bar{x} dx_3.$$

Из леммы 1 и (27), (40) следует, что

$$g_0(x; b) = \int_0^1 \int_{P(x)} K(x, \xi; b) g(\xi, y; b) d\xi dy, \quad (43)$$

где  $K(x, \xi; b) = e^{b(x_3 - \xi_3)(x_3 + \xi_3 - 2h)} W_1(x, \xi)$ ;  $0 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq h$ . Как отмечено в лемме 1, функция  $W_1$  непрерывна и зависит от функции  $W$  и ее производных.

Используя неравенство Буняковского — Шварца и теорему об интегральном среднем, из (43) получим

$$\int_0^h \int_{\mathbb{R}^2} g_0^2(x; b) d\bar{x} dx_3 \leq C_2 \int_0^1 \int_0^h \int_{\mathbb{R}^2} g^2(x, y; b) d\bar{x} dx_3 dy,$$

где  $C_2$  — некоторая постоянная. Учитывая, что  $y \in [0, 1]$ , из последнего неравенства имеем

$$\int_0^h \int_{\mathbb{R}^2} g_0^2(x; b) d\bar{x} dx_3 \leq C_3 \int_0^1 \int_0^h \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ay} g^2(x, y; b) d\bar{x} dx_3 dy, \quad (44)$$

где  $C_3$  — некоторая постоянная.

Из (39), (42) и (44) с учетом очевидного неравенства

$$\int_0^1 \int_0^h \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ay} g^2(x, y; b) d\bar{x} dx_3 dy \leq \int_0^\infty \int_0^h \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ay} g^2(x, y; b) d\bar{x} dx_3 dy$$

получаем

$$(4b - C_4) \int_0^\infty \int_0^h \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ay} g^2(x, y; b) d\bar{x} dx_3 dy \leq C_1 e^{-2bh^2}, \quad (45)$$

где  $C_4$  — постоянная.

Легко заметить, что функцию  $g$  можно представить в виде

$$g(x, y; b) = e^{b(x_3-h)^2 - bh^2} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\langle \lambda, \bar{x} \rangle} Q(\lambda, x_3, y) d\lambda, \quad (46)$$

Пусть функция  $u$  не равна тождественно 0. Тогда функция  $q$  (а следовательно, и функция  $g$ ) не равна тождественно 0. Как вытекает из леммы 2 и (46), существует  $\varepsilon \in (0; 1)$  такое, что

$$\int_0^\infty \int_0^h \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ay} g^2(x, y; b) d\bar{x} dx_3 dy \geq C_5 e^{-2bh^2\varepsilon}, \quad (47)$$

где  $C_5$  — некоторая постоянная.

Из (45) и (47) следует, что при  $b > C_4/4$  имеет место неравенство

$$e^{-2bh^2\delta} \geq C(b), \quad (48)$$

где  $C(b) = (4b - C_4)C_5/C_1$ ,  $\delta = 1 - \varepsilon$ ,  $0 < \delta < 1$ .

Как легко заметить, всегда найдется такое  $B > 0$ , что неравенство (48) не выполняется при  $b > B$ . Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения теоремы 2.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. М. Задача интегральной геометрии на плоскости с возмущением // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 4. С. 851–857.
2. Бухгейм А. Л. О некоторых задачах интегральной геометрии // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 1. С. 34–42.
3. Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я. Линейные операторы и некорректные задачи. М.: Наука, 1991.
4. Бегматов Акбар Х. Об одном классе задач интегральной геометрии на плоскости // Докл. РАН. 1993. Т. 331, № 3. С. 261–262.
5. Бегматов Акбар Х. Редукция задачи интегральной геометрии в трехмерном пространстве к полисингулярному интегральному уравнению с возмущением // Докл. РАН. 1998. Т. 360, № 5. С. 583–585.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
7. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
9. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
10. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.

*Статья поступила 15 сентября 1999 г.*

*г. Новосибирск*