А. А. Пекарский, Рациональные приближения выпуклых функций,
Матем. заметки, 1985, том 38, выпуск 5, 679–690

https://www.mathnet.ru/mzm5580

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 38, № 5 (1985)

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

А. А. Пекарский

1. Пусть соответственно $C^s[0, 1]$ и $C^s(0, 1)$ — множество функций f, определенных на отрезке $[0, 1]$ и интервале $(0, 1)$, имеющих s-ю непрерывную производную $f^{(s)}$. Полагаем $C^0[0, 1] = C[0, 1]$, $C^0(0, 1) = C(0, 1)$ и $f^{(0)} = f$. Через $\omega(\delta, f)$ обозначим модуль непрерывности $f \in C[0, 1]$ и $R_n(f)$ — наилучшее равномерное приближение f рациональными функциями степени $\leqslant n$.

В настоящей работе изучаются рациональные приближения класса $G_r(\omega)$, который определим следующим образом. Пусть r натуральное и ω — функция типа модуля непрерывности, т. е. $\omega \in C[0, 1]$, $\omega(0) = 0$, $\omega(\delta) > 0$ при $\delta \in (0, 1]$ и $\omega(\delta_1 + \delta_2) \leqslant \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$ при $\delta_1\delta_2 \geqslant 0$ и $\delta_1 + \delta_2 \leqslant 1$. Класс $G_r(\omega)$ состоит из функций $f \in C[0, 1] \cap C^{r-1}(0, 1)$, таких, что $\omega(\delta, f) \leqslant \omega(\delta)$ при $\delta \geqslant 0$ и $f^{(r-1)}$ выпукла (вогнута) на $(0, 1)$. Очевидно, $G_1(\omega)$ — множество выпуклых (вогнутых) функций $f \in C[0, 1]$ с заданной мажорантой модуля непрерывности.

Основное содержание статьи составляют следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Если* $f \in G_r(\omega)$, *то* [1])

$$R_n(f) \leqslant \frac{c}{n^{r+1}}\left(\int_{e^{-n}}^{1} \sqrt[r+1]{\frac{\omega(x)}{|\ln x|}}\,\frac{dx}{x}\right)^{r+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

[1]) Через $c, c_1, c_2, \ldots$ обозначим некоторые положительные величины (в разных местах, вообще говоря, разные), зависящие лишь от r.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $f \in G_r(\omega)$ *и*

$$\int_0^1 \sqrt[r+1]{\frac{\omega(x)}{|\ln x|}}\,\frac{dx}{x} < \infty, \qquad (1)$$

то $R_n(f) = o(n^{-r-1})$.

Ниже, в п. 2, даны доказательства теорем 1 и 2, в п. 3 приводятся некоторые следствия из них, а в п. 4 аналогичные утверждения получены для кусочно-полиномиальных приближений.

2. Пусть $V_r[a, b]$ $(r = 1, 2, \ldots)$ — множество функций f непрерывных на отрезке $[a, b]$, имеющих $(r-1)$-ю абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}$, такую, что $f^{(r)}$ есть функция ограниченной вариации. Будем считать $f^{(r)}(a) = f^{(r)}(a+0)$, $f^{(r)}(b) = f^{(r)}(b-0)$ и $f^{(r)}(x) = \frac{1}{2}[f^{(r)}(x+0) + f^{(r)}(x-0)]$, $x \in (a, b)$. Через $V(f^{(r)}) = V(f^{(r)}, [a, b])$ обозначим полную вариацию $f^{(r)}$.

ЛЕММА 1. *Пусть функции* f *и* $w \in C[0, 1]$, *причем* w *выпукла, строго возрастает,* $w(0) = 0$ *и* $w(1) = 1$. *Если* $F(x) = f[w(x)] \in V_r[0, 1]$, *то для любого натурального* m *существуют полиномы* P_i *степени* $\leqslant r$ *и рациональные функции* Ψ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, *удовлетворяющие условиям*: 1) *любая линейная комбинация* Ψ_i *является рациональной дробью степени* $\leqslant m$, 2) *имеет место неравенство*

$$|F(x) - Q(x)| \leqslant c_1 m^{-r-1} V(F^{(r)}) \quad (x \in [0, 1]), \qquad (2)$$

где $Q(x) = \sum_{i=1}^{m} \Psi_i(w(x)) P_i(x)$.

ЛЕММА 2. *Пусть в условиях леммы 1 функция* $y = w(x)$ *является обратной к рациональной функции* $x = v(y)$ *степени* $\leqslant m$. *Тогда* $R_{(r+1)m}(f) \leqslant c_1 m^{-r-1} V(F^{(r)})$.

Лемма 1 получена нами (см. [1, теорема 6.1, следствие и замечание б) после нее]). Для доказательства леммы 2 достаточно в (2) положить $x = v(y)$.

Замечание. Полагая в лемме 1 $w(x) = x$, получим следующий результат В. А. Попова [2]: если $f \in V_r[0, 1]$, то

$$R_n(f) \leqslant c n^{-r-1} V(f^{(r)}) \qquad (n = r, r+1, \ldots).$$

ЛЕММА 3. *Пусть* $f \in V_r[0, 1]$ *и* m *натуральное. Если*: 1) $f(1) = f'(1) = \ldots = f^{(r-1)}(1) = 0$, 2) $f^{(r)}$ *неотрицательна и невозрастает*, 3) $f^{(r)}$ *постоянна на*

$[0, e^{-m})$, *то*

$$R_{(r+1)m}(f) \leqslant \frac{c_2}{m^{r+1}} \left(\int_{e^{-m-r}}^{1} \sqrt[r+1]{\frac{|f'(y)|}{y^r}}\, dy \right)^{r+1}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем предполагать также, что $f \in C^{r+1}$ $[0, 1]$ и $f^{(r)}(e^{-m}) > 0$. Согласно лемме 2, достаточно построить рациональную функцию $x = v(y)$ степени $\leqslant m$, удовлетворяющую условиям: 1) v вогнута, строго возрастает, $v(0) = 0$ и $v(1) = 1$, 2) если $y = w(x)$ — функция, обратная к $x = v(y)$ и $F(x) = f[w(x)]$, то

$$V(F^{(r)}) \leqslant c_1 \left(\int_{e^{-m-r}}^{1} \sqrt[r+1]{\frac{|f'(y)|}{y^r}}\, dy \right)^{r+1}. \tag{3}$$

Положим

$$v(y) = \sum_{k=1}^{m} y e^{-k} (y + e^{-k})^{-1} h_k,$$

$$h_k = \frac{1}{M} \sqrt[r+1]{e^{rk} |f'(e^{-k-r})|}, \qquad M = \sum_{j=1}^{m} \frac{\sqrt[r+1]{e^{-j} |f'(e^{-j-r})}}{1 + e^{-j}}.$$

Очевидно, условие 1) для функции v выполняется. Ниже покажем, что условие 2) также выполняется. Для краткости при $k = 1, 2, \ldots, r+1$ положим

$$f^{(k)} = \frac{d^k f}{dy^k}, \quad F^{(k)} = \frac{d^k F}{dx^k}, \quad v^{(k)} = \frac{d^k v}{dy^k}, \quad v' = v^{(1)}.$$

Имеем $(d/dx)\, v^{(k-1)} = v^{(k)}/v'$ и $(d/dx)\, f^{(k-1)} = f^{(k)}/v'$. Используя это, методом математической индукции легко показать, что

$$F^{(r+1)} = \frac{f^{(r+1)}}{(v')^{r+1}} + \frac{1}{v'} \sum_{k=1}^{r} \frac{f^{(r+1-k)}}{(v')^{r+k}} \left[\sum_{(k)} A \prod_{j=1}^{k+1} (v^{(j)})^{l_j} \right], \tag{4}$$

где $\sum_{(k)}$ — оператор суммирования по всем неотрицательным целым $l_1, l_2, \ldots, l_{k+1}$, удовлетворяющим условиям

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_{k+1} = k, \tag{5}$$

$$l_1 + 2l_2 + \ldots + (k+1)\, l_{k+1} = 2k; \tag{6}$$

$A = A(r, k, l_1, l_2, \ldots, l_{k+1})$— коэффициенты, зависящие лишь от $r, k, l_1, \ldots, l_{k+1}$.

Так как $\mathrm{d}x = v'\mathrm{d}y$ и $f^{(r+1)}(y) = 0$ для $y \in [0, \mathrm{e}^{-m}]$, то из (4) получим

$$V(F^{(r)}) = \int_0^1 |F^{(r+1)}|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathrm{e}^{-m}}^1 \frac{|f^{(r+1)}|}{(v')^r}\,\mathrm{d}y + \\ + \int_0^1 \Big|\sum_{k=1}^r \ldots\Big|\,\mathrm{d}y \stackrel{\mathrm{def}}{=} J_1 + J_2. \qquad (7)$$

Для оценки интегралов J_1 и J_2 отметим некоторые свойства функций v и f. Пусть $y \in [0, 1]$ и $\tau = \max\{\mathrm{e}^{-m}, y\}$. Из определения функции v получим

$$|v^{(j)}(y)| \leqslant c_2\tau^{-j+1}v'(\tau) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r+1). \qquad (8)$$

Для функции f имеет место аналогичная оценка:

$$|f^{(j)}(y)| \leqslant c_3\tau^{-j+1}|f'(\mathrm{e}^{-j+1}\tau)| \qquad (j = 1, 2, \ldots, r). \qquad (9)$$

Действительно, так как $f(1) = f'(1) = \ldots = f^{(r-1)}(1) = 0$, то

$$f^{(l)}(y) = \frac{1}{(r-l-1)!}\int_y^1 f^{(r)}(t)(y-t)^{r-l-1}\,\mathrm{d}t$$
$$(l = 0, 1, \ldots, r-1).$$

Ввиду условия $f^{(r)} \geqslant 0$ получим, что функция $(-1)^{r-l}f^{(l)}$ неотрицательна, не возрастает и выпукла на $[0, 1]$. Поэтому

$$|f^{(l+1)}(y)| \leqslant \frac{|f^{(l)}(y) - f^{(l)}(\mathrm{e}^{-1}y)|}{y - \mathrm{e}^{-1}y} \leqslant 2\,\frac{|f^{(l)}(\mathrm{e}^{-1}y)|}{y}$$
$$(0 < y \leqslant 1).$$

Из последнего неравенства следует (9) для $y \geqslant \mathrm{e}^{-m}$. По условию функция f на $[0, \mathrm{e}^{-m}]$ совпадает с некоторым многочленом степени r. Поэтому, представив f' и $f^{(j)}$ на $[0, \mathrm{e}^{-m}]$ по формуле Тейлора в точке e^{-m} с учетом отмеченного выше условия $(-1)^{r-l}f^{(l)} \geqslant 0$ $(l = 0, 1, \ldots, r)$, получим (9) на $[0, \mathrm{e}^{-m})$.

Для $y \in (\mathrm{e}^{-k-r}, \mathrm{e}^{-k-r+1}]$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ из определения функции v находим, что

$$v'(y) \geqslant \frac{c_4}{M}\sqrt[r+1]{\mathrm{e}^{rk}|f'(\mathrm{e}^{-k-r})|}.$$

Следовательно, ввиду невозрастания $|f'|$ получим

$$v'(y) \geqslant \frac{c_5}{M}\sqrt[r+1]{\frac{|f'(y)|}{y^r}} \qquad (\mathrm{e}^{-m-r} \leqslant y \leqslant 1). \qquad (10)$$

Нетрудно установить также, что

$$M \leqslant c_6 \int_{e^{-m-r}}^{1} \sqrt[r+1]{\frac{|f'(y)|}{y^r}}\, dy. \tag{11}$$

Так как $f^{(r+1)} \leqslant 0$, то интегрированием по частям находим

$$J_1 \leqslant \frac{f^{(r)}(e^{-m})}{(v'(e^{-m}))^r} + r\int_{e^{-m}}^{1} \frac{f^{(r)}|v''|}{(v')^{r+1}}\, dy. \tag{12}$$

Заметим, что функция $v'(y)$ убывает для $y > 0$ и $v'(e^{-r}y) \leqslant \leqslant c_7 v'(y)$. Поэтому, заменяя в (12) $f^{(r)}$ и v'' неравенствами (8) и (9), а также учитывая, что

$$\frac{f^{(r)}(e^{-m})}{(v'(e^{-m}))^r} \leqslant c_8 \int_{e^{-m-r}}^{1} \frac{|f'(y)|\, dy}{(yv'(y))^r},$$

получим

$$J_1 \leqslant c_9 \int_{e^{-m-r}}^{1} \frac{|f'(y)|\, dy}{(yv'(y))^r}. \tag{13}$$

Пусть $1 \leqslant k \leqslant r$ и $l_1, l_2, \ldots, l_{k+1}$ удовлетворяют условиям (5), (6). Снова применяя оценки (8), (9) и учитывая свойства v' и $|f'|$, получим

$$\left| \left(\frac{f^{(r+1-k)}}{(v')^{r+k}} \prod_{j=1}^{k+1} (v^{(j)})^{l_j} \right)(y) \right| \leqslant c_{10} \frac{|f'(e^{-r+1}\tau)|}{(\tau v'(\tau))^r} \qquad (0 \leqslant y \leqslant 1). \tag{14}$$

Из (4), (7) и (14) получим

$$J_2 \leqslant c_{11} \int_{e^{-m-r}}^{1} \frac{|f'(y)|}{(yv'(y))^r}\, dy. \tag{15}$$

Наконец, из (7), (10), (11), (13) и (15) получим (3). Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4 ([3, Д 64]). *Пусть функция* φ *ограничена суммируема и неотрицательна на* $[0, 1]$. *Если* $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(y)\, dy$ *и* $p \in (0, 1)$, *то*

$$\int_0^1 (x\varphi(x))^p \frac{dx}{x} \leqslant \left(\frac{1-p}{p}\right)^p \int_0^1 \left(\frac{\Phi(x)}{|\ln x|}\right)^p \frac{dx}{x}.$$

ЛЕММА 5 (см. [4; 1, неравенство 4.5]). *Если* $f \in G_1(\omega)$, *то* $R_m(f) \leqslant cm^{-1}\omega(1)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, *где* $c > 0$ — *абсолютная константа.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $g \in G_r(\omega)$ удовлетворяет условиям $g(1) = g'(1) = \ldots = g^{(r-1)}(1) = 0$, $g^{(r)} \geqslant 0$ и не возрастает. Для $\varepsilon \in (0, 1)$ положим $\varphi_1(t) = \min\{g^{(r)}(\varepsilon), g^{(r)}(t)\}$ и $\varphi_2(t) = g^{(r)}(t) - \varphi_1(t)$. Тогда

$$g(x) = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=1}^{2}\int_1^x (x-t)^{r-1}\varphi_k(t)\,dt = g_1(x) + g_2(x) \qquad (x \in [0, 1]). \tag{16}$$

Нетрудно найти, что

$$\int_0^\delta |g_1'(x)|\,dx \leqslant \omega(\delta, g_1) \leqslant \omega(\delta, g) \qquad (\delta \in [0, 1]), \tag{17}$$

$$\omega(\delta, g_2) \leqslant \min\{\omega(\delta, g), \omega(\varepsilon, g)\} \qquad (\delta \in [0, 1]). \tag{18}$$

Для любого натурального m имеем

$$R_{(r+2)m}(g) \leqslant R_{(r+1)m}(g_1) + R_m(g_2). \tag{19}$$

Положим сейчас $\varepsilon = e^{-m}$. Из лемм 3, 4 и неравенства (17) получим

$$R_{(r+1)m}(g_1) \leqslant \frac{c_1}{m^{r+1}}\left(\int_{e^{-m-r}}^1 \sqrt[r+1]{\frac{\omega(x)}{|\ln x|}}\,\frac{dx}{x}\right)^{r+1}. \tag{20}$$

Из леммы 5 и неравенства (18) находим

$$R_m(g_2) \leqslant c_2 m^{-1}\omega(e^{-m}). \tag{21}$$

Так как

$$\left(\int_{e^{-m-r}}^1 \sqrt[r+1]{\frac{\omega(x)}{|\ln x|}}\,\frac{dx}{x}\right)^{r+1} \geqslant c_3 m^r \omega(e^{-m}),$$

то из (19), (20) и (21) находим

$$R_{(r+2)m}(g) \leqslant \frac{c_4}{m^{r+1}}\left(\int_{e^{-m-r}}^1 \sqrt[r+1]{\frac{\omega(x)}{|\ln x|}}\,\frac{dx}{x}\right)^{r+1}. \tag{22}$$

Для произвольной $f \in G_r(\omega)$ определим $\Psi_1(t) = \max\{f^{(r)}(t) - f^{(r)}(1/2), 0\}$ и $\Psi_2(t) = \min\{f^{(r)}(t) - f^{(r)}(1/2), 0\}$. Если $p(x)$ — многочлен Тейлора порядка r функции f в точке 1/2, то

$$f(x) = p(x) + \frac{1}{(r-1)!}\sum_{k=1}^{2}\int_{1/2}^x (x-t)^{r-1}\Psi_k(t)\,dt \stackrel{\text{def}}{=} p(x) + h_1(x) + h_2(x) \qquad (x \in [0, 1]).$$

Очевидно, функции $h_1, h_2 \in G_r(c_5\omega)$ и к ним применима оценка (22). Отсюда и следует теорема 1.

ЛЕММА 6. *Если* $f \in V_r\,[0, 1]$, *то* $R_n(f) = o(n^{-r-1})$.

Лемма 6 — основной результат работы П. П. Петрушева [5]. В [6] показано, что она является следствием результата В. А. Попова [2] (см. замечание после леммы 2).

Доказательство теоремы 2. Достаточно получить это утверждение для функций g из первой части доказательства теоремы 1. Из (1), (16), (18) и теоремы 1 получим, что для любого натурального m имеет место неравенство

$$R_{2m}(g) \leqslant R_m(g_1) + \frac{c_1}{m^{r+1}}\left(\int_0^1 \sqrt[r+1]{\frac{\omega(x, g_2)}{|\ln x|}}\,\frac{dx}{x}\right)^{r+1} \leqslant$$
$$\leqslant R_m(g_1) + \frac{c_2}{m^{r+1}}\left(\int_0^{\varepsilon} \sqrt[r+1]{\frac{\omega(x)}{|\ln x|}}\,\frac{dx}{x}\right)^{r+1} + \frac{c_3}{m^{r+1}}\,\omega(\varepsilon)\left(\ln\frac{e}{\varepsilon}\right)^r. \tag{23}$$

Согласно лемме 6, $R_m(g_1) = o(m^{-r-1})$ при $m \to \infty$ и фиксированном ε. Кроме того, из (1) следует, что $\omega(\varepsilon) = o(1)(\ln(e/\varepsilon))^{-r}$ при $\varepsilon \to +0$. Итак, из (23) получаем утверждение теоремы 2.

3. Заметим, что теоремы 1 и 2 справедливы и для функций вида $f_1 - f_2$; $f_1, f_2 \in G_r(\omega)$. Поэтому их можно рассматривать как обобщение результата В. А. Попова [2] и результата П. П. Петрушева [5] соответственно.

Чтобы судить о точности теорем 1 и 2 рассмотрим некоторые примеры. При этом для получения оценок снизу понадобится

ЛЕММА 7 [7]. *Пусть* $f \in C\,[0, 1]$ *и* $\{I_l\}_{l=1}^n$ — *попарно непересекающиеся интервалы, принадлежащие* $[0, 1]$. *Тогда при натуральном* r

$$\sum_{l=1}^n \sqrt[r]{R_l(f)} \geqslant c\sum_{l=1}^n \sqrt{E_r(f, I_l)},$$

где $E_r(f, I_l)$ — *наилучшее равномерное приближение* f *на* I_l *полиномами степени не выше* $r - 1$.

Следствие 1. *Пусть* $\psi_\beta(x) = \left(\ln\ln\frac{9}{x}\right)^{-\beta}$, $\beta > 0$. *Тогда для любой* $f \in G_r(\psi_\beta)$

$$R_n(f) = O(n^{-1}\ln^{-\beta} n) \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{24}$$

С другой стороны,

$$R_n(\psi_\beta) \asymp n^{-1}\ln^{-\beta} n \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{25}$$

Доказательство. Соотношение (24) немедленно следует из теоремы 1. Для получения (25) определим точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из условия $\psi_\beta(x_l) = l\,n^{-1}(\ln n)^{-\beta}$ и положим $I_l = (x_l, x_{l+1})$. Тогда для $l = 1, 2, \ldots, n-1$ получим

$$E_2(\psi_\beta, I_l) \geqslant \frac{1}{4}\left[-\psi_\beta(x_l) + 2\psi_\beta\left(\frac{x_l + x_{l+1}}{2}\right) - \psi_\beta(x_{l+1})\right] \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{2}\left[\psi(x_{l+1}) - \psi_\beta\left(\frac{x_{l+1}}{2}\right)\right] + \frac{1}{4}[\psi_\beta(x_{l+1}) - \psi_\beta(x_l)] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{x_{l+1}}{4}\psi_\beta'\left(\frac{x_{l+1}}{2}\right) + \frac{1}{4n(\ln n)^\beta} \geqslant -\frac{\beta}{2n(\ln n)^{\beta+1}} + \frac{1}{4n(\ln n)^\beta}.$$

Согласно лемме 6, при достаточно больших n получим

$$\sum_{l=1}^{n}\sqrt{R_l(\psi_\beta)} \geqslant c_1\sum_{l=1}^{n-1}\sqrt{E_2(\psi_\beta, I_l)} \geqslant c_2\sqrt{n}(\ln n)^{-\beta/2}. \tag{26}$$

Ввиду невозрастания $R_n(\psi_\beta)$ из (24) и (26) получим (25).

Аналогично можно доказать следствие 2 (см. также [7]).

Следствие 2. *Пусть* $\varphi_\alpha(x) = \left(\ln\frac{e}{x}\right)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. *Тогда для любой* $f \in G_r(\varphi_\alpha)$, $r > \alpha$,

$$R_n(f) = O(n^{-1-\alpha}).$$

С другой стороны,

$$R_n(\varphi_\alpha) \asymp n^{-1-\alpha}.$$

Следствие 3. *Если* $f \in G_r(\varphi_r)$, *то*

$$R_n(f) = O((n\ln^{-1}n)^{-r-1}) \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{27}$$

С другой стороны, существует $f_r \in G_r(\varphi_r)$, *такая, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(n\ln^{-1}n)^{r+1}R_n(f_r) > 0. \tag{28}$$

Доказательство. Соотношение (27) немедленно следует из теоремы 1. Для построения функции f_r возьмем последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, n_3, \ldots$, такую, что $n_1 \geqslant 2$ и $\nu_{k+1} > \nu_k + n_k$, $\nu_k = [\sqrt[3]{n_k}]$ [1]). Положим

$$s_k = \left[\sqrt{n_k}\right], \quad \mu_{kj} = [n_k(\nu_k + j)^{-1}\ln^{-1}n_k],$$

$$\xi_{kji} = \mu_{kj}^{-1}e^{-\nu_k - j - 1}(\mu_{kj} - i + ei),$$

где $j = 1 \div s_k$

---

[1]) Через $[a]$ обозначаем целую часть числа a.

и $i = 0 \div \mu_{kj}$. Через $\zeta(x)$ обозначим некоторую не равную тождественно нулю бесконечно дифференцируемую функцию, определенную на всей вещественной оси, с носителем на $[0, 1]$. Введем вспомогательную функцию

$$\theta_r(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n_k}{n_k}\right)^{r+1} \sum_{j=1}^{s_k} \sum_{i=1}^{\mu_{kj}} \zeta\left(\frac{x - \xi_{kj(i-1)}}{\xi_{kji} - \xi_{kj(i-1)}}\right).$$

Ввиду условия $\nu_{k+1} > \nu_k + n_k$ интервалы $I_{kji} = (\xi_{kj(i-1)}, \xi_{kji})$ попарно не пересекаются и для любого $x \in I_{kji}$ имеют место неравенства

$$|\theta_r^{r+1}(x)| \leqslant c_1 ((\nu_k + j)^{-1} e^{\nu_k + j})^{r+1},$$

$$(-1)^r \varphi_r^{(r+1)}(x) \geqslant c_2 ((\nu_k + j)^{-1} e^{\nu_k + j})^{r+1}.$$

Отсюда следует существование положительных чисел a_1, a_2 и a_3, таких, что функция $f_r(x) = (-1)^r a_1 \varphi_r(x) + a_2 \theta_r(x) + a_3 x^{r+1}$ принадлежит классу $G_r(\varphi_r)$. Так как $\mu_{k1} + \mu_{k2} + \ldots + \mu_{ks_k} \asymp n_k$, то, положив $t = r + 2$, из леммы 6 получим

$$\sum_{l=1}^{n_k} (R_l(f_r))^{1/t} \geqslant$$

$$\geqslant c_3 \sum_{j=1}^{s_k} \sum_{i=1}^{\mu_{kj}} ((a_2 E_t(\theta_r, I_{kji}))^{1/t} - (a_1 E_t(\varphi_r, I_{kji}))^{1/t})) \geqslant$$

$$\geqslant c_4 (a_2 E_t(\zeta, [0, 1]) n_k)^{1/t} (\ln n_k)^{1-1/t} - c_5 (a_1 n_k)^{1/t}).$$

Тем самым неравенство (28) доказано.

В дополнение к следствиям 2 и 3 заметим, что А. П. Буланов и А. Хатамов [8, 9] показали, что $R_n(f) = O(n^{-1-\alpha} \ln^2 n)$ для любой $f \in G_1(\varphi_\alpha)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, и что существует функция $f_\alpha \in G_1(\varphi_\alpha)$, для которой $\varlimsup_{n\to\infty} n^{1+\alpha} R_n(f_\alpha) > 0$ при $\alpha < 1$ и $\varlimsup_{n\to\infty} n^2 \ln R_n(f_1) > 0$ при $\alpha = 1$.

Очевидно, из теоремы 1 следуют также результаты П. П. Петрушева [10] о наилучших рациональных приближениях функций класса $G_1(x^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, и функций с выпуклой производной.

Из следствий 1, 2 и 3 получаем, что теорема 1 является точной как в классах $G_r(\psi_\beta)$ и $G_r(\varphi_\alpha)$, $\alpha \leqslant r$, так и для индивидуальных функций из этих классов. Если же $\alpha > r$, то теорема 1 по-прежнему остается точной в классе $G_r(\varphi_\alpha)$. Убедиться в этом можно на примере функций из $V_r[0, 1]$ (см. [5]). Что касается индивидуальных функций, то в этом случае имеет место эффект «o». А именно: из теоремы 2 получаем

Следствие 4. *Если* $f \in G_r(\varphi_\alpha)$, $\alpha > r$, *то* $R_n(f) = o(n^{-r-1})$.

Отметим, что теоремы 1, 2 при $r = 1$ и следствие 1 анонсированны [11]. Доказательство теоремы 1 при $r = 1$ имеется также в [12]. Результат, близкий теореме 1, при любых r анонсирован [13].

4. Пусть $\Pi_n^{(s)}[a, b]$ $(n, s = 1, 2, \ldots)$ — множество функций g, определенных на отрезке $[a, b]$, для каждой из которых существуют точки $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, такие, что g на любом из интервалов (x_i, x_{i+1}) совпадает с некоторым многочленом степени $\leqslant s-1$. Для $f \in C[a, b]$ определим наилучшее кусочно-полиномиальное приближение

$$E_n^{(s)}(f, [a, b]) = \inf \sup |f(x) - g(x)|,$$

где sup берется по всем $x \in [a, b]$, а inf — по $g \in \Pi_n^{(s)}[a, b]$. Для краткости положим $E_n^{(s)}(f, [0, 1]) = E_n^{(s)}(f)$.

Хорошо известно, что рациональные и кусочно-полиномиальные приближения тесно связаны между собой. Например, результат В. А. Попова [2] можно рассматривать как распространение на случай рациональных приближений следующего результата Ю. Н. Субботина и Н. И. Черных [14]: если $f \in V_r[a, b]$, то

$$E_n^{(r+1)}(f, [a, b]) \leqslant cn^{-r-1}(b-a)^r V(f^{(r)}). \tag{29}$$

Далее, для $f \in G_1(x^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, согласно результатам П. П. Петрушева [10] и А. Хатамова [15] имеем соответственно $R_n(f) = O(n^{-2})$ и $E_n^{(2)}(f) = o(n^{-2})$.

Следующие теоремы 3 и 4 являются соответственно аналогами теорем 1 и 2 для кусочно-полиномиальных приближений.

ТЕОРЕМА 3. *Если* $f \in G_r(\omega)$, *то*

$$E_n^{(r+1)}(f) \leqslant \frac{c}{n^{r+1}} \left(\int_{e^{-n}}^{1} \sqrt[r+1]{\frac{\omega(x)}{|\ln x|}} \frac{dx}{x} \right)^{r+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

ТЕОРЕМА 4. *Если* $f \in G_r(\omega)$ *и выполняется условие* (1), *то* $E_n^{(r+2)}(f) = o(n^{-r-1})$.

Доказательство теоремы 3. Пусть функция $g \in G_r(\omega)$ удовлетворяет условиям $g(1) = g'(1) = \ldots = g^{(r-1)}(1) = 0$, $g^{(r)} > 0$, непрерывна и невозрастает на [0, 1]. Для натурального m положим

$$Q = \sum_{k=1}^{m} \sqrt[r+1]{e^{-kr} g^{(r)}(e^{-k})},$$

$$n_j = \left[m \sqrt[r+1]{e^{-rj} g^{(r)}(e^{-j})}/Q\right] + 1,$$

$$I_j = [e^{-j}, e^{-j+1}] \qquad (j = 1, 2, \ldots m),$$

$$I_{m+1} = [0, e^{-m}].$$

Из (29) получим

$$E_{n_j}^{(r+1)}(g, I_j) \leqslant c_1 (Q/m)^{r+1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \quad (30)$$

Очевидно также, что

$$E_m^{(1)}(g, I_{m+1}) \leqslant m^{-1} \omega(e^{-m}). \quad (31)$$

Так как $n_1 + n_2 + \ldots + n_m \leqslant 2m$, то из (30) и (31) получим

$$E_{3m}^{(r+1)}(g) \leqslant c_2 \max \{m^{-1}\omega(e^{-m}), (Q/m)^{r+1}\}.$$

Далее действуем аналогично, как и при доказательстве леммы 3 и теоремы 1. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Оно следует из теорем 2 и 6 [7].

Белорусский государственный
университет им. В. И. Ленина

Поступило
16.04.82

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Пекарский А. А. Рациональные приближения абсолютно непрерывных функций с производной из пространства Орлича.— Мат. сб., 1982, т. 117, № 1, с. 114—130.

[2] Popov V. A. Uniform rational approximation of the classe V_r and its applications.— Acta Math. Acad. Sc. Hung., 1977, t. 29, № 1—2, p. 119—129.

[3] Харди Г., Литтлвуд Дж., Пойа Г. Неравенства.— М.: ИЛ, 1948.

[4] Попов В. А., Петрушев П. П. Точный порядок наилучшего равномерного приближения выпуклых функций рациональными функциями.— Мат. сб., 1977, т. 103, № 2, с. 285—292.

[5] Петрушев П. П. Равномерные рациональные аппроксимации класса V_r. — Мат. сб., 1979, т. 108, № 3, с. 918—932.

[6] Пекарский А. А. Рациональная аппроксимация сингулярных функций.— Изв. АН БССР, Сер. физ.-мат. 1980, № 3, с. 32—40.

[7] Пекарский А. А. Оценки высших производных рациональных функций и приложения.— Изв. АН БССР, Сер. физ.-мат., 1980, № 5, с. 21—28.

[8] Буланов А. П. Приближение выпуклых функций с заданным модулем непрерывности рациональными функциями.— Мат. сб., 1978, т. 105, № 1, с. 3—27.
[9] Bulanov A. P. Hatomov A. On rational approximation of convex functions with a given modulus of continuity.— Analysis Math., 1978, № 4, p. 237—246.
[10] Петрушев П. П. О рациональной аппроксимации функций с выпуклой производной.— Докл. Болг. АН, 1976, т. 29, № 9, с. 1249—1252.
[11] Пекарский А. А. Рациональные приближения абсолютно непрерывных функций с производной из пространства Орлича.— Докл. АН БССР, 1980, т. 24, № 4, с. 301—304.
[12] Пекарский А. А. Рациональная аппроксимация и конструктивные характеристики классов функций: Канд. дис.— Минск, 1980.
[13] Пекарский А. А. О скорости рациональной аппроксимации некоторых классов непрерывных функций.— В кн.: Современные проблемы функций. Баку, 1977, Баку: Азерб. гос. унив., 1980, с. 218—221.
[14] Субботин Ю. Н., Черных Н. И. Порядок наилучших сплайн-приближений некоторых классов функций.— Математические заметки, 1970, т. 7, вып. 1, с. 31—42.
[15] Хатамов А. О сплайн-аппроксимации функций с выпуклой производной.— Докл. АН УзССР, 1980, № 3, с. 4—6.