



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Калашникова, А. В. Нефедьев, Двумерная КХД в кулоновской калибровке, *УФН*, 2002, том 172, номер 4, 377–400

DOI: 10.3367/UFNr.0172.200204a.0377

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.85

19 марта 2025 г., 15:51:32



ОБЗОРЫ АКТУАЛЬНЫХ ПРОБЛЕМ

Двумерная КХД в кулоновской калибровке

Ю.С. Калашникова, А.В. Нефедьев

Обсуждаются различные аспекты модели 'т Хофта для двумерной КХД в пределе бесконечного числа цветов в кулоновской калибровке. Изучаются свойства мезонных возбуждений, причем особое внимание уделяется пиону. Обсуждается двойственная роль пиона, который, будучи настоящим $q\bar{q}$ -состоянием, является также голдстоуновским бозоном двумерной КХД. Демонстрируется, в частности, каким образом удовлетворяются мягкопионные теоремы. Показывается, что при изучении адронных наблюдаемых с участием пионов предлагаемый выбор аксиальной калибровки представляется наиболее уместным.

PACS numbers: 11.10.Kk, 11.15.Pg, 12.38.Aw

Содержание

1. Введение (377).
 2. Гамильтонов подход (379).
 - 2.1. Одетые кварки и массовое уравнение для щели. 2.2. Энергия вакуума. Кирально-симметричный и кирально-несимметричный вакуумы. 2.3. Обобщенное преобразование Боголюбова и составные мезонные состояния. 2.4. Уравнение для связанных состояний и свойства волновых функций мезонов. 2.5. Пионное решение. 2.6. Одночастичный предел и непотенциальная динамика кварков. 2.7. Тяжело-легкая система в модифицированной калибровке Фока – Швингера и лоренцева природа конфайнмента. 2.8. Киральные свойства модели в гамильтоновом подходе.
 3. Матричный подход (390).
 - 3.1. Матричные волновые функции и матричное уравнение для связанных состояний. 3.2. Усеченное гильбертово пространство и проблема эрмитовости. 3.3. Киральные свойства модели в матричном подходе. 3.4. Амплитуда рассеяния кварка на кварке. 3.5. Сохранение векторного и аксиально-векторного токов. Тождества Уорда. 3.6. Пионная вершина.
 4. Сильные распады (396).
 - 4.1. Подавленные слагаемые в гамильтониане. 4.2. Амплитуда распада $A \rightarrow B + C$. 4.3. Условие самосогласованности Адлера.
 5. Заключение (398).
 6. Приложение (399).
- Список литературы (399).

1. Введение

Двумерная квантовая хромодинамика (КХД) в пределе $N_c \rightarrow \infty$ (модель 'т Хофта [1]) впервые рассматривалась в 70-е годы. С тех пор она широко используется как лаборатория для изучения различных аспектов сильных взаимодействий. Теория является относительно простой, так как в двух измерениях нет поперечных глюонов. Более того, в пределе большого числа цветов суммируются только планарные диаграммы (рис. 1) и теория является точно решаемой. Тем не менее — это настоящая релятивистская теория поля, имеющая нетривиальное содержание и во многом напоминающая реалистичский случай четырехмерной КХД. Действительно, в теории

имеет место конфайнмент, и можно явно продемонстрировать существование дискретного спектра связанных кварк-антикварковых состояний;
 обеспечена пуанкаре-инвариантность;
 киральная симметрия спонтанно нарушена;
 голдстоуновский бозон, ответственный за нарушение киральной симметрии, является основным $q\bar{q}$ -состоянием.

Первое утверждение почти тривиально, так как кулоновское взаимодействие является удерживающим в двух измерениях.

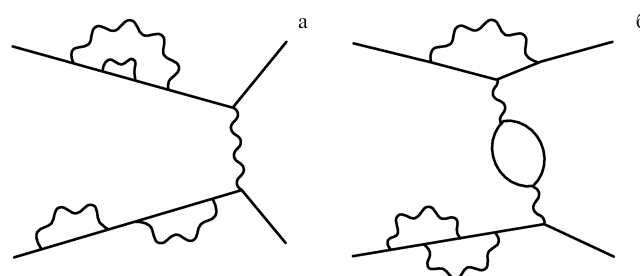


Рис. 1. Планарные (а) и непланарные (б), подавленные по N_c диаграммы.

Ю.С. Калашникова. Институт теоретической и экспериментальной физики, 117218 Москва, Б. Черемушкинская ул. 25, Российская Федерация
 Тел. (095) 129-94-15
 E-mail: yulia@heron.itep.ru

А.В. Нефедьев. Институт теоретической и экспериментальной физики, 117218 Москва, Б. Черемушкинская ул. 25, Российская Федерация
 Centro de Física das Interações Fundamentais (CFIF), Departamento de Física, Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, P-1049-001 Lisboa, Portugal

Статья поступила 10 июля 2001 г., после доработки 5 ноября 2001 г.

Второе утверждение чрезвычайно важно для спектроскопии адронов. В работе [2] показано, что если неабелева теория проквантована в явно нековариантной калибровке, то необходимо специальным образом заботиться о лоренцевой инвариантности. Оказывается, квантовая алгебра Пуанкаре замыкается только в синглетном по цвету секторе. Это означает, что спектр можно вычислить в произвольной системе отсчета, включая, например, систему центра масс или систему бесконечного импульса.

Исторически исследование вопросов, связанных с киральной симметрией, протекало несколько противоречивым образом. Первоначальное изучение двумерной КХД проводилось в калибровке светового конуса. За пионерской работой [1] последовало детальное изучение спектров и волновых функций мезонов, а также их взаимодействий [3, 4]. Несколько позже был предложен альтернативный подход, основанный на кулоновской калибровке $A_1 = 0$ [2]. Достоинством квантования на световом конусе является существенное упрощение вычислений спектра, однако непосредственный анализ приводит к пертурбативному вакууму. Более технически изощренная версия, предложенная в работе [2], дает нетривиальный вакуум: оказывается, для безмассовых кварков существует ненулевой кварковый конденсат [5]. Это подтверждено вычислениями в рамках правил сумм на световом конусе [6, 7].

На адронном уровне очевидные расхождения связаны с особенностями формы волновой функции пиона вблизи кирального предела в калибровке светового фронта (это обсуждалось в работе [6] и демонстрируется ниже). Именно вследствие этого факта для изучения структуры вакуума и получения разумных результатов в физике пионов необходимо использовать правила сумм и операторное разложение [6]. Напротив, выбор кулоновской калибровки не приводит к сильным сингулярностям и позволяет рассматривать пион на тех же основаниях, что и остальные мезоны. Концептуальные трудности, связанные с квантованием на световом конусе, были преодолены с помощью формулировки в конечных интервалах в работе [8], где продемонстрирована явная эквивалентность двух версий и прояснена взаимосвязь квантования на световом конусе и в лабораторном времени.

С тех пор в двумерной КХД выполнено много вычислений с использованием калибровки светового конуса. Среди обсуждаемых вопросов были общие свойства операторного разложения [6, 9] и дуальности [10]. В рамках так называемого дискретного квантования на световом конусе вычислены спектры вне предела $N_c \rightarrow \infty$ [11]. Отдельным интересным предметом изучения является двумерная КХД с фермионами в присоединенном представлении [12]. В настоящем обзоре мы рассматриваем свойства вакуума и низколежащих мезонных состояний, построенных из легких кварков, в кулоновской калибровке, причем специальное внимание уделяется киральным аспектам теории.

Квантование на световом конусе позволяет установить очевидную связь с динамикой партонной модели, тогда как квантование на гиперповерхности лабораторного времени является естественным для другой важной области феноменологии — конституентной кварковой модели. Действительно, спектр двумерной КХД дискретен, предел $N_c \rightarrow \infty$ подавляет рождение дополнительных кварковых пар, так что модель 'т Хофта есть не что

иное, как конституентная кварковая модель, точно следующая из нетривиальной релятивистской квантовой теории поля.

Обычно в конституентных кварковых моделях конфайнмент моделируется потенциальными силами. Основные черты спектров и распадов легких кваркоניים описываются в таких подходах удивительно хорошо, за исключением случаев с пионами. Так как нарушение киральной симметрии (НКС) не может быть включено в конституентную картину, то нет никакой надежды на описание пиона как голдстоуновского бозона и, следовательно, мягкопионные теоремы не могут быть удовлетворены в рамках наивной кварковой модели.

Нарушение киральной симметрии связано с наиболее общими соображениями симметрии и не имеет отношения к какому-либо конкретному механизму конфайнмента. Одним из возможных способов включения мягких пионов в кварковую модель является одновременное рассмотрение кварков и пионов, как это делается в киральных кварковых моделях (см., например, [13] и приведенные там ссылки). Тем не менее имеется ряд вычислений на решетке [14], показывающих, что конфайнмент и нарушение киральной симметрии присутствуют в удерживающей фазе и одновременно исчезают выше температуры деконфайнмента, так что существует некая динамическая связь обоих явлений.

Предложенная в работе [15] модель связывает конфайнмент и нарушение киральной симметрии (см. также [16], где развиваются аналогичные идеи). Основной составляющей этой модели является мгновенное удерживающее взаимодействие в форме трехмерного осциляторного потенциала. Подобное взаимодействие не следует из КХД; кроме того, в этом подходе отсутствуют калибровочная и лоренцева инвариантности. Важный шаг сделан в работе [17], где вакуум КХД параметризовался с помощью набора калибровочно- и лоренц-инвариантных непертурбативных глюонных корреляторов, ответственных как за асимптотику закона площадей, так и за образование кирального конденсата. Кварковая модель, следующая из подобного подхода, должна, кроме всего прочего, быть способной воспроизвести свойства пиона. В этом отношении представляется весьма перспективным изучение точно решаемой теории с конфайнментом и нарушением киральной симметрии. Модель 'т Хофта является прекрасной лабораторией для таких исследований.

Прежде всего, отметим, что предел больших N_c существен для установления киральных свойств КХД [18]. Теорема Коулмена [19] запрещает нарушение киральной симметрии для любого конечного числа степеней свободы в двумерной теории. Это означает, что нельзя менять местами пределы $N_c \rightarrow \infty$ и $m_q \rightarrow 0$. Теореме Коулмена не противоречит рассмотрение режима слабой связи, в котором $m_q \gg g \sim 1/\sqrt{N_c}$, т.е. сначала берется предел бесконечного числа цветов (см. работу [6], где подробно обсуждается эта проблема, а также фаза теории, соответствующая режиму сильной связи, когда $m_q \ll g$).

Теория задается лагранжианом

$$L(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) + \bar{q}(x)(i\hat{D} - m)q(x), \quad (1.1)$$

$$\hat{D} = (\partial_\mu - ig A_\mu^a t^a) \gamma_\mu.$$

Предел больших N_c предполагает, что

$$\gamma = \frac{g^2 N_c}{4\pi} \xrightarrow{N_c \rightarrow \infty} \text{const.} \quad (1.2)$$

При этом γ -матрицы определяются следующим образом:

$$\gamma_0 \equiv \beta = \sigma_3, \quad \gamma_1 = i\sigma_2, \quad \gamma_5 \equiv \alpha = \gamma_0 \gamma_1 = \sigma_1. \quad (1.3)$$

Теория калибруется условием

$$A_1(x_0, x) = 0, \quad (1.4)$$

так что единственный нетривиальный коррелятор глюонных полей — глюонный пропагатор — имеет вид

$$D_{01}^{ab}(x_0 - y_0, x - y) = D_{11}^{ab}(x_0 - y_0, x - y) = 0, \\ D_{00}^{ab}(x_0 - y_0, x - y) = -\frac{i}{2} \delta^{ab} |x - y| \delta(x_0 - y_0). \quad (1.5)$$

Инфракрасная особенность регуляризуется с помощью прескрипции главного значения, т.е. с помощью соответствующего числа вычитаний. Например,

$$\int \frac{dk}{(p-k)^2} F(k) \rightarrow \int \frac{dk}{(p-k)^2} F(k) = \\ = \int \frac{dk}{(p-k)^2} [F(k) - F(p) - F'(p)(k-p) - \dots], \quad (1.6)$$

что обеспечивает линейный конфайнмент для межкваркового взаимодействия, переносимого двумерным глюоном.

Обзор организован следующим образом. В разделе 2 развивается гамильтонов подход для двумерной КХД в кулоновской калибровке. В пределе больших N_c проводится явная бозонизация модели (для построения составных операторов, рождающих и уничтожающих мезоны, используется обобщенное преобразование Боголюбова–Валатена), определяется волновая функция пиона, обсуждаются киральные свойства теории. В разделе 3 излагается матричный формализм, позволяющий получить матричное уравнение для связанных состояний, причем особое внимание уделяется проблеме усеченного гильбертова пространства и эрмитовости, проясняется роль возвратного движения $q\bar{q}$ -пары в мезоне, обсуждаются сохранение токов и тождества Уорда, а также пионная вершина. В разделе 4 рассматриваются сильные адронные распады, проверяются низкоэнергетические теоремы, включая условие самосогласованности Адлера. Раздел 5 содержит заключительные замечания.

2. Гамильтонов подход

Как известно [1], физическими степенями свободы двумерной КХД в режиме слабой связи являются $q\bar{q}$ -мезоны. Естественно переформулировать модель в терминах составных мезонных состояний, вводя непertурбативный вакуум и операторы рождения и уничтожения мезонов как возбуждений над этим вакуумом. Наиболее удобным для данной задачи является гамильтонов подход к модели, который мы развиваем в данном разделе¹.

¹ Гамильтонов подход к двумерной КХД в калибровке светового конуса изложен в работах [20].

Заметим, что это возможно благодаря мгновенному взаимодействию, описываемому выражением (1.5).

Раздел организован следующим образом. В разделе 2.1 рассматривается гамильтониан модели в аксиальной калибровке, согласно работе [2] вводятся поля одетых кварков и получается уравнение для щели, известное как массовое уравнение для щели, обсуждается численное решение этого уравнения, найденное в работе [5]. Раздел 2.2 посвящен исследованию энергии вакуума и идентификации кирально-симметричного и несимметричного вакуумов. В разделе 2.3 вводятся двухчастичные операторы и производится обобщенное преобразование Боголюбова, диагонализующее гамильтониан модели в мезонном секторе. В разделе 2.4 обсуждаются свойства и решения уравнения для связанных состояний, возникающего как следствие второго преобразования Боголюбова. В разделе 2.5 находится аналитически и исследуется особое решение уравнения для связанных состояний — безмассовый киральный пион. Вопросы, связанные с локальностью и лоренцевой природой взаимодействия конфайнмента в двумерной КХД, рассматриваются в разделах 2.6 и 2.7. В разделе 2.8 мы вновь обращаемся к киральным свойствам модели.

2.1. Одетые кварки и массовое уравнение для щели

Следуя стандартной процедуре, из лагранжиана (1.1) можно получить гамильтониан теории в виде

$$H = \int dx q^+(t, x) \left(-i\gamma_5 \frac{\partial}{\partial x} + m\gamma_0 \right) q(t, x) - \\ - \frac{g^2}{2} \iint dx dy q^+(t, x) t^a q(t, x) q^+(t, y) t^a q(t, y) \frac{|x-y|}{2}. \quad (2.1)$$

В гамильтониан (2.1) входит только четырехкварковое взаимодействие, что отражает факт, уже упомянутый в разделе 1: единственным нетривиальным глюонным коррелятором является глюонный пропагатор (1.5).

В четырехмерной КХД, обладающей значительно более сложной структурой вакуума, возникли бы корреляторы всех порядков, что привело бы к появлению бесконечного числа членов в гамильтониане, соответствующих четырехкварковому, шестикварковому и т.д. взаимодействиям. Между тем представляется разумным оборвать гамильтониан четырехмерной КХД на четырехкварковом уровне, что соответствует биллокальному приближению, в рамках которого остается только коррелятор² $\langle AA \rangle$. Заинтересованный читатель может ознакомиться с деталями данного подхода в обзоре [22].

Одетое кварковое поле $q(x)$ в гамильтониане (2.1) определено следующим образом [2]:

$$q_{zi}(t, x) = \int \frac{dk}{2\pi} \exp(ikx) [b_z(k, t) u_i(k) + d_z^+(-k, t) v_i(-k)], \quad (2.2)$$

$$b_z(t, k) |0\rangle = d_z(t, -k) |0\rangle = 0, \quad b_z^+(t, k) |0\rangle = |q\rangle,$$

$$d_z^+(t, -k) |0\rangle = |\bar{q}\rangle, \quad (2.3)$$

² Здесь речь идет о неприводимых средних (кумулянтах), которые определяются как $\langle\langle O \rangle\rangle = \langle O \rangle$, $\langle\langle O_1 O_2 \rangle\rangle = \langle O_1 O_2 \rangle - \langle O_1 \rangle \langle O_2 \rangle$ и т.д. [21]. Благодаря лоренцевой и калибровочной инвариантности вакуума КХД $\langle A_\mu^a \rangle = 0$ и, следовательно, $\langle\langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle\rangle = \langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle$.

$$\{b_x(t, p) b_\beta^+(t, q)\} = \{d_x(t, -p) d_\beta^+(t, -q)\} = 2\pi \delta(p - q) \delta_{x\beta}, \quad (2.4)$$

$$u(k) = T(k) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v(-k) = T(k) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$T(k) = \exp \left[-\frac{1}{2} \theta(k) \gamma_1 \right]. \quad (2.5)$$

Здесь θ играет роль угла Боголюбова–Валатена, греческие и латинские символы обозначают цветовые и спинорные индексы соответственно. Сильное взаимодействие между кварками предполагает, что истинное вакуумное состояние описывается нетривиальным углом θ , тогда как возбуждения над ним приносят положительный вклад в энергию.

В дальнейшем мы будем опускать явную зависимость операторов от времени. Она может быть восстановлена на любом промежуточном этапе, например,

$$b_x(t, p) = b_x(p) \exp[-iE(p)t],$$

$$d_x(t, -p) = d_x(-p) \exp[iE(p)t], \quad (2.6)$$

где $E(p)$ представляет собой закон дисперсии одетого кварка (он определяется ниже).

Гамильтониан (2.1), нормально упорядоченный в базисе (2.3), можно разбить на три части:

$$H = LN_c \mathcal{E}_v + :H_2: + :H_4:. \quad (2.7)$$

В гамильтониане (2.7) L — одномерный объем пространства,

$$\mathcal{E}_v = \int \frac{dp}{2\pi} \text{Tr} \left\{ (\gamma_5 p + m\gamma_0) A_-(p) + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma}{4\pi} \int \frac{dk}{(p-k)^2} A_+(k) A_-(p) \right\} \quad (2.8)$$

— плотность энергии вакуума, слагаемое

$$:H_2: = \int dx :q_i^+(x) \left(-i\gamma_5 \frac{\partial}{\partial x} + m\gamma_0 \right) q_i(x): -$$

$$- \frac{\gamma}{2} \int dx dy \frac{|x-y|}{2} \int dk :q_i^+(x) \times$$

$$\times [A_+(k) - A_-(k)] q_i(y): \exp[ik(x-y)] \quad (2.9)$$

квадратично по кварковым операторам, тогда как слагаемое $:H_4:$ содержит четыре таких оператора:

$$:H_4: = -\frac{g^2}{2} \int dx dy :q^+(x) t^a q(x) q^+(y) t^a q(y): \frac{|x-y|}{2}. \quad (2.10)$$

Для удобства мы ввели проекторы на положительно- и отрицательно-частотные составляющие:

$$A_\pm(p) = T(p) \frac{1 \pm \gamma_0}{2} T^+(p). \quad (2.11)$$

Прокомментируем роль, которую играют различные части гамильтониана (2.7). Первое слагаемое определяет энергию вакуума, которую необходимо минимизировать. Слагаемое $:H_2:$ описывает одевание кварков, так

что вместо минимизации энергии вакуума \mathcal{E}_v можно потребовать, чтобы слагаемое $:H_2:$ было диагонально в терминах операторов, рождающих и уничтожающих кварки, или (что то же самое) чтобы отсутствовало аномальное боголюбовское слагаемое.

Вне зависимости от того, какой способ используется, уравнения для угла Боголюбова–Валатена $\theta(p)$ и закона дисперсии одетых кварков имеют вид [2]

$$E(p) \cos \theta(p) = m + \frac{\gamma}{2} \int \frac{dk}{(p-k)^2} \cos \theta(k), \quad (2.12)$$

$$E(p) \sin \theta(p) = p + \frac{\gamma}{2} \int \frac{dk}{(p-k)^2} \sin \theta(k),$$

что можно переписать в форме уравнения для угла $\theta(p)$:

$$p \cos \theta(p) - m \sin \theta(p) = \frac{\gamma}{2} \int \frac{dk}{(p-k)^2} \sin [\theta(p) - \theta(k)]. \quad (2.13)$$

Если решение для угла $\theta(p)$ известно, то закон дисперсии одетого кварка $E(p)$ можно найти из соотношения

$$E(p) = m \cos \theta(p) + p \sin \theta(p) +$$

$$+ \frac{\gamma}{2} \int \frac{dk}{(p-k)^2} \cos [\theta(p) - \theta(k)]. \quad (2.14)$$

Уравнение для щели (2.13) является предметом численного исследования. Результаты для функций $\theta(p)$ и $E(p)$, полученные в работе [5], приведены на рис. 2.

Отметим несколько важных свойств функций $\theta(p)$ и $E(p)$:

1) функция $\theta(p)$ нечетна, тогда как функция $E(p)$ четна:

$$\theta(-p) = -\theta(p), \quad E(-p) = E(p); \quad (2.15)$$

2) решение для угла $\theta(p)$ остается нетривиальным даже в киральном пределе $m = 0$, так же как и решение для закона дисперсии $E(p)$;

3) функция $E(p)$ не является положительно-определенной, как можно было бы ожидать.

Формально причина, приводящая к свойству 3), происходит из прескрипции регуляризации (1.6), которая определяет способ вычитания бесконечной собственной энергетической постоянной. Таким образом, расходящийся интеграл от положительно-определенной функции может стать отрицательным после должным образом выполненной регуляризации. Легко убедиться, что

$$\theta(p \rightarrow 0) \sim p, \quad \theta'(0) > 0, \quad (2.16)$$

$$E(0) = m + \frac{\gamma}{2} \int \frac{dk}{k^2} \cos \theta(k) =$$

$$= m - \frac{\gamma}{2} \int_0^\infty \frac{dk}{k^2} \sin^2 \frac{\theta(k)}{2} \approx m - \frac{\pi\gamma}{8} \theta'(0), \quad (2.17)$$

так что функция $E(0)$ становится отрицательной при массе кварка, меньшей некоторого критического значения m_c .

Последнее обстоятельство не приводит к катастрофе, так как в соответствии с результатами работы [2] только синглетный сектор теории является лоренц-ковариантным, тогда как кварковый сектор таковым не является и,

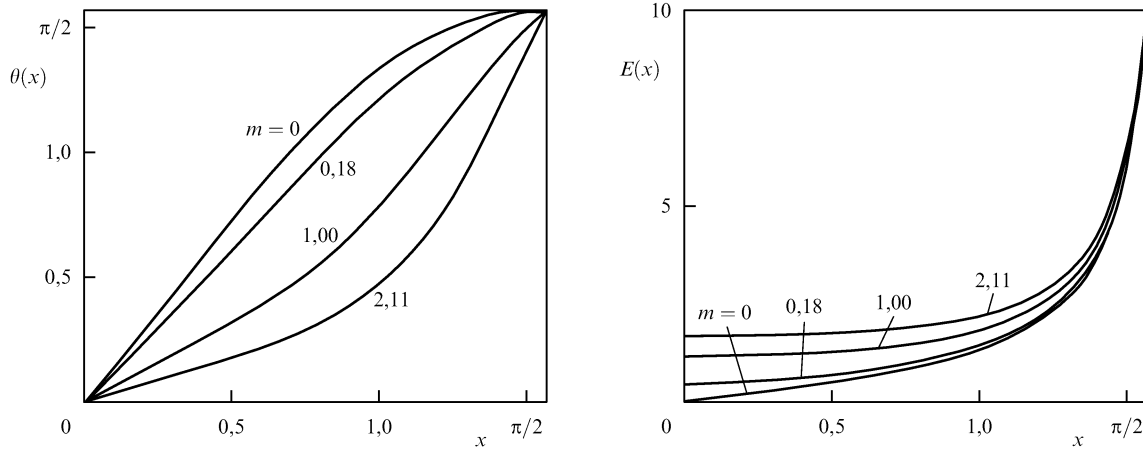


Рис. 2. Численные решения для угла Боголюбова–Валатена $\theta(p)$ и закона дисперсии одетых кварков $E(p)$ при различных массах кварков [5]. Переменная x определяется заменой $p = \tan x$, все размерные величины даны в соответствующих единицах $(2\gamma)^{1/2}$.

следовательно, может и не быть лоренц-ковариантным. Тем не менее следует проявлять особую осторожность, обращая внимание на знак произведения функции $E(p)$ и бесконечно малой положительной величины ε при сдвиге полюса в кварковом пропагаторе [2].

Отметим, что в работе [2] найдено простое аналитическое решение уравнения для щели (2.13) в киральном пределе, имеющее вид³

$$\theta(p) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} p, \quad E(p) = |p| - P \frac{\gamma}{|p|}, \quad (2.18)$$

где символ P означает главное значение. Из выражения (2.18) ясно видно, что для этого решения функция $E(p)$ также не является положительно-определенной.

Два решения уравнения для щели в киральном пределе — заданное выражением (2.18) и изображенное на рис. 2 — определяют две различные фазы теории. Киральная симметрия нарушается только во втором случае, тогда как в первом она остается ненарушенной.

В работе [23] показано, что аналитическое решение (2.18) обладает бесконечной энергией по сравнению с численным кирально-несимметричным, изображенным на рис. 2. Таким образом, киральная симметрия никогда не восстанавливается в модели 'т Хофта и имеется только одна фаза теории со спонтанно нарушенной киральной симметрией. Следовательно, решение (2.18) не является физическим. Мы все же предпочитаем удерживать его для демонстрации различных утверждений касательно киральных свойств модели. В разделе 2.2 мы обсудим этот вопрос более подробно.

Выполнив все необходимые вычисления с упомянутыми выше предосторожностями, можно получить гамильтониан модели, который является диагональным в базисе одетых кварков. Вклад слагаемого H_4 : гамильтониана (2.7) подавлен дополнительным множителем $1/\sqrt{N_c}$, так что в одночастичном секторе теории им

можно пренебречь:

$$:H:= LN_c \mathcal{E}_v + \int \frac{dk}{2\pi} E(k) [b_z^+(k) b_z(k) + d_z^+(-k) d_z(-k)]. \quad (2.19)$$

Заметим, что результат (2.19) сам по себе не имеет практической ценности, так как он связан с калибровочно- и лоренц-неинвариантным сектором. Наиболее важным результатом данного раздела являются уравнение для щели (2.13) и его численное решение, представленное на рис. 2; именно эти результаты интенсивно используют в дальнейшем.

2.2. Энергия вакуума. Кирально-симметричный и кирально-несимметричный вакуумы

Вернемся теперь к уравнению для щели (2.13) и обсудим альтернативный способ его получения, а именно с помощью минимизации энергии вакуума (2.8) [23]. Рассмотрим случай безмассовых кварков ($m = 0$).

Удобно ввести избыток плотности энергии вакуума в теории со взаимодействием по сравнению со свободной теорией:

$$\Delta \mathcal{E}_v[\theta] = \mathcal{E}_v[\theta] - \mathcal{E}_v[\theta_{\text{free}}] = - \int \frac{dp}{2\pi} [p \sin \theta(p) - |p|] - \frac{\gamma}{4\pi} \int \frac{dp dk}{(p-k)^2} \cos [\theta(p) - \theta(k)], \quad (2.20)$$

где $\theta_{\text{free}}(p) = (\pi/2) \operatorname{sgn} p$ соответствует свободной ($\gamma = 0$) безмассовой теории. Уравнение для щели, следующее из процедуры минимизации

$$\frac{\delta}{\delta \theta(p)} \Delta \mathcal{E}_v[\theta] = 0, \quad (2.21)$$

немедленно воспроизводит уравнение (2.13).

Чтобы убедиться в том, что уравнение (2.13) действительно минимизирует энергию вакуума, мы используем следующий подход [23]. Пусть $\theta(p)$ есть решение уравнения (2.21), соответствующее минимуму $\Delta \mathcal{E}_v$. Тогда функция $\theta(p/A)$, "растянутая" с произвольным параметром A , должна увеличить энергию (2.20). Наивный размерный анализ демонстрирует, что энергия вакуума

³ На самом деле любая нечетная функция $\theta(p)$ с произвольным числом скачков от $\pi/2$ до $-\pi/2$ и обратно также удовлетворяет уравнению для щели (2.13) [2]. Тем не менее решения такого типа не приводят к свободной теории, когда γ стремится к нулю, и не обсуждаются в дальнейшем.

$\Delta\mathcal{E}_v$ меняется с масштабным параметром A , как

$$\Delta\mathcal{E}_v = \frac{1}{2} C_1 A^2 - \gamma C_2, \quad (2.22)$$

где $C_{1,2}$ — положительные постоянные. Тогда стабильное решение задается величиной A_0 , минимизирующей энергию (2.22), т.е. $A_0 = 0$, что соответствует либо свободной безмассовой теории, дающей $\Delta\mathcal{E}_v = 0$, либо аналитическому решению (2.18). Оба решения соответствуют ненарушенной киральной симметрии. Таким образом, можно прийти к обескураживающему выводу о том, что нетривиального кирально-несимметричного решения уравнения для щели (2.13) не существует.

В то же время наивный анализ, выполненный выше, полностью игнорирует тот факт, что энергия вакуума (2.20) содержит логарифмическую расходимость в инфракрасной области во втором слагаемом. Вводя параметр обрезания и повторяя те же самые шаги, можно заключить, что правильная зависимость энергии вакуума от масштабного параметра A есть

$$\Delta\mathcal{E}_v = \frac{1}{2} C_1 A^2 - \gamma C_2 \ln A + \gamma C_3 \quad (2.23)$$

вместо наивного выражения (2.22). Постоянная C_3 пропорциональна логарифму обрезания и может быть устранена бесконечной перенормировкой.

Заметим, что второе слагаемое в (2.20) не может быть сделано сходящимся одновременно и в инфракрасной, и в ультрафиолетовой областях. Действительно, можно устранить инфракрасную расходимость в (2.20), вычитая энергию, соответствующую решению (2.18), вместо свободной. Тогда получившийся интеграл оказывается логарифмически расходящимся в ультрафиолетовой области и приводит к тому же самому соотношению (2.23), но с бесконечной постоянной C_3 , содержащей логарифм ультрафиолетового обрезания.

Функция (2.23) всегда имеет минимум при

$$A_0 = \sqrt{\gamma \frac{C_2}{C_1}}, \quad (2.24)$$

который соответствует нетривиальному решению уравнения для щели, найденному численно в работе [5] и изображенному на рис. 2. В то же время из вида функции (2.23) можно наблюдать логарифмический рост энергии при приближении к решению (2.18), которое, как обсуждалось ранее, соответствует случаю $A_0 = 0$.

Таким образом, можно прийти к уже упомянутому выше выводу, что энергия вакуума, соответствующая кирально-симметричному решению (2.18), бесконечна по сравнению с энергией кирально-несимметричного решения⁴, представленного на рис. 2. Следовательно, в модели 'т Хофта невозможен фазовый переход, соответствующий восстановлению киральной симметрии.

Поучительно отметить, что сам факт существования нетривиального кирально-несимметричного решения уравнения для щели (2.13) есть еще одно следствие упомянутого выше инфракрасного поведения модели

'т Хофта. Действительно, уравнение для щели (2.13) было получено в пренебрежении всеми эффектами поляризации вакуума фермионов (фермионные операторы рождения и уничтожения, введенные в формуле (2.3), соответствуют так называемому приближению БКШ). В то же время киральная симметрия может быть спонтанно нарушена и в других двумерных моделях, таких как модель Гросса–Неве [24, 25]. Однако для того чтобы получить ненулевой киральный конденсат, необходимо выйти за рамки приближения БКШ, суммируя фермионные петли, тогда как уравнение, подобное (2.13), имеет только тривиальное кирально-симметричное решение, дающее $\langle \bar{q}q \rangle = 0$.

2.3. Обобщенное преобразование Боголюбова и составные мезонные состояния

В разделе 2.2 рассмотрены два первых слагаемых гамильтониана (2.7). Обратимся теперь к слагаемому H_4 . Если в это слагаемое подставить решение для одетых кварков, то оно будет описывать взаимодействие между ними, приводящее к образованию связанных $q\bar{q}$ -состояний — мезонов. В этом разделе мы диагонализуем гамильтониан (2.7) в синглетном по цвету мезонном секторе теории. С этой целью мы введем составные операторы, которые действуют на бесцветные пары кварков и антикварков [8, 26]

$$\begin{aligned} B(p, p') &= \frac{1}{\sqrt{N_c}} b_x^+(p) b_x(p'), \\ D(p, p') &= \frac{1}{\sqrt{N_c}} d_x^+(-p) d_x(-p'), \\ M(p, p') &= \frac{1}{\sqrt{N_c}} d_x(-p) b_x(p'), \\ M^+(p, p') &= \frac{1}{\sqrt{N_c}} b_x^+(p') d_x^+(-p) \end{aligned} \quad (2.25)$$

с коммутационными соотношениями

$$\begin{aligned} [M(p, p') M^+(q, q')] &= (2\pi)^2 \delta(p' - q') \delta(p - q) - \\ &\quad - \frac{2\pi}{\sqrt{N_c}} \{D(q, p) \delta(p' - q') + B(q', p') \delta(p - q)\} \xrightarrow{N_c \rightarrow \infty} \\ &\quad \xrightarrow{N_c \rightarrow \infty} (2\pi)^2 \delta(p' - q') \delta(p - q), \\ [B(p, p') B(q, q')] &= \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{N_c}} \{B(p, q') \delta(p' - q) - B(q, p') \delta(p - q')\} \xrightarrow{N_c \rightarrow \infty} 0, \\ [D(p, p') D(q, q')] &= \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{N_c}} \{D(p, q') \delta(p' - q) - D(q, p') \delta(p - q')\} \xrightarrow{N_c \rightarrow \infty} 0, \\ [B(p, p') M(q, q')] &= -\frac{2\pi}{\sqrt{N_c}} M(q, p') \delta(p - q') \xrightarrow{N_c \rightarrow \infty} 0, \\ [B(p, p') M^+(q, q')] &= \frac{2\pi}{\sqrt{N_c}} M^+(q, p) \delta(p' - q') \xrightarrow{N_c \rightarrow \infty} 0, \\ [D(p, p') M(q, q')] &= -\frac{2\pi}{\sqrt{N_c}} M(p', q') \delta(p - q) \xrightarrow{N_c \rightarrow \infty} 0, \\ [D(p, p') M^+(q, q')] &= \frac{2\pi}{\sqrt{N_c}} M^+(p, q') \delta(p' - q) \xrightarrow{N_c \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

⁴ Так как логарифмически расходящееся слагаемое в (2.23) пропорционально константе связи γ , то проблемы со свободным пределом теории (который также соответствует случаю $A_0 = 0$) не возникает. Действительно, когда γ стремится к нулю, логарифмическое слагаемое в (2.23) исчезает, так что в соответствии с определением (2.20) энергия вакуума в свободной теории равна нулю.

В терминах новых операторов гамильтониан (2.7) принимает вид

$$\begin{aligned}
H = & LN_c \mathcal{E}_v + \sqrt{N_c} \int \frac{dk}{2\pi} E(k) \{B(k, k) + D(k, k)\} - \\
& - \frac{\gamma}{2} \int \frac{dp dk dQ}{(2\pi)^2 (p-k)^2} \left[2 \cos \frac{\theta(p) - \theta(k)}{2} \sin \frac{\theta(Q-p) - \theta(Q-k)}{2} \times \right. \\
& \times \{M^+(p, p-Q) D(k-Q, k) + M^+(p-Q, p) B(k-Q, k) - \\
& - B(p, p-Q) M(k-Q, k) - D(p, p-Q) M(k, k-Q)\} + \\
& + \cos \frac{\theta(p) - \theta(k)}{2} \cos \frac{\theta(Q-p) - \theta(Q-k)}{2} \times \\
& \times \{B(p-Q, p) B(k, k-Q) + D(p, p-Q) D(k-Q, k) + \\
& + M^+(p-Q, p) M(k-Q, k) + M^+(p, p-Q) M(k, k-Q)\} + \\
& + \sin \frac{\theta(p) - \theta(k)}{2} \sin \frac{\theta(Q-p) - \theta(Q-k)}{2} \times \\
& \times \{B(p, p-Q) D(k, k-Q) + B(p-Q, p) D(k-Q, k) + \\
& + M(p, p-Q) M(k-Q, k) + M^+(p-Q, p) M^+(k, k-Q)\} \left. \right], \quad (2.27)
\end{aligned}$$

слагаемые $:H_2:$ и $:H_4:$ в гамильтониане (2.27) должны быть одного порядка по N_c и, следовательно, вносить одинаковый вклад в отличие от одночастичного сектора теории, где слагаемое $:H_4:$ было подавлено, как $1/\sqrt{N_c}$.

Решающий шаг, который необходимо теперь сделать, состоит в том, чтобы заметить, что в мезонном секторе теории нельзя рожать и уничтожать изолированные кварки и антикварки. Возникать могут только бесцветные $q\bar{q}$ -пары, так что, рождая кварк, мы должны рожать и сопровождающий его антикварк. И наоборот, на каждый рождаемый антикварк мы должны иметь дополнительный кварк. Следовательно, операторы (2.25) не могут быть независимыми. Действительно, легко проверить, что подстановка

$$\begin{aligned}
B(p, p') &= \frac{1}{\sqrt{N_c}} \int \frac{dq''}{2\pi} M^+(q'', p) M(q'', p'), \\
D(p, p') &= \frac{1}{\sqrt{N_c}} \int \frac{dq''}{2\pi} M^+(p, q'') M(p', q'') \quad (2.28)
\end{aligned}$$

удовлетворяет коммутационным соотношениям (2.26).

Теперь можно пренебречь рядом слагаемых в гамильтониане (2.27) и получить упрощенное выражение:

$$\begin{aligned}
H = & LN_c \mathcal{E}_v + \int \frac{dQ dp}{(2\pi)^2} \{ [E(p) + E(Q-p)] \times \\
& \times M^+(p-Q, p) M(p-Q, p) - \frac{\gamma}{2} \int \frac{dk}{(p-k)^2} \times \\
& \times [2C(p, k, Q) M^+(p-Q, p) M(k-Q, k) + \\
& + S(p, k, Q) (M(p, p-Q) M(k-Q, k) + \\
& + M^+(p, p-Q) M^+(k-Q, k)) \} \}. \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Здесь функции

$$C(p, k, Q) = \cos \frac{\theta(p) - \theta(k)}{2} \cos \frac{\theta(Q-p) - \theta(Q-k)}{2}, \quad (2.30)$$

$$S(p, k, Q) = \sin \frac{\theta(p) - \theta(k)}{2} \sin \frac{\theta(Q-p) - \theta(Q-k)}{2}.$$

Операторы M^+ и M рождают и уничтожают кварк-антикварковые пары, которые не являются мезонами, так как гамильтониан (2.29) не диагонален в терминах этих операторов. Символически операторная структура гамильтониана (2.29), имеющая вид

$$H \sim H_0 + AM^+M + \frac{1}{2} B(M^+M^+ + MM), \quad (2.31)$$

напоминает структуру, возникающую в теории бозе-газа со взаимодействием. Последнее слагаемое в правой части выражения (2.31) описывает взаимодействие между частицами и приводит к появлению квазичастиц, диагонализующих гамильтониан.

Таким образом, гамильтониан (2.29) следует подвергнуть еще одному преобразованию Боголюбова. Так как операторы M^+ и M подчиняются статистике Бозе, ожидаемый вид преобразования есть

$$\begin{aligned}
m &= uM + vM^+, \\
m^+ &= uM^+ + vM \quad (2.32)
\end{aligned}$$

с функциями u и v , для которых выполняется стандартное бозонное условие

$$u^2 - v^2 = 1. \quad (2.33)$$

Чтобы учесть нелокальность рассматриваемых объектов, обобщим преобразования (2.32) и (2.33) [26]:

$$m_n^+ = \int \frac{dq}{2\pi} \{ M^+(q-Q, q) \varphi_+^n(q, Q) + M(q, q-Q) \varphi_-^n(q, Q) \}, \quad (2.34)$$

$$m_n = \int \frac{dq}{2\pi} \{ M(q-Q, q) \varphi_+^n(q, Q) + M^+(q, q-Q) \varphi_-^n(q, Q) \},$$

$$M(p-P, p) = \sum_{n>0} \{ m_n(P) \varphi_+^n(p, P) - m_n^+(P) \varphi_-^n(p, P) \}, \quad (2.35)$$

$$M(p-P, p)^+ = \sum_{n>0} \{ m_n^+(P) \varphi_+^n(p, P) - m_n(P) \varphi_-^n(p, P) \}.$$

Функции φ_{\pm} подобны боголюбовским функциям u и v ; поэтому неудивительно, что они подчиняются условиям ортонормированности и полноты, являющимся обобщением (2.33):

$$\int \frac{dp}{2\pi} [\varphi_+^m(p, Q) \varphi_+^n(p, Q) - \varphi_-^m(p, Q) \varphi_-^n(p, Q)] = \delta_{nm}, \quad (2.36)$$

$$\int \frac{dp}{2\pi} [\varphi_+^m(p, Q) \varphi_-^n(p, Q) - \varphi_-^m(p, Q) \varphi_+^n(p, Q)] = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_+^n(p, Q) \varphi_+^n(k, Q) - \varphi_-^n(p, Q) \varphi_-^n(k, Q)] = 2\pi\delta(p-k), \quad (2.37)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_+^n(p, Q) \varphi_-^n(k, Q) - \varphi_-^n(p, Q) \varphi_+^n(k, Q)] = 0.$$

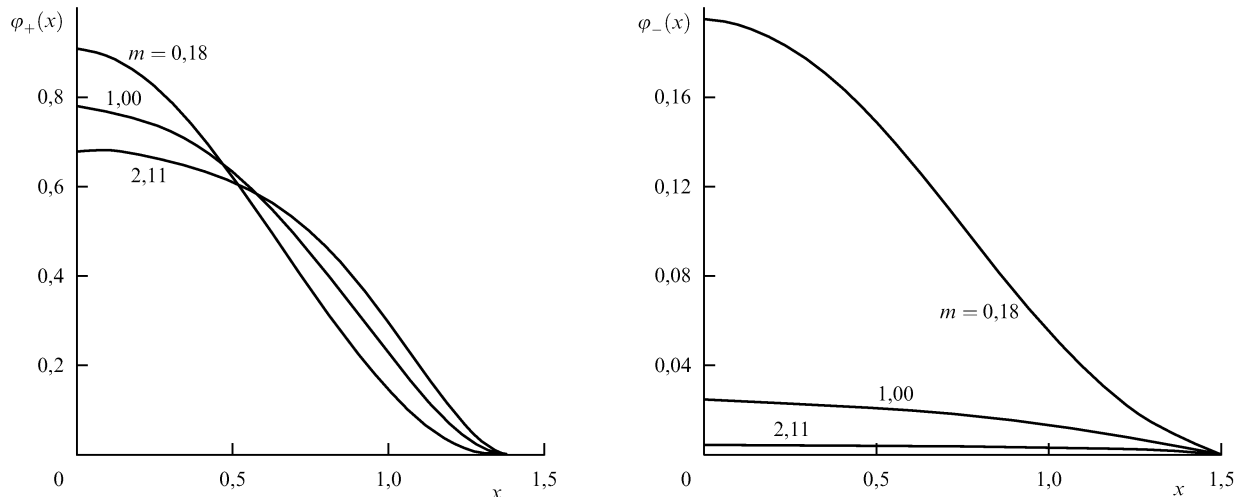


Рис. 3. Компоненты волновой функции φ_+ и φ_- для основного состояния в системе покоя мезона при различных массах кварков [5]. Для основного состояния φ_{\pm} являются четными функциями p . Переменная x определяется заменой $p = \tan x$, все размерные величины даны в соответствующих единицах $(2\gamma)^{1/2}$.

Функции φ_{\pm}^n играют роль мезонных волновых функций. Более того, легко установить физический смысл этих функций, а именно φ_+^n описывает движение $q\bar{q}$ -пары в мезоне вперед по времени, тогда как φ_-^n ответственна за возвратное по времени движение $q\bar{q}$ -пары. Мы вернемся к этому вопросу при обсуждении свойств уравнения для связанных состояний в разделе 2.4.

Физический смысл преобразования (2.34) вполне очевиден. Действительно, в теории с нетривиальным вакуумом есть два способа породить кварк-антикварковое состояние. С одной стороны, вне зависимости от того, является ли вакуум нетривиальным или нет, можно родить $q\bar{q}$ -пару непосредственно действием оператора $M^+ \sim b^+ d^+$. С другой стороны, если вакуум нетривиален и содержит киральный конденсат $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$, можно "одолжить" конечное число коррелированных кварк-антикварковых пар из вакуума и затем "убрать" лишние частицы, используя оператор аннигиляции $M \sim db$. Волновые функции φ_{\pm} описывают вклады этих двух процедур. Из данных соображений немедленно следует, что, например, для случая массивных кварков функция φ_- должна быть мала, так как конденсат тяжелых кварков подавлен их большой массой.

Легко проверить, что операторы (2.34) подчиняются стандартным бозонным коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [m_n(Q) m_m^+(Q')] &= 2\pi \delta(Q - Q') \delta_{nm}, \\ [m_n(Q) m_m(Q')] &= [m_n^+(Q) m_m^+(Q')] = 0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

и диагонализуют гамильтониан (2.29):

$$H = LN_c \mathcal{E}'_v + \sum_{n=0}^{+\infty} \int \frac{dQ}{2\pi} Q_n^0(Q) m_n^+(Q) m_n(Q), \quad (2.39)$$

если волновые функции φ_{\pm}^n являются решениями уравнения для связанных состояний, которое мы обсудим в разделе 2.4. Энергия вакуума в (2.39) содержит дополнительные вклады по сравнению с (2.29). Кроме того, изменилась сама структура вакуума, так что настоящий вакуум теории $|Q\rangle$ отличается от состояния $|0\rangle$, введен-

ного в (2.3), и они связаны унитарным преобразованием.

2.4. Уравнение для связанных состояний и свойства волновых функций мезонов

В случае преобразования Боголюбова, произведенного в разделе 2.1, уравнение для щели (2.13) появлялось как условие диагонализации гамильтониана. Обобщенное преобразование Боголюбова, произведенное в разделе 2.3, также приводит к уравнению для боголюбовских функций φ_{\pm}^n . Это есть не что иное, как уравнение для связанных состояний⁵, описывающее мезонный спектр модели [2]:

$$\begin{aligned} [E(p) + E(Q - p) - Q_0] \varphi_+(Q, p) &= \\ = \gamma \int \frac{dk}{(p - k)^2} [C(p, k, Q) \varphi_+(Q, k) - S(p, k, Q) \varphi_-(Q, k)], \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} [E(p) + E(Q - p) + Q_0] \varphi_-(Q, p) &= \\ = \gamma \int \frac{dk}{(p - k)^2} [C(p, k, Q) \varphi_-(Q, k) - S(p, k, Q) \varphi_+(Q, k)]. \end{aligned}$$

К сожалению, аналитическое исследование системы (2.40) возможно только в особых случаях (один из них обсуждается в разделе 2.5), так что эту систему следует изучать численно. Численные решения для основного состояния при различных массах кварков представлены на рис. 3, взятом из работы [5]. Видно, что компонента

⁵ Уравнение для связанных состояний (2.40) непосредственно обобщается на случай теории с несколькими ароматами кварков. Для этого нужно провести следующую модификацию:

$$\begin{aligned} E(p) &\rightarrow E_{f_1}(p), \quad E(Q - p) \rightarrow E_{f_2}(Q - p), \quad \varphi_{\pm} \rightarrow \varphi_{\pm}^{f_1 f_2}, \\ C(p, k, Q) &\rightarrow C_{f_1 f_2}(p, k, Q) = \\ &= \cos \frac{\theta_{f_1}(p) - \theta_{f_1}(k)}{2} \cos \frac{\theta_{f_2}(Q - p) - \theta_{f_2}(Q - k)}{2}, \\ S(p, k, Q) &\rightarrow S_{f_1 f_2}(p, k, Q) = \\ &= \sin \frac{\theta_{f_1}(p) - \theta_{f_1}(k)}{2} \sin \frac{\theta_{f_2}(Q - p) - \theta_{f_2}(Q - k)}{2}, \end{aligned}$$

где f_1 и f_2 обозначают различные кварковые ароматы.

волновой функции мезона φ_- подавлена для больших масс кварков в соответствии с соображениями, приведенными выше, а также для высоковозбужденных состояний [5]. В самом деле, случай высоких возбуждений соответствует квазиклассическому режиму, когда ответы для спектра совпадают с ответами квантовомеханической задачи о двумерной струне с кварками на концах [27], которая, в свою очередь, сводится к кварковой потенциальной модели.

Продемонстрируем теперь, каким образом из системы уравнений (2.40) получается уравнение 'т Хофта. В работе [2] лоренцева ковариантность доказывалась для синглетного по цвету сектора теории, так что спектр масс связанных $q\bar{q}$ -состояний, следующий из (2.40), не должен меняться при бустах даже в предельном случае перехода к системе с бесконечным импульсом $P \rightarrow \infty$. Легко проверить, что в этом случае функция $S(p, k, Q) \rightarrow 0$, тогда как $C(p, k, Q)$ превращается в ступенчатую функцию. Область интегрирования в правой части (2.40) стягивается к конечному интервалу $0 < x < 1$, где $x = p/P$ — доля импульса, переносимая кварком (переменная 'т Хофта). Компонента волновой функции φ_- вымирает, и система (2.40) сводится к одному уравнению для φ_+ :

$$M^2 \varphi(x) = \left(\frac{m^2 - 2\gamma}{x} + \frac{m^2 - 2\gamma}{1-x} \right) \varphi(x) - 2\gamma \int \frac{dy}{(y-x)^2} \varphi(y), \quad (2.41)$$

$$\varphi(x) = \lim_{Q \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{Q}{2\pi}} \varphi_+(p, Q) \right), \quad (2.42)$$

совпадающему с полученным 'т Хофтом в работе [1].

Приведем для дальнейших ссылок свойства волновых функций φ_{\pm}^n :

$$\varphi_{\pm}^n(p \mp P, \mp P) = \varphi_{\pm}^n(p, \pm P), \quad (2.43)$$

$$\varphi_{\pm}^n(-p, -P) = \eta_n \varphi_{\pm}^n(p, P), \quad (2.44)$$

четность состояния есть $(-1)^{\eta_n+1}$. Последнее свойство позволяет разделить мезонные состояния на две группы: нечетные состояния — пионы с $\eta_n = 1$ и четные состояния — сигмы с $\eta_n = -1$. Четные и нечетные состояния следуют в спектре друг за другом, начиная с низшего нечетного состояния, которое, как ожидается, является безмассовым в киральном пределе. Это состояние и есть киральный пион.

2.5. Пионное решение

Вернемся к уравнению для связанных состояний (2.40) и найдем его точное решение. Действительно, легко проверить, что функции

$$\varphi_{\pm}^{\pi}(p, Q) = N_{\pi}^{-1} \left(\cos \frac{\theta(Q-p) - \theta(p)}{2} \pm \sin \frac{\theta(Q-p) + \theta(p)}{2} \right), \quad (2.45)$$

$$N_{\pi}^2(Q) = \frac{2}{\pi} Q \quad (2.46)$$

удовлетворяют системе уравнений (2.40), если массу кварка положить равной нулю. Решение (2.45) является безмассовым и, следовательно, есть не что иное, как киральный пион — низшее состояние в спектре с отрицательной четностью (см. обсуждение в конце раздела 2.4). Как можно было бы предвидеть, норма этого решения (2.46) обращается в нуль в системе покоя пиона, тогда как в системе с бесконечным импульсом данное решение принимает вид

$$\varphi_{-}^{\pi}(p, Q) \xrightarrow{Q \rightarrow \infty} 0, \quad \varphi_{+}^{\pi}(p, Q) \xrightarrow{Q \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2\pi}{Q}}, \quad 0 \leq p \leq Q, \quad (2.47)$$

и после соответствующего переопределения переменной (см. соотношение (2.42)) дает $\varphi(x) = 1$, т.е. обращается в пионное решение, найденное в работах [1, 3].

2.6. Одночастичный предел и непотенциальная динамика кварков

Рассмотрим тяжело-легкую систему, состоящую из статического антикваркового источника, помещенного в начало координат, и легкого кварка. Самый простой способ вывода уравнения для связанных состояний в такой системе состоит в исследовании одночастичного предела системы уравнений (2.40).

Для бесконечно тяжелой частицы имеем (см. сноску 5)

$$E_{f_2}(p) = m_{f_2} \rightarrow \infty, \quad \cos \theta_{f_2} = 1, \quad \sin \theta_{f_2} = 0, \quad \varphi_{-}^{f_1 f_2} = 0. \quad (2.48)$$

При этом коэффициенты в уравнении (2.40) принимают вид

$$C_{f_1 f_2}(p, k, Q) = \cos \frac{\theta_{f_1}(p) - \theta_{f_1}(k)}{2}, \quad S_{f_1 f_2}(p, k, Q) = 0. \quad (2.49)$$

Далее в этом разделе мы опустим индексы аромата, подразумевая, что угол $\theta(p)$ и закон дисперсии $E(p)$ определены для легкого кварка.

Система (2.40) сводится к одному уравнению [28]:

$$\varepsilon \varphi(p) = E(p) \varphi(p) - \gamma \int \frac{dk}{(p-k)^2} \cos \frac{\theta(p) - \theta(k)}{2} \varphi(k), \quad (2.50)$$

где $\varphi = \varphi_+$, $\varepsilon = Q_0 - m_{f_2}$.

Заметим, что взаимодействие в (2.50), заданное интегральным слагаемым в правой части, является существенно нелокальным. Более того, не существует параметра (кроме массы кварка), позволяющего рассматривать эту нелокальность по теории возмущений, разлагая в ряд косинус под интегралом. Между тем, если кварк достаточно массивен, косинус обращается в единицу и уравнение (2.50) упрощается, давая локальный линейно растущий потенциал между конститuentами:

$$[E_0(p) + \gamma|x|] \varphi(x) = \varepsilon \varphi(x), \quad E_0(p) = \sqrt{p^2 + m^2} \approx m + \frac{p^2}{2m} + \dots \quad (2.51)$$

2.7. Тяжело-легкая система в модифицированной калибровке Фока – Швингера и лоренцева природа конфайнмента

Чтобы лучше понять структуру взаимодействия в модели 'т Хофта, рассмотрим тяжело-легкую систему, используя другой подход, а именно вывод одночастичного предела (2.50) уравнения для связанных состояний (2.40), основанный на уравнении Швингера – Дайсона в модифицированной калибровке Фока – Швингера [28]. Преимуществом такого подхода является возможность его обобщения на случай четырехмерной КХД, используя соответствующую модель для вакуума КХД [17].

Прежде всего, заметим, что условие кулоновской калибровки $A_1(x_0, x) = 0$ не фиксирует калибровку полностью, поскольку допускает зависящие только от времени калибровочные преобразования. Чтобы зафиксировать оставшуюся инвариантность, наложим дополнительное условие $A_0(x_0, x = 0) = 0$, которое явно нарушает трансляционную инвариантность, но оказывается необычайно удобным в случае, если одна из частиц является бесконечно тяжелой (статической).

В случае системы, состоящей из легкого кварка и статического антикваркового источника начало координат можно совместить с антикварковым источником, который играет исключительно пассивную роль, обеспечивая лишь бесцветность всего объекта. Функция Грина статического антикварка в данной калибровке не зависит от глюонного поля: $S_{\bar{Q}}(x, y|A) = S_{\bar{Q}}(x - y)$, и принимает вид

$$S_{\bar{Q}}(x) = \hat{1}(-i) \left[\frac{1 + \gamma_0}{2} \theta(-x_0) \exp(iMx_0) + \frac{1 - \gamma_0}{2} \theta(x_0) \exp(-iMx_0) \right] \delta(x), \quad (2.52)$$

где $\hat{1}$ обозначает единицу в цветовом пространстве. Функция Грина (2.52) содержит также бесконечный ряд поправок вида

$$\frac{1}{M^n} \frac{d^n}{dx^n} \delta(x - y),$$

исчезающих в пределе $M \rightarrow \infty$.

Функцию Грина бесцветной $q\bar{Q}$ -системы можно записать как

$$S_{q\bar{Q}}(x, y) = \frac{1}{N_c} \int D\psi D\bar{\psi} DA_\mu \exp \left\{ -\frac{i}{4} \int d^2x F_{\mu\nu}^2 + i \int d^2x \bar{\psi} (\hat{i}\partial - m - \hat{A}) \psi \right\} \times \bar{\psi}(x) S_{\bar{Q}}(x - y) \psi(y), \quad (2.53)$$

так что интеграл по глюонным полям можно вычислить явно и прийти к уравнению Швингера – Дайсона для функции Грина легкого кварка $S(x, y)$:

$$(\hat{i}\partial_x - m) S(x, y) - (2\pi)^2 \gamma \int d^2z \gamma_0 S(x, z) \gamma_0 \tilde{D}_{00}(x, z) \times S(z, y) = \delta^{(2)}(x - y). \quad (2.54)$$

Заметим, что

$$S(x, y) = \frac{1}{N_c} S_x^z(x, y)$$

обладает всеми свойствами полной функции Грина $q\bar{Q}$ -системы благодаря пассивной роли антикварка, обсуждавшейся выше. Таким образом, как одночастичные (например, киральный конденсат), так и двухчастичные (например, спектр связанных состояний) свойства системы можно извлечь из одной функции $S(x, y)$.

Особое внимание следует уделить глюонному пропагатору $\tilde{D}_{00}(x, y)$, который похож на пропагатор в аксиальной калибровке (1.5), но содержит дополнительные слагаемые, нарушающие трансляционную инвариантность и описывающие взаимодействие легкого кварка со статическим антикварком:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{00}(x_0 - y_0, x, y) &= -\frac{i}{2} (|x - y| - |x| - |y|) \delta(x_0 - y_0) \equiv \\ &\equiv K(x, y) \delta(x_0 - y_0), \end{aligned} \quad (2.55)$$

или в импульсном представлении:

$$\begin{aligned} K(p, q) &= K^{(1)}(p, q) + K^{(2)}(p, q), \quad (2.56) \\ K^{(1)}(p, q) &= \frac{i}{p^2} \delta(p - q), \\ K^{(2)}(p, q) &= -\frac{i}{q^2} \delta(p) - \frac{i}{p^2} \delta(q), \end{aligned} \quad (2.57)$$

где выделены локальная и нелокальная части.

С этого момента можно принять две стратегии, приводящие в итоге к одному и тому же уравнению для спектра тяжело-легкой системы. Первая из них основана на диаграммной технике с двумя различными внутренними линиями, приписываемыми локальной и нелокальной частям ядра [28]. Оказывается, что, несмотря на нелинейность уравнения (2.54), две части ядра можно рассматривать отдельно благодаря специфическим свойствам радужных диаграмм [28].

Таким образом, локальная часть $K^{(1)}$ определяет массовый оператор $\Sigma(p)$, который естественным образом параметризуется с помощью дисперсии одетых кварков $E(p)$ и кирального угла $\theta(p)$:

$$\Sigma(p) = [E(p) \cos \theta(p) - m] + \gamma_1 [E(p) \sin \theta(p) - p], \quad (2.58)$$

причем система уравнений (2.12) становится условием самосогласованности параметризации. Тогда нелокальная часть $K^{(2)}$ дает уравнение для связанных состояний (см. детали в работе [28]).

Мы выберем другую стратегию, основанную на преобразовании Фолди – Войтхойзена для уравнения (2.54) [30]. Сначала перепишем это уравнение в импульсном представлении и используем спектральное представление для функции Грина легкого кварка:

$$\begin{aligned} S(q_{10}, q_1, q_{20}, q_2) &= 2\pi \delta(q_{10} - q_{20}) \times \\ &\times \left(\sum_{\varepsilon_n > 0} \frac{\varphi_n^{(+)}(q_1) \bar{\varphi}_n^{(+)}(q_2)}{q_{10} - \varepsilon_n + i0} + \sum_{\varepsilon_n < 0} \frac{\varphi_n^{(-)}(q_1) \bar{\varphi}_n^{(-)}(q_2)}{q_{10} + \varepsilon_n - i0} \right). \end{aligned} \quad (2.59)$$

⁶ В 3+1 эта калибровка обычно вводится с помощью условий $A_0^a(x_0, \mathbf{0}) = 0$ и $\mathbf{x} A^a(x_0, \mathbf{x}) = 0$ [29].

Здесь введены решения с положительной и отрицательной энергией $\varphi_n^{(\pm)}$.

Далее предположим, что существует оператор Фолди – Войтхойзена

$$T_F(p) = \exp\left(-\frac{1}{2}\theta_F(p)\gamma_1\right),$$

диагонализующий уравнение (2.54), и угол θ_F является одним и тем же для всех n . Тогда имеем

$$\varphi_n^{(+)}(p) = \varphi_n^0(p) T_F(p) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_n^{(-)}(p) = \varphi_n^0(p) T_F(p) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

$$\int \frac{dp}{2\pi} \varphi_n^0(p) \varphi_m^0(p) = \delta_{nm}, \quad \sum_n \varphi_n^0(p) \varphi_n^0(q) = 2\pi\delta(p - q), \quad (2.61)$$

так что выполняется следующее соотношение для функции Грина (2.59):

$$\int \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega, q_1, q_2) = -i\pi \delta(q_1 - q_2) \times [\cos \theta_F(q_1) - \gamma_1 \sin \theta_F(q_1)], \quad (2.62)$$

где $\omega = q_{10} - q_{20}$.

В результате уравнение Швингера – Дайсона (2.54) сводится к уравнению типа уравнения Дирака в гамильтоновой форме:

$$(\alpha p + \beta m) \varphi_n^0(p) - \frac{i\gamma}{2} \int dq dk [\beta \cos \theta_F(q) + \alpha \sin \theta_F(q)] \times K(p - q, k - q) \varphi_n^0(k) = \varepsilon_n \varphi_n^0. \quad (2.63)$$

Локальная часть взаимодействия в (2.63), генерируемая ядром $K^{(1)}$, приводит к одеванию легкого кварка, описываемому углом Боголюбова – Валатена $\theta(p)$ и законом дисперсии $E(p)$, которые удовлетворяют системе уравнений (2.12). Таким образом, мы приходим к выводу, что угол Фолди $\theta_F(p)$ совпадает с углом Боголюбова – Валатена $\theta(p)$:

$$\theta_F(p) = \theta(p). \quad (2.64)$$

Нелокальная часть взаимодействия в (2.63), происходящая от ядра $K^{(2)}$, также диагонализуется, и в итоге получается уравнение типа уравнения Шрёдингера

$$\varepsilon_n \varphi_n^0(p) = E(p) \varphi_n^0(p) - \gamma \int \frac{dk}{(p - k)^2} \cos \frac{\theta(p) - \theta(k)}{2} \varphi_n^0(k), \quad (2.65)$$

совпадающее с (2.50).

Сравнивая уравнение для связанных состояний (2.65) с (2.40), мы видим, что функция φ^0 играет роль компоненты φ_+ волновой функции тяжело-легкой системы, тогда как компонента φ_- исчезает из-за наличия бесконечно массивного антикварка. При этом соотношения (2.61) немедленно следуют из (2.36) и (2.37), в которых все φ_- положены равными нулю.

Поучительно отметить, что в кулоновской калибровке (равно как и в калибровке Фока – Швингера)

модель 'т Хофта полностью определяется одной нетривиальной функцией $\theta(p)$ — решением уравнения для щели (2.13), играющей тройную роль. Функция $\theta(p)$:

определяет преобразование Боголюбова – Валатена от голых к одетым кваркам;

задает угол Фолди, диагонализующий межкварковое взаимодействие в модели;

полностью определяет все величины в модели, включая уравнение для связанных состояний.

Здесь уместно привести некоторые комментарии, касающиеся уравнения (2.54). Первый из них относится к обобщению (2.54) на четырехмерный случай. Внимательный читатель мог заметить, что единственной двумерной составляющей (2.54) является глюонный пропагатор $\tilde{D}_{\mu\nu}(x, z)$, взятый в виде (2.55). Само же уравнение справедливо и в случае четырехмерной КХД, если в наличии имеются подходящий бислокальный глюонный коррелятор $\tilde{D}_{\mu\nu}(x, z)$ в данной калибровке, а также некоторые соображения, согласно которым можно пренебречь вкладом высших корреляторов, приводящих к фермионным вершинам более высокого порядка, чем четвертый (см. детали в [31]).

Другим интересным моментом в уравнении (2.54) является то, что ядро взаимодействия нельзя упростить подстановкой

$$\gamma_0 S \gamma_0 \rightarrow \gamma_0 S_0 \gamma_0, \quad (2.66)$$

как предлагалось в работе [32]. Причины этого подробно обсуждаются в работе [33] и вытекают из того, что реальным параметром, определяющим подстановку (2.66) с последующим разложением S_0 по степеням одномерного импульса, становится произведение массы кварка и глюонной корреляционной длины, характеризующей также радиус струны, формирующейся между цветными конститuentами теории. Простой размерный анализ демонстрирует, что струны в 1+1 являются бесконечно тонкими, так как в системе не хватает размерности, позволяющей струне приобрести толщину.

К таким же выводам можно прийти, изучая двумерный коррелятор

$$\langle FF \rangle \equiv \text{Tr} \langle F_{\mu\nu}(x) \Phi(x, y) F_{\rho\sigma}(y) \Phi(y, x) \rangle,$$

где $\Phi(x, y)$ — стандартный оператор параллельного переноса вдоль произвольного пути, соединяющего точки x и y . Оператор $\Phi(x, y)$ обеспечивает калибровочную инвариантность всего нелокального объекта (см. [21] и обзорную работу [22], где приведено детальное описание формализма). Используя глюонный пропагатор (1.5), можно легко найти, что двумерный коррелятор $\langle FF \rangle$ пропорционален двумерной δ -функции в координатном пространстве:

$$\langle FF \rangle \propto \delta^{(2)}(x - y), \quad (2.67)$$

т.е. имеет нулевую корреляционную длину T_g . Таким образом, произведение $m T_g$ тождественно равно нулю в двумерной КХД, что делает взаимодействие существенно нелокальным, и динамика кварков является непотенциальной [33, 30].

Наконец, уравнение (2.63) отвечает, по крайней мере в двумерной КХД, на вопрос о лоренцевой природе конфайнмента. Следует различать лоренцеву структуру

удерживающего взаимодействия, имеющего вид $\gamma_0 \times \gamma_0$ (см. (2.54)), и эффективного взаимодействия, входящего в уравнение, подобное уравнению Дирака (2.63), для связанных состояний. Видно, что уравнение (2.63) содержит только эффективное скалярное (члены порядка γ_0) и пространственное векторное (члены порядка $\gamma_0 \gamma_1 = \gamma_5$) взаимодействия.

2.8. Киральные свойства модели в гамильтоновом подходе

Обсудим киральные свойства модели, которые являются в высшей степени нетривиальными и во многих отношениях напоминают свойства четырехмерной КХД.

Большая часть исследований модели 'т Хофта выполнялась в калибровке светового конуса $A_- = 0$, приводящей к пертурбативному вакууму и к более простому уравнению для связанных состояний. В то же время для изучения кирального предела модели применяются довольно изощренные методы, поскольку в данном пределе все функции и распределения становятся чрезвычайно сингулярными. Весь интервал изменения переменной 'т Хофта ($0 < x < 1$) сводится к небольшим областям около граничных точек $x = 0$ и $x = 1$, которые и определяют все нетривиальное содержание теории.

Гамильтонов подход в кулоновской калибровке, рассмотренный выше, свободен от этого недостатка. Действительно, для вычисления матричных элементов любого оператора между мезонными состояниями — единственными состояниями, представляющими интерес в режиме слабой связи, — нужно переписать этот оператор в явном виде в терминах операторов m^+ и m , введенных в (2.34), и использовать технику вторичного квантования для непосредственного вычисления матричного элемента. Результат всегда выражается через тригонометрические функции угла $\theta(p)$ и интегралы от них, которые в ряде случаев можно вычислить аналитически или оценить численно. Имея в распоряжении численное решение для $\theta(p)$, найденное в работе [5], можно вычислить любую величину в модели.

Сделаем еще одно замечание относительно вакуума теории. Как упоминалось выше, истинный вакуум теории является мезонным, уничтожаемым мезонными операторами:

$$m_n(P) |\Omega\rangle = 0, \quad (2.68)$$

для любого n и любого полного импульса P . Это состояние связано с кварковым вакуумом, определенным соотношениями (2.3), унитарным преобразованием

$$|\Omega\rangle = U|0\rangle. \quad (2.69)$$

Несмотря на то что явный вид оператора U неизвестен, разность между средними, вычисленными по мезонному и кварковому вакуумам, оказывается подавленной в пределе больших N_c , т.е. играет роль малой поправки и лежит вне предмета настоящего обзора. Таким образом, в практических вычислениях можно использовать любой из данных вакуумов.

2.8.1. Киральный конденсат. Проверкой того, нарушается ли спонтанно киральная симметрия, является значение кирального конденсата $\langle \bar{q}q \rangle$. Если данное вакуумное среднее не обращается в нуль, то вся башня физических состояний не обладает киральной симметрией, которая

имеет место для гамильтониана теории, так что симметрия оказывается спонтанно нарушенной.

Для простейшего случая одного аромата кварков нарушение киральной симметрии выглядит, как $U(1)_L \times U(1)_R \rightarrow U(1)_V$. При этом важно, что инвариантность относительно группы $U(1)_A$ в модели 'т Хофта нарушена спонтанно в противоположность четырехмерной КХД, где имеет место явное нарушение благодаря аксиальной аномалии. Действительно, двумерная аксиальная аномалия пропорциональна следу по цвету, взятому от цветного объекта: $\tilde{F} \propto \epsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$. Этот след очевидным образом обращается в нуль, в то время как аксиальная аномалия существует в двумерной КЭД, известной как модель Швингера, где след по цвету вычислять не надо.

Теперь можно вычислить киральный конденсат в модели 'т Хофта. Следуя общему подходу, описанному в начале раздела, находим, что

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}q \rangle &= \left\langle \Omega \left| \bar{q}_x(x) q^x(x) \right| \Omega \right\rangle \underset{N_c \rightarrow \infty}{\approx} \left\langle 0 \left| \bar{q}_x(x) q^x(x) \right| 0 \right\rangle = \\ &= N_c \int \frac{dk}{2\pi} \text{Tr} \{ \gamma_0 A_-(k) \} = -\frac{N_c}{\pi} \int_0^{+\infty} dk \cos \theta(k). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Поучительно получить тот же результат, используя другой подход, а именно определение конденсата через функцию Грина кварка. Несмотря на то что одночастичная кварковая функция Грина является калибровочно-зависимым и, следовательно, нефизическим объектом, взятая в совпадающих точках и просуммированная по спинорным и цветовым индексам она дает кварковый конденсат⁷

$$\langle \bar{q}q \rangle = -i \text{Tr}_{x \rightarrow y^+} S_x^z(x, y). \quad (2.71)$$

Так как соотношение (2.71) калибровочно-инвариантно, выберем обсуждавшуюся выше модифицированную калибровку Фока–Швингера. Тогда функция Грина легкого кварка

$$S(x, y) = \frac{1}{N_c} S_x^z(x, y)$$

есть решение уравнения (2.54) [28]. Используя спектральное представление функции Грина в координатном пространстве:

$$\begin{aligned} S(x_0 - y_0, x, y) &= \\ &= -i \sum_n \psi_n^{(+)}(x) \bar{\psi}_n^{(+)}(y) \exp[-i\epsilon_n(x_0 - y_0)] \theta(x_0 - y_0) + \\ &+ i \sum_n \psi_n^{(-)}(x) \bar{\psi}_n^{(-)}(y) \exp[i\epsilon_n(x_0 - y_0)] \theta(y_0 - x_0), \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\psi_n^{(\pm)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \varphi_n^{(\pm)}(p) \exp(ipx), \quad (2.73)$$

где ϵ_n — собственные значения, определенные уравнением (2.65), подставляя преобразованные по Фолди–

⁷ Выполняя оба эти действия, следует соблюдать известную осторожность. Действительно, функция Грина разрывна при $x = y$, так что нужно рассматривать предел либо больших, либо меньших y . С другой стороны, если конденсат вычисляется вне кирального предела, то из (2.71) следует вычесть логарифмически расходящийся пертурбативный вклад, пропорциональный массе кварка.

Войтхойзену функции (2.60):

$$\begin{aligned}\varphi_n^{(+)}(p) &= T^+(p) \tilde{\varphi}_n^{(+)}(p) = \varphi_n^0(p) T^+(p) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \varphi_n^{(-)}(p) &= T^+(p) \tilde{\varphi}_n^{(-)}(p) = \varphi_n^0(p) T^+(p) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (2.74)$$

и учитывая упрощенное условие полноты (2.61) для набора $\{\varphi_n^0(p)\}$, можно воспроизвести результат (2.70) [28].

Из определения (2.71) заключаем, что на языке диаграмм киральный конденсат можно представить в виде замкнутой фермионной петли, начинающейся и заканчивающейся в одной и той же точке. Таким образом, движение вперед по времени (решения с положительной энергией) и движение назад (решения с отрицательной энергией) одинаково важны для конденсата. На первый взгляд это утверждение противоречит сделанному ранее выводу о том, что для тяжело-легкой системы все компоненты φ_- обращаются в нуль.

Решение проблемы содержится в свойствах уравнения для связанных состояний (2.40). Действительно, имеются два набора решений системы (2.40), тривиально связанные друг с другом:

$$\varphi_+^{-n}(p, P) = \varphi_+^n(p, P), \quad \varphi_-^{-n}(p, P) = \varphi_-^n(p, P), \quad (2.75)$$

где положительные значения n нумеруют состояния с $Q_0 > 0$, а отрицательные значения n приписываются состояниям с $Q_0 < 0$. Следовательно, для тяжело-легкой системы волновые функции $\varphi_+^{-n}(p, P) = \varphi_+^n(p, P)$ ($n > 0$) исчезают, тогда как оставшиеся волновые функции $\varphi_-^{-n}(p, P) = \varphi_-^n(p, P)$ описывают распространение $q\bar{Q}$ -системы вперед или назад во времени без возвратного движения. Они-то и вносят вклад в киральный конденсат (2.71) на равных основаниях.

Из соотношения (2.70) видно, что свойства решения уравнения для щели (2.13) чрезвычайно важны для нарушения киральной симметрии. Если интеграл в правой части (2.70) исчезает, то мы находимся в фазе теории с ненарушенной киральной симметрией.

В разделе 2.1 упоминалось, что существуют два решения уравнения для щели (2.13) в киральном пределе. Одно из них, найденное аналитически в работе [2], дает $|\theta(p)| = \pi/2$ и, значит, $\cos \theta(p) = 0$ везде, так что для этого решения киральный конденсат (2.70) равен нулю. (Как обсуждалось ранее, данная фаза имеет бесконечную энергию и, следовательно, никогда не реализуется.)

К счастью, это не так для численного решения, полученного в работе [5] и изображенного на рис. 2. Подставляя его в (2.70) и вычисляя интеграл численно, находим

$$\langle \bar{q}q \rangle_{m=0} = -0,29 N_c \sqrt{2\gamma}, \quad (2.76)$$

что совпадает с результатом⁸ из работы [6]. Киральная симметрия спонтанно нарушена в этой фазе теории, и

⁸ Результат работы [6] гласит

$$\langle \bar{q}q \rangle_{m=0} = -\frac{N_c \sqrt{\gamma}}{\sqrt{6}},$$

что численно совпадает с (2.76) и является свидетельством того, что различные интегралы от θ можно найти не только численно, но и в виде иррациональных чисел.

пион, найденный в разделе 2.5, действительно является соответствующим голдстоуновским бозоном. Заметим, что киральный конденсат в модели 'т Хофта известен аналитически для любого значения массы кварка [7].

Теперь можно вернуться к формуле (2.23) для энергии вакуума и переписать ее на более физически прозрачном языке. Применяя то же самое преобразование $\theta(p) \rightarrow \theta(p/A)$ к киральному конденсату (2.70), можно легко видеть, что функция $\Sigma \equiv \langle \bar{q}q \rangle$ преобразуется линейно:

$$\Sigma \rightarrow A\Sigma, \quad (2.77)$$

так что вместо параметра A можно использовать конденсат Σ . Соотношение (2.23) можно переписать как

$$\Delta\mathcal{E}_v = C_1' \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\Sigma}{\Sigma_0} \right)^2 - \ln \left| \frac{\Sigma}{\Sigma_0} \right| \right] + \gamma C_3', \quad (2.78)$$

где минимум энергии вакуума достигается при $\Sigma = \Sigma_0$, задаваемом соотношением (2.76).

При ненулевой массе кварка плотность энергии вакуума (2.78) приобретает дополнительный вклад:

$$\Delta\mathcal{E}_v \rightarrow \Delta\mathcal{E}_v + m \frac{\Sigma_0}{N_c} \frac{\Sigma}{\Sigma_0}, \quad (2.79)$$

который явно нарушает инвариантность $\Delta\mathcal{E}_v$ по отношению к замене $\Sigma \rightarrow -\Sigma$. Тогда низшее (пионное) возбуждение над вакуумом с неправильным знаком конденсата приобретает мнимую массу и становится тахионом, как это немедленно следует из соотношения Гелл-Манна – Оукса – Реннера (см. (3.20)).

Процедура минимизации энергии вакуума в присутствии массового члена (2.79) приводит к более сложному уравнению для конденсата Σ , так что Σ_0 уже не является точкой минимума.

2.8.2. Константа распада пиона. Вычислим константу распада кирального пиона f_π . Используя ее стандартное определение

$$\langle \Omega | J_\mu^5(x) | \pi(Q) \rangle = f_\pi Q_\mu \frac{1}{\sqrt{2Q_0}} \exp(-iQx), \quad (2.80)$$

где

$$J_\mu^5(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 q(x), \quad (2.81)$$

и описанную ранее технику, можно вычислить матричный элемент в явном виде, так что в результате находим

$$f_\pi = \sqrt{\frac{N_c}{\pi}}. \quad (2.82)$$

Заметим, что в модели 'т Хофта константа распада пиона (2.82) безразмерна, что существенно отличается от случая четырехмерной КХД, где эта константа размерна и весьма мала на адронном масштабе (93 МэВ). Таким образом, в четырехмерном случае константа распада пиона определяет новый масштаб эффективной низкоэнергетической КХД — киральной теории возмущений, которая не может быть развита в модели 'т Хофта ввиду безразмерности f_π .

2.8.3. Частичное сохранение аксиально-векторного тока. Выведем соотношения частичного сохранения аксиально-векторного тока для модели 'т Хофта.

Начиная с определения аксиально-векторного тока (2.81), мы используем представление (2.2) для полей кварков и вводим бозонные операторы (2.25) после соответствующего упорядочения антикварковых операторов рождения и уничтожения d^+ и d . Оставляя только лидирующие члены в разложении по $1/N_c$, получаем

$$J_\mu^5(x) = N_c \int \frac{dk}{2\pi} v^+(-k) \gamma_\mu \gamma_5 v(-k) + \sqrt{N_c} \int \frac{dp dP}{(2\pi)^2} \exp(-iPx) [M^+(p, p-P) u^+(p-P) \times \gamma_\mu \gamma_5 v(-p) + M(p-P, p) v^+(p-P) \gamma_\mu \gamma_5 u(p)]. \quad (2.83)$$

Явный вид кварковых амплитуд u и v , заданный соотношениями (2.5), вместе с определением операторов рождения и уничтожения мезонов (2.34) позволяет продвинуться дальше и переписать компоненты аксиально-векторного тока в виде

$$J_0^5(x) = 2\sqrt{N_c} \int \frac{dP}{2\pi} N_\pi \exp(-iPx) \times \sum_{n=0}^{\infty} [m_n(P) - m_n^+(-P)] \int \frac{dp}{2\pi} g_\pi(p, P) f_n(p, P), \quad (2.84)$$

$$J_1^5(x) = 2\sqrt{N_c} \int \frac{dP}{2\pi} N_\pi \exp(-iPx) \times \sum_{n=0}^{\infty} [m_n(P) + m_n^+(-P)] \int \frac{dp}{2\pi} f_\pi(p, P) g_n(p, P), \quad (2.85)$$

$$f_n(p, P) = \frac{1}{2} [\varphi_+^n(p, P) - \varphi_-^n(p, P)], \\ g_n(p, P) = \frac{1}{2} [\varphi_+^n(p, P) + \varphi_-^n(p, P)]. \quad (2.86)$$

Из выражения (2.36) легко находим, что

$$\int \frac{dp}{2\pi} g_\pi(p, P) f_n(p, P) = \int \frac{dp}{2\pi} f_\pi(p, P) g_n(p, P) = \frac{1}{4} \delta_{n\pi}, \quad (2.87)$$

т.е. в киральном пределе аксиально-векторный ток связан только с пионами и его можно записать в виде

$$J_\mu^5(x) = i \sqrt{\frac{N_c}{\pi}} \partial_\mu \int \frac{dP}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2P_0}} [\exp(-iPx) m_\pi(P) + \exp(iPx) m_\pi^+(P)] = i f_\pi \partial_\mu \Psi_\pi(x), \quad (2.88)$$

где введена вторично квантованная волновая функция пиона в координатном пространстве $\Psi_\pi(x)$.

Соотношение (2.88) есть не что иное, как соотношение частичного сохранения аксиально-векторного тока, операторная форма которого обычно формулируется, как гипотеза в четырехмерной КХД. В модели 'т Хофта последнее можно доказать в явном виде, причем гамилтонов подход оказывается наиболее удобным средством для решения этой задачи.

Поучительно отметить, что форму пионного решения можно легко установить еще до рассмотрения слагае-

мого гамильтониана H_4 . Действительно, в случае спонтанно нарушенной киральной симметрии соответствующий заряд не коммутирует с гамильтонианом:

$$[Q_5 H] \neq 0, \quad Q_5 = \int dx J_0^5(x). \quad (2.89)$$

Если гамильтониан диагонализирован в кварковом секторе, то заряд Q_5 содержит аномальное слагаемое:

$$Q_5 \sim \int \frac{dp}{2\pi} [b^+(p) d^+(-p) + d(-p) b(p)] \cos \theta(p), \quad (2.90)$$

с коэффициентом $\cos \theta(p)$, который как раз и является волновой функцией пиона в системе покоя (см. соотношения (2.45) и (3.24)).

3. Матричный подход

Несмотря на очевидные технические преимущества и физическую прозрачность гамильтонова подхода, развитого и использованного в разделе 2, он имеет ряд недостатков. Среди них следует отметить довольно громоздкую алгебру и отсутствие прямой связи с диаграммной техникой, очень удобной при изучении адронных процессов. В этом разделе мы развиваем матричный подход к модели 'т Хофта, позволяющий существенно упростить изучение ряда явлений; например, эта техника успешно применяется в разделе 3.5, где обсуждаются тождества Уорда и сильные адронные распады.

В разделе 3.1 определяется матричная волновая функция и для нее вводится уравнение для связанных состояний. В разделе 3.2 изучаются свойства матричного гамильтониана, а именно его эрмитовость и гильбертово пространство, в котором он определен. Киральные свойства модели 'т Хофта рассматриваются в разделе 3.3: устанавливается соотношение Гелл-Мана–Оукса–Реннера, обсуждается волновая функция пиона вне кирального предела, вычисляется константа распада пиона. В разделах 3.4–3.6 выводятся амплитуда рассеяния кварка на кварке, тождества Уорда для векторного и аксиально-векторного токов, находится пионная вершина.

3.1. Матричные волновые функции

и матричное уравнение для связанных состояний

Воспроизведем кратко метод и результаты работы [2], основанные на диаграммном подходе к теории.

На первом этапе определим массовый оператор Σ как сумму планарных диаграмм (рис. 4), которые вносят вклад в пропагатор одетого кварка⁹:

$$S(p_\mu) = \frac{1}{\hat{p} - m - \Sigma(p) + i\epsilon}, \quad (3.1)$$

$$\Sigma(p) = \frac{i\gamma}{2\pi} \int \frac{dk_0 dk}{(p-k)^2} \gamma_0 S(k_\mu) \gamma_0. \quad (3.2)$$

Заметим, что благодаря мгновенному характеру взаимодействия интегрирование по переменной k_0 три-

⁹ Мы используем аргумент p_μ для краткого обозначения (p_0, p) . Если не указано явно, то подразумевается зависимость только от одномерного пространственного импульса, как в $\Sigma(p)$.

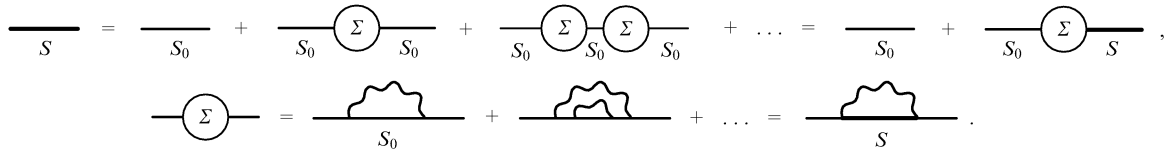


Рис. 4. Графическое представление уравнений для одетого кваркового пропагатора и массового оператора кварка.

виально и массовый оператор зависит только от пространственной компоненты импульса. Используя ту же параметризацию, что и в (2.58), можно немедленно получить уравнение для щели в виде (2.13) и определение $E(p)$ через $\theta(p)$, совпадающее с (2.14).

В качестве второго шага запишем однородное уравнение Бете–Салпитера, представленное графически на рис. 5 и определяющее спектр кварк-антикварковых связанных состояний. Толстые линии обозначают пропагаторы одетых кварков (3.1), тогда как функция $\Gamma(p, P)$ описывает мезон-кварк-антикварковую вершину. Удобно также ввести модифицированную вершину

$$\tilde{\Gamma}(p_\mu, P_\mu) = -i\gamma S(p) \Gamma(p, P) S(p - P) \quad (3.3)$$

и определенную стандартным образом матричную волновую функцию [2]

$$\Phi(p, Q) = \int \frac{d p_0}{2\pi} \tilde{\Gamma}(p_\mu, Q_\mu) = \int \frac{d p_0}{2\pi} \tilde{\Gamma}(p_0 - Q_0, p, Q). \quad (3.4)$$

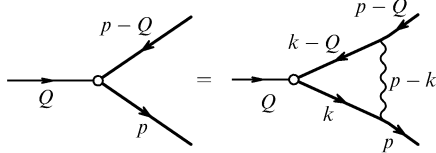


Рис. 5. Графическое представление уравнения Бете–Салпитера (3.5).

Уравнение, соответствующее диаграммам, представленным на рис. 5, имеет вид

$$\tilde{\Gamma}(p_\mu, Q_\mu) = \frac{i\gamma}{2\pi} \int \frac{d k_0 dk}{(p - k)^2} S(p_\mu) \gamma_0 \tilde{\Gamma}(k_\mu, Q_\mu) \gamma_0 S(p_\mu - Q_\mu). \quad (3.5)$$

Интегрируя левую и правую части по p_0 , вводя волновую функцию Φ в соответствии с соотношением (3.4) и выполняя простые алгебраические преобразования, получаем уравнение для связанных состояний в матричной форме:

$$\begin{aligned} Q_0 \Phi(p, Q) &= (\gamma_5 p + \gamma_0 m) \Phi(p, Q) - \\ &- \Phi(p, Q) [\gamma_5(Q - p) + \gamma_0 m] + \\ &+ \gamma \int \frac{dk}{(p - k)^2} [A_+(k) \Phi(p, Q) A_-(Q - k) - \\ &- A_+(p) \Phi(k, Q) A_-(Q - p) - \\ &- A_-(k) \Phi(p, Q) A_+(Q - k) + \\ &+ A_-(p) \Phi(k, Q) A_+(Q - p)]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В уравнении (3.6) использованы проекторы (2.11) и матричная волновая функция параметризована в виде

$$\begin{aligned} \Phi(p, Q) &= T(p) \left(\frac{1 + \gamma_0}{2} \gamma_5 \varphi_+(p, Q) + \right. \\ &\left. + \frac{1 - \gamma_0}{2} \gamma_5 \varphi_-(p, Q) \right) T^+(Q - p). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Записанное в компонентах уравнение (3.6) немедленно воспроизводит систему уравнений (2.40) для функций φ_\pm , полученную ранее в рамках гамильтонова подхода к модели.

В заключение приведем соотношение между мезон-кварк-антикварковой вершиной $\Gamma(p, P)$ и матричной волновой функцией $\Phi(p, P)$:

$$\Gamma(p, P) = \int \frac{dk}{2\pi} \gamma_0 \frac{\Phi(k, P)}{(p - k)^2} \gamma_0, \quad \bar{\Gamma}(p, P) = \gamma_0 \Gamma^+(p, P) \gamma_0, \quad (3.8)$$

где Γ и $\bar{\Gamma}$ — вершины входящего и выходящего мезонов соответственно. Легко проверить, что с таким определением соотношение (3.4) удовлетворяется автоматически (см. также приложение, где приведены некоторые свойства вершин Γ и $\bar{\Gamma}$).

3.2. Усеченное гильбертово пространство и проблема эрмитовости

Обсудим свойства матричного уравнения для связанных состояний (3.6), но сначала сделаем замечание касательно скалярной формы этого уравнения (2.40). Как отмечалось ранее, норма волновых функций φ_\pm (2.36) определена необычным образом. Действительно, знак минус между плюс- и минус-компонентами волновой функции вполне естествен в боголюбовском подходе, развитом ранее, но выглядит несколько удивительно в контексте стандартной гамильтоновой техники.

Кроме того, легко проверить, что, если матричное уравнение для связанных состояний (3.6) записано в виде уравнения Шрёдингера:

$$Q_0^n \begin{pmatrix} \varphi_+^n \\ \varphi_-^n \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} \varphi_+^n \\ \varphi_-^n \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

то соответствующий гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$ оказывается неэрмитовым. В этой связи следует обсудить два вопроса: 1) в чем причина неэрмитовости и 2) не приводит ли это к катастрофе, т.е. являются ли собственные значения этого оператора действительными.

Ответ на первый вопрос становится очевидным, если заметить, что матричная волновая функция (3.7) удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} A_+(p) \Phi(p, Q) A_+(Q - p) &= \\ &= A_-(p) \Phi(p, Q) A_-(Q - p) = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

так что фазовое пространство оказывается усеченным. Гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$ действует в подпространстве, что также объясняет искаженную норму (2.36).

В то же время остается второй вопрос касательно спектра. Чтобы ответить на этот вопрос, проинтегрируем обе части уравнения (3.6) по p , сделаем то же самое для комплексно-сопряженного уравнения и построим их соответствующую линейную комбинацию. Полученное соотношение

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (Q_0^n - Q_0^{n*}) \int \frac{dp}{2\pi} [\varphi_+^n(p, Q) \varphi_+^{m*}(p, Q) - \varphi_-^n(p, Q) \varphi_-^{m*}(p, Q)] = 0 \quad (3.11)$$

немедленно приводит к двум следующим заключениям:

$$Q_0^n = Q_0^{n*} \quad (3.12)$$

и

$$\int \frac{dp}{2\pi} [\varphi_+^n(p, Q) \varphi_+^m(p, Q) - \varphi_-^n(p, Q) \varphi_-^m(p, Q)] = \delta_{nm}, \quad (3.13)$$

$$\int \frac{dp}{2\pi} [\varphi_+^n(p, Q) \varphi_-^m(p, Q) - \varphi_-^n(p, Q) \varphi_+^m(p, Q)] = 0.$$

Ранее (в разделе 2.8.1) упоминалось, что решения системы (2.40) появляются парами: для каждого собственного значения Q_0^n с собственной функцией $(\varphi_+^n, \varphi_-^n)$ существует также собственное значение $-Q_0^n$ с собственной функцией $(\varphi_-^n, \varphi_+^n)$. Благодаря этой симметрии уравнение (3.13) можно переписать в виде (2.36), куда входят только положительные собственные значения¹⁰. Аналогично, строя функцию Грина для системы (2.40), можно вывести условие полноты (2.37).

Введем операторы \hat{C} и \hat{S} :

$$\hat{C}(\hat{S}) F(p, P) \equiv \gamma \int \frac{dk}{(p-k)^2} C(S)(p, k, P) F(k, P) \quad (3.14)$$

для произвольной функции $F(p, P)$ с $C(p, k, P)$ и $S(p, k, P)$, определенными в (2.30). Тогда матричный гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$ можно представить в виде

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} K - \hat{C} & \hat{S} \\ -\hat{S} & -K + \hat{C} \end{pmatrix} = \gamma_0(K - \hat{C}) + \gamma_1 \hat{S}, \quad (3.15)$$

где $K \equiv E(p) + E(P-p)$ — кинетическая энергия. Именно член, пропорциональный γ_1 в (3.15), делает гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}$ неэрмитовым.

Свойство симметрии решения по отношению к перестановке плюс- и минус-компонент волновой функции, которое обсуждалось выше, немедленно следует из того, что $\hat{\mathcal{H}}$ антикоммутирует с γ_5 , так что если

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix}$$

есть собственная функция с собственным значением Q_0 , то

$$\psi' = \begin{pmatrix} \varphi_- \\ \varphi_+ \end{pmatrix} = \gamma_5 \psi$$

также является решением с собственным значением $-Q_0$:

$$\hat{\mathcal{H}}\psi' = \hat{\mathcal{H}}\gamma_5\psi = -\gamma_5\hat{\mathcal{H}}\psi = -\gamma_5Q_0\psi = -Q_0\psi'. \quad (3.16)$$

Более того, задачу на собственные значения (3.9) для оператора $\hat{\mathcal{H}}$ можно теперь сформулировать в виде эффективного уравнения Дирака:

$$[\gamma_0(K - \hat{C}) + \gamma_1\hat{S} - Q_0]\psi = 0, \quad (3.17)$$

где, как и ранее,

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Установление взаимосвязи между задачей о кварк-антикварковых связанных состояниях и свойствами фермионного уравнения (3.17) можно продолжить, однако это выходит за рамки настоящего обзора.

3.3. Киральные свойства модели в матричном подходе

Вернемся к киральным свойствам модели 'т Хофта и обсудим некоторые из них в матричном формализме. В приложении собраны формулы, полезные для различных вычислений в этом подходе. Все они основаны на определении матричной волновой функции (3.7) и свойствах матричного уравнения для связанных состояний (3.6).

3.3.1. Соотношение Гелл-Мана – Оукса – Реннера и масса пиона

Для того чтобы продемонстрировать, как матричный подход работает на практике, выведем соотношение Гелл-Мана – Оукса – Реннера в модели 'т Хофта. С этой целью выйдем за рамки кирального предела, вводя малую массу кварка m . Домножим на $\gamma_0\gamma_5$ матричное уравнение для связанных состояний (3.6), являющееся теперь основным предметом исследования, возьмем след по спинорным индексам и проинтегрируем обе части уравнения по импульсу p . Ряд слагаемых, содержащих проекторы Λ_{\pm} , исчезает, и в результате мы получаем

$$Q_0 \int \frac{dp}{2\pi} \text{Sp} [\gamma_0\gamma_5\Phi(p, Q)] - Q \int \frac{dp}{2\pi} \text{Sp} [\gamma_1\gamma_5\Phi(p, Q)] = -2m \int \frac{dp}{2\pi} \text{Sp} [\gamma_5\Phi(p, Q)]. \quad (3.19)$$

Если использовать определение матричной волновой функции и подставить в него пионное решение (2.45), то выражение (3.19) упрощается и приобретает вид

$$f_{\pi}^2 M_{\pi}^2 = -2m\langle\bar{q}q\rangle. \quad (3.20)$$

В уравнении (3.20) можно легко узнать соотношение Гелл-Мана – Оукса – Реннера [34], определяющее массу пиона вблизи кирального предела:

$$M_{\pi}^2 = 2m \int_0^{\infty} dp \cos \theta(p). \quad (3.21)$$

С помощью численного решения для $\theta(p)$ (см. рис. 2 и сноску 8) можно получить

$$M_{\pi}^2 = \sqrt{\frac{2\pi^2 m^2 \gamma}{3}} \sim m\sqrt{\gamma}. \quad (3.22)$$

¹⁰ Если не указано явно, мы используем знак \sum_n для суммы только по положительным значениям n .

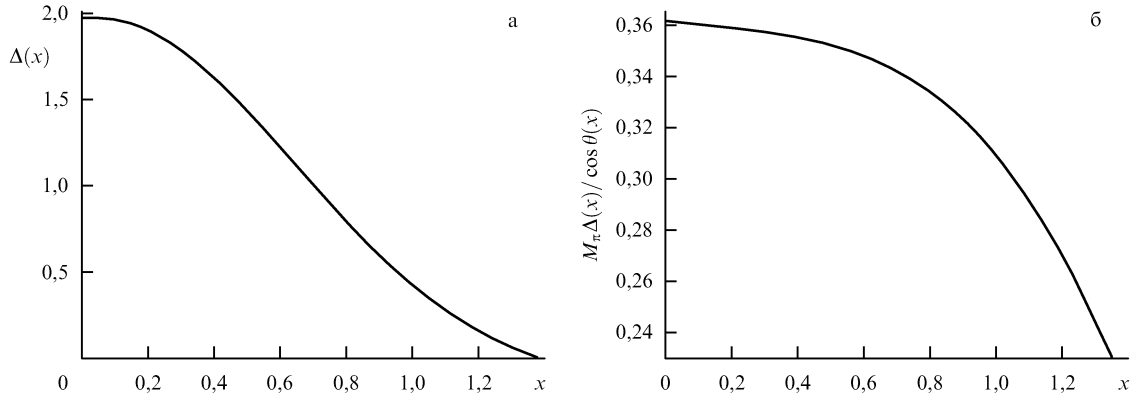


Рис. 6. Численное решение для функции Δ (а) и отношение следующего за лидирующим члена в (3.24) к лидирующему для $m = 0,18$ (б). Переменная x определяется заменой $p = \tan x$, все размерные величины даны в соответствующих единицах $(2\gamma)^{1/2}$.

Заметим, что в случае кирально-инвариантного вакуума, т.е. для аналитического решения (2.18), уравнение (3.20) тривиально, так как обе его части одновременно обращаются в нуль.

3.3.2. Пионное решение вне кирального предела. Имея выражение для массы пиона (3.22), можно отойти немного от кирального предела и изучать пионное решение в системе покоя. Простой анализ показывает, что в системе покоя пиона функции $g_\pi(p, P)$ и $f_\pi(p, P)$, определенные в (2.86), ведут себя, как

$$g_\pi(p, P = 0) \propto \frac{1}{\sqrt{M_\pi}} \cos \theta(p) + O(M_\pi^{3/2}),$$

$$f_\pi(p, P = 0) \propto O(\sqrt{M_\pi}). \quad (3.23)$$

Следовательно, лидирующая поправка к волновой функции пиона происходит от члена $f_\pi(p, P)$, так что функции $\varphi_\pm^\pi(p, P = 0)$ можно параметризовать в виде (см. (2.45))

$$\varphi_\pm^\pi(p, P = 0) = \tilde{N}_\pi^{-1} \left[\frac{\cos \theta(p)}{\sqrt{M_\pi}} \pm \sqrt{M_\pi} \Delta(p) \right]. \quad (3.24)$$

Здесь выделена явная зависимость коэффициентов от малой массы пиона, так что неизвестная поправочная функция $\Delta(p)$ не зависит от M_π . (Заметим, что функция $\Delta(p)$ имеет ту же четность, что и $\cos \theta(p)$, т.е. она четна.) Безразмерная норма \tilde{N}_π есть

$$\tilde{N}_\pi^2 = 4 \int \frac{dp}{2\pi} \Delta(p) \cos \theta(p), \quad (3.25)$$

что обеспечивает правильную нормировку для функций φ_\pm^π .

Подставляя (3.24) в (2.40), можно получить систему уравнений, первое из которых удовлетворяется тождественно вследствие (2.12), тогда как второе определяет поправочную функцию $\Delta(p)$:

$$\frac{1}{2} \cos \theta(p) - p \Delta(p) \sin \theta(p) =$$

$$= \frac{\gamma}{2} \int \frac{dk}{(p-k)^2} [\Delta(p) - \Delta(k)] \cos [\theta(p) - \theta(k)]. \quad (3.26)$$

Уравнение (3.26) может быть решено численно, однако это выходит за рамки данного обзора.

Точные численные решения для волновой функции пиона в системе покоя для нескольких значений масс кварка, взятые из работы [5], приведены на рис. 3, так что функцию $\Delta(p)$ можно непосредственно извлечь из этих данных. Функция $\Delta(p)$ и отношение поправки, заданной $\Delta(p)$, к лидирующему члену в (3.24) для $m = 0,18$ представлены на рис. 6. Видно, что для данного значения массы кварка вклад поправки составляет не более одной трети и убывает с ростом аргумента.

3.3.3. Еще раз о константе распада пиона. Приведем еще один пример вычислений с использованием матричного подхода, а именно вычислим еще раз константу распада пиона из диаграммы "рыбка", изображенной на рис. 7б. Матричный элемент для этой диаграммы имеет вид

$$A_\mu = \frac{-i\gamma}{\sqrt{N_c}} N_c (-1) \times$$

$$\times \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \text{Sp} [S(p) \Gamma_n(p, P) S(p-P) \gamma_\mu \gamma_5], \quad (3.27)$$

где множитель $-i\gamma/\sqrt{N_c}$ происходит от вершины, тогда как множители N_c и (-1) — от фермионной петли.

Вычисляя интеграл по p_0 и используя соотношения (6.7) и (6.8), получаем простую формулу:

$$A_\mu = \sqrt{N_c} \int \frac{dp}{2\pi} \text{Sp} [\Phi_n(p, P) \gamma_\mu \gamma_5]. \quad (3.28)$$

Подставляя явный вид матричной волновой функции Φ_n , положив $m = 0$, и интегрируя по p с помощью условия

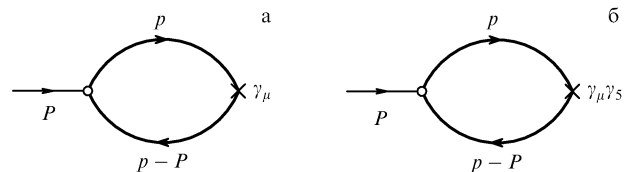


Рис. 7. Мезонный векторный (а) и мезонный аксиально-векторный (б) токи.

ортогональности (2.36), для данного матричного элемента в киральном пределе имеем

$$A_\mu = \delta_{m\pi} \sqrt{\frac{N_c}{\pi}} P_\mu \frac{1}{\sqrt{2P_0}}. \quad (3.29)$$

Сравнивая выражение (3.29) с определением константы распада n -го мезона

$$A_\mu = f_n P_\mu \Psi_n(0), \quad (3.30)$$

можно заключить, что

$$f_n = \delta_{n\pi} \sqrt{\frac{N_c}{\pi}}, \quad (3.31)$$

что совпадает с соотношением (2.80).

3.4. Амплитуда рассеяния кварка на кварке

Перейдем к вычислению одного из наиболее фундаментальных объектов теории — амплитуды рассеяния кварка на кварке. Если данный объект известен, можно найти одетые токовые вершины и, значит, изучать такие свойства теории, как тождества Уорда, законы сохранения токов и т.д.

Уравнение для амплитуды рассеяния кварка на кварке графически представлено на рис. 8, а соответствующее выражение имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik,lm}^{\alpha\delta,\gamma\beta}(p,k,P_\mu) = & -ig^2 (\gamma_0)_{il} (\gamma_0)_{km} \frac{1}{(p-k)^2} (t^a)_\gamma^\alpha (t^a)_\beta^\delta - \\ & - ig^2 \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{1}{(p-q)^2} (\gamma_0)_{is} S_{st}(q) \Gamma_{ik,ln}^{\omega\delta,\gamma\sigma}(q,k,P_\mu) \times \\ & \times S_{mr}(q-P) (\gamma_0)_{rm} (t^a)_\omega^\alpha (t^a)_\beta^\sigma, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где греческие и латинские символы обозначают цветовые и спинорные индексы соответственно. Можно сразу же выделить цветовую структуру Γ :

$$\Gamma_{ik,lm}^{\alpha\delta,\gamma\beta} = \frac{1}{N_c} \delta_\beta^\alpha \delta_\gamma^\delta \Gamma_{ik,lm}. \quad (3.33)$$

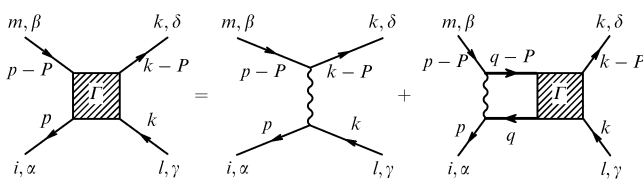


Рис. 8. Графическое представление уравнения для амплитуды рассеяния кварка на кварке.

Удобно также ввести новую функцию $\tilde{\Gamma}$, определенную как

$$\tilde{\Gamma}_{sk,lr}(q_\mu, k, P_\mu) = S_{st}(q) \Gamma_{ik,ln}(q, k, P_\mu) S_{mr}(q-P). \quad (3.34)$$

Ввиду мгновенности взаимодействия, переносимого двумерным глюоном, полезно определить амплитуду Φ как интеграл по q_0 от $\tilde{\Gamma}$:

$$\int \frac{dq_0}{2\pi} \tilde{\Gamma}_{sk,lr}(q_\mu, k, P_\mu) = \Phi_{sk,lr}(q, k, P_\mu). \quad (3.35)$$

Тогда уравнение для новой функции принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi_{ak,lb}(p,k,P_\mu) = & \frac{(2\pi)^2 \gamma}{(p-k)^2} (\gamma_0)_{il} (\gamma_0)_{km} \times \\ & \times \left[i \int \frac{dp_0}{2\pi} S_{ai}(p) S_{mb}(p-P) \right] + \\ & + \gamma \int \frac{dq}{(p-q)^2} (\gamma_0)_{is} (\gamma_0)_{rm} \Phi_{sk,lr}(q,k,P_\mu) \times \\ & \times \left[i \int \frac{dp_0}{2\pi} S_{ai}(p) S_{mb}(p-P) \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Объект в квадратных скобках (3.36) теперь можно легко проинтегрировать, используя формулу (6.1), так что в результате получаем

$$\begin{aligned} i \int \frac{dp_0}{2\pi} S_{ai}(p) S_{mb}(p-P) = & \frac{(A_+(p)\gamma_0)_{ai} (A_-(p-P)\gamma_0)_{mb}}{E(p) + E(P-p) - P_0} + \\ & + \frac{(A_-(p)\gamma_0)_{ai} (A_+(p-P)\gamma_0)_{mb}}{E(p) + E(P-p) + P_0}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Самый простой способ продвинуться далее состоит в том, чтобы угадать общую структуру амплитуды Φ :

$$\Phi_{sk,lr}(q,k,P_\mu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{sr}^n(q,P) \chi_{kl}^n(k,P)}{P_0 - P_0^n}, \quad (3.38)$$

так что после алгебраических преобразований с использованием матричного уравнения для связанных состояний (3.6) получается

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_{kl}^n(k,P) \left[\frac{A_+(p)\Phi^n(p,P)A_-(P-p)}{E(p) + E(P-p) - P_0} - \right. \\ \left. - \frac{A_-(p)\Phi^n(p,P)A_+(P-p)}{E(p) + E(P-p) + P_0} \right]_{ab} = \\ = \frac{(2\pi)^2 \gamma}{(p-k)^2} \left[\frac{(A_+(p))_{al} (A_-(P-p))_{kb}}{E(p) + E(P-p) - P_0} - \right. \\ \left. - \frac{(A_-(p))_{al} (A_+(P-p))_{kb}}{E(p) + E(P-p) + P_0} \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Параметризуем функцию $\chi^n(p,P)$ в виде

$$\chi^n(p,P) = 2\pi\gamma \int dq \frac{\psi^n(q,P)}{(p-q)^2}, \quad (3.40)$$

где $\psi^n(p,P)$ — новая неизвестная функция. Подставляя (3.40) в (3.39), получаем два простых уравнения, определяющих $\psi^n(p,P)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sp} [\psi^n(q,P) \Phi_\pm^n(p,P)] = \pm 2\pi\delta(p-q). \quad (3.41)$$

С помощью формул из приложения можно найти решение этих уравнений:

$$\psi^n(p,P) = \text{sgn } n \Phi^{n+}(p,P), \quad (3.42)$$

и, значит,

$$\chi^n(p,P) = 2\pi\gamma \text{sgn } n \int dq \frac{\Phi^{n+}(q,P)}{(p-q)^2}, \quad (3.43)$$

что дает для амплитуды рассеяния кварка на кварке выражение [35]

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik,lm}(p, k, P_\mu) &= \frac{2\pi i \gamma}{(p-k)^2} (\gamma_0)_i (\gamma_0)_{km} - \\ &- i\gamma^2 \sum_n \frac{1}{P_0 - P_n^0} (\Gamma_n(p, P))_{im} (\bar{\Gamma}_n(k, P))_{kl} + \\ &+ i\gamma^2 \sum_n \frac{1}{P_0 + P_n^0} (\gamma_0 \bar{\Gamma}_n(P-p, P) \gamma_0)_{im} \times \\ &\times (\gamma_0 \Gamma_n(P-k, P) \gamma_0)_{kl}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Здесь в сумме по мезонам \sum_n присутствуют только возбуждения с $n > 0$.

Сделаем несколько замечаний по поводу решения (3.44). Прежде всего, заметим, что, поскольку волновая функция Φ^n содержит только симметричные матрицы γ_0 и γ_5 , $\Phi_{ab}^n = \Phi_{ba}^n$. Следовательно,

$$\Gamma_{ik,lm}(p, k, P_\mu) = \Gamma_{ml,ki}(p, k, P_\mu). \quad (3.45)$$

Другое замечание касается формы решения (3.44). Видно, что рассеяние кварка на кварке происходит через образование одномезонных промежуточных состояний, так что два последних слагаемых в (3.44) есть не что иное, как сумма по полным мезонным пропагаторам.

Таким образом, мы получили эффективную диаграммную технику, включающую пропагатор одетого кварка (3.1) (см. его окончательную форму (6.1)), одетую мезон-кварк-антикварковую амплитуду (Γ для входящего и $\bar{\Gamma}$ для исходящего мезонов, заданные в (3.8)), одетую амплитуду рассеяния кварка на кварке (3.44) и множитель $-i\gamma/\sqrt{N_c}$, сопровождающий каждую вершину, в которой мезон связан с кварк-антикварковой парой. Кроме того, каждая кварковая петля привносит два дополнительных множителя: стандартный фермионный (-1) и N_c от следа по цвету. Эти ингредиенты можно использовать в качестве составляющих при построении любого адронного процесса в теории.

3.5. Сохранение векторного и аксиально-векторного токов. Тожества Уорда

Как утверждалось в разделе 3.5, имея выражение для амплитуды рассеяния кварка на кварке, можно изучать свойства токов в модели 'т Хофта. Докажем сначала сохранение токов. В случае векторного тока нас интересует матричный элемент

$$V_\mu^M(P) = \langle \Omega | \bar{q} \gamma_\mu q | M, P \rangle, \quad (3.46)$$

диаграмма которого изображена на рис. 7а.

Выписывая соответствующий матричный элемент и выполняя интегрирование по энергии p_0 , находим

$$\begin{aligned} V_\mu^M &= i\gamma \sqrt{N_c} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \text{Sp} (S(p-P) \gamma_\mu S(p) \Gamma_M(p, P)) = \\ &= \sqrt{N_c} \int \frac{d^2 p}{2\pi} \text{Sp} (\gamma_\mu \Phi_M(p, P)). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Нетрудно проверить, что, умножив уравнение для связанных состояний (3.6) на $\gamma_0 \sqrt{N_c}/2\pi$, взяв след по спиновым индексам и проинтегрировав все члены

уравнения по импульсу p , можно получить соотношение

$$\begin{aligned} P_0^M \left[\sqrt{N_c} \int \frac{d^2 p}{2\pi} \text{Sp} (\gamma_0 \Phi_M(p, P)) \right] - \\ - P \left[\sqrt{N_c} \int \frac{d^2 p}{2\pi} \text{Sp} (\gamma_1 \Phi_M(p, P)) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Объединяя (3.48) с определением (3.47), приходим к закону сохранения векторного тока:

$$P_0^M V_0^M - P V^M = 0. \quad (3.49)$$

Аналогично, определяя аксиально-векторный ток как

$$A_\mu^M(P) = \langle \Omega | \bar{q} \gamma_\mu \gamma_5 q | M, P \rangle, \quad (3.50)$$

т.е. используя диаграмму, изображенную на рис. 7б, и повторяя те же самые действия с уравнением для связанных состояний с очевидной заменой $\gamma_0 \rightarrow \gamma_1$ в множителе, можно получить дивергенцию аксиально-векторного тока:

$$P_0^M A_0^M - P A^M = -2m \sqrt{N_c} \int \frac{d^2 k}{2\pi} \text{Sp} (\gamma_5 \Phi_M), \quad (3.51)$$

что в киральном пределе представляет собой закон сохранения аксиально-векторного тока.

Поучительно проследить, как те же самые соотношения возникают в гамильтоновом подходе. Сконцентрируемся только на сохранении векторного тока, так как аналогичный анализ для аксиально-векторного тока является непосредственным обобщением. Начнем с определения векторного тока

$$J_\mu(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu q(x). \quad (3.52)$$

Переформулируем соотношение (3.52) в терминах операторов рождения и уничтожения мезонов¹¹:

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 2\sqrt{N_c} \int \frac{d^2 P}{2\pi} \exp(iPx) \sum_n \exp(-iP_0^n x_0) m_n(P) \times \\ &\times \int \frac{d^2 p}{2\pi} g_n(p, P) f_0(p, P) + \text{э. с.}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} J(x) &= 2\sqrt{N_c} \int \frac{d^2 P}{2\pi} \exp(iPx) \sum_n \exp(-iP_0^n x_0) m_n(P) \times \\ &\times \int \frac{d^2 p}{2\pi} f_n(p, P) g_0(p, P) + \text{э. с.} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Функции $f_n(p, P)$ и $g_n(p, P)$ введены в (2.86), тогда как f_0 и g_0 являются другими обозначениями для пионных волновых функций f_π и g_π .

Вычисляя в явном виде соответствующий матричный элемент, находим

$$\begin{aligned} P_0^M V_0^M - P V^M &= i \langle \Omega | \partial_\mu J_\mu(0) | M, P \rangle = \\ &= 2\sqrt{N_c} \int \frac{d^2 p}{2\pi} [P_0^M g_M(p, P) f_0(p, P) - \\ &- P f_M(p, P) g_0(p, P)] = 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

¹¹ Заметим, что мы восстановили явную зависимость операторов m_n от времени в виде $m_n(x_0, P) = \exp(-iP_0^n x_0) m_n(P)$, где P_0^n — энергия n -го мезонного состояния с полным импульсом P .

Правая часть этого уравнения исчезает согласно уравнению для связанных состояний (2.40) или (3.6).

Обратимся теперь к исследованию формфакторов мезонов, определенных диаграммой, изображенной на рис. 9. Для этого в первую очередь нужно знать одетые ток-кварк-антикварковые вершины. Начнем с векторного тока.

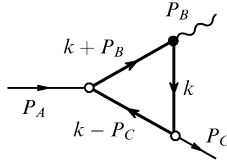


Рис. 9. Графическое представление для формфактора мезона.

Соответствующее выражение для диаграммы, представленной на рис. 10, имеет вид

$$(v_{\mu}^{kl}(p, P))_{\beta}^{\alpha} = i(\gamma_{\mu})_{kl} \delta_{\beta}^{\alpha} - \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} S_{da}(q) i(\gamma_{\mu})_{ab} \delta_{\delta}^{\gamma} \times \\ \times S_{bc}(q - P) \Gamma_{ck, ld}^{\delta\alpha, \beta\gamma}(q, p, P) = v_{\mu}^{kl} \delta_{\beta}^{\alpha}, \quad (3.56)$$

где, как и ранее, греческие и латинские символы обозначают цветовые и спинорные индексы. Подставляя в (3.56) явный вид амплитуды рассеяния кварка на кварке $\Gamma_{ck, ld}^{\delta\alpha, \beta\gamma}(q, p, P)$ из (3.44), находим [35]

$$v_{\mu}(p, P_{\mu}) = i\gamma_{\mu} + i\gamma \sum_n \frac{\bar{\Gamma}_n(p, P)}{P_0 - P_0^n} \int \frac{dq}{2\pi} \text{Sp}(\gamma_{\mu} \Phi_n(q, P)) - \\ - i\gamma \sum_n \frac{\gamma_0 \Gamma_n(P - p, P) \gamma_0}{P_0 + P_0^n} \int \frac{dq}{2\pi} \text{Sp}(\gamma_{\mu} \Phi_n^+(P - q, P)). \quad (3.57)$$

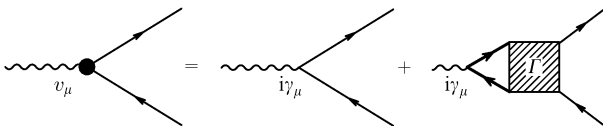


Рис. 10. Графическое представление для вершины, связывающей векторный ток с кварк-антикварковой парой.

После громоздких, но простых вычислений с использованием явного вида матричного уравнения для связанных состояний (3.6) и матричной волновой функции (3.7) можно доказать следующее соотношение:

$$-iP_{\mu} v_{\mu}(p, P) = S^{-1}(p) - S^{-1}(p - P). \quad (3.58)$$

Соотношение (3.58) является ни чем иным, как векторным тождеством Уорда для модели 'т Хофта. (Аналогичное выражение в калибровке светового фронта выведено в работе [4].)

Теперь нетрудно подставить решение (3.58) в матричный элемент, выписанный для диаграммы, изображенной на рис. 9, с векторным током вместо волнистой линии и получить закон сохранения векторного тока:

$$Q_{\mu} \langle M, P | v_{\mu} | M', P' \rangle = 0, \quad Q_{\mu} = P_{\mu} - P'_{\mu}. \quad (3.59)$$

Аналогичные вычисления дают следующий результат для аксиально-векторного тока в киральном пределе [35]:

$$a_{\mu}(p, P_{\mu}) = i\gamma_{\mu} \gamma_5 + i\gamma \sum_n \frac{\bar{\Gamma}_n(p, P)}{P_0 - P_0^n} \int \frac{dq}{2\pi} \text{Sp}(\gamma_{\mu} \gamma_5 \Phi_n(q, P)) - \\ - i\gamma \sum_n \frac{\gamma_0 \Gamma_n(P - p, P) \gamma_0}{P_0 + P_0^n} \int \frac{dq}{2\pi} \text{Sp}(\gamma_{\mu} \gamma_5 \Phi_n^+(P - q, P)), \quad (3.60)$$

$$-iP_{\mu} a_{\mu}(p, P) = S^{-1}(p) \gamma_5 + \gamma_5 S^{-1}(p - P), \quad (3.61)$$

$$Q_{\mu} \langle M, P | a_{\mu} | M', P' \rangle = 0, \quad Q_{\mu} = P_{\mu} - P'_{\mu}. \quad (3.62)$$

Соотношение (3.61) играет роль аксиально-векторного тождества Уорда.

В заключение заметим, что те же самые результаты можно получить, используя гамильтонов подход, но ценой более сложных вычислений и менее прозрачной интерпретации результатов в терминах диаграмм Фейнмана.

3.6. Пионная вершина

В случае пиона общую структуру мезонной вершины можно существенно упростить, поскольку известен явный вид пионной волновой функции. Действительно, подставляя решение (2.45) в (3.7), а затем в определение (3.8), находим [35]

$$\Gamma_{\pi}(p, P) = S^{-1}(p) (1 + \gamma_5) - (1 - \gamma_5) S^{-1}(p - P). \quad (3.63)$$

Поучительно сравнить выражение (3.63) с тождествами Уорда для векторного и аксиально-векторного токов из раздела 3.5, т.е. с уравнениями (3.58) и (3.61) соответственно. В результате приходим к следующему выражению для пионной вершины [35]:

$$\Gamma_{\pi}(p, P) = -iP_{\mu} v_{\mu}(p, P) - iP_{\mu} a_{\mu}(p, P). \quad (3.64)$$

Заметим, что связь пиона не только с аксиально-векторным током, но и с векторным током не должна вызывать удивления. Причина состоит в том, что в двух измерениях аксиально-векторный и векторный токи дуальны друг другу:

$$J_{\mu}^5(x) = \varepsilon_{\mu\nu} J^{\nu}(x), \quad (3.65)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu}$ — полностью антисимметричный двумерный тензор Леви–Чивиты.

4. Сильные распады

В данном разделе изучаются адронные процессы в модели 'т Хофта на примере распада $A \rightarrow B + C$. В разделах 4.1 и 4.2 вычисляется амплитуда данного распада с использованием гамильтонов и матричного подходов, обсуждаются ее свойства и связь с нерелятивистскими моделями. Раздел 4.3 посвящен выводу и обоснованию двумерного условия самосогласованности Адлера.

4.1. Подавленные слагаемые в гамильтониане

В разделе 2 мы развивали гамильтонов подход к двумерной КХД и диагонализовали гамильтониан модели в мезонном секторе. Обратимся теперь к поправкам к

гамильтониану (2.39), подавленным степенями N_c в знаменателе.

Лидирующая поправка к гамильтониану (2.39) имеет порядок $O(1/\sqrt{N_c})$ и происходит от членов, содержащих произведения MB , MD , M^+B и M^+D операторов, введенных в (2.25):

$$\begin{aligned} \Delta H = & -\frac{\gamma}{\sqrt{N_c}} \int \frac{dp dk dq dQ}{(2\pi)^3 (p-k)^2} \cos \frac{\theta(p) - \theta(k)}{2} \times \\ & \times \sin \frac{\theta(Q-p) - \theta(Q-k)}{2} \times \\ & \times [M^+(p, p-Q) M^+(k-Q, q) M(k, q) + \\ & + M^+(p-Q, p) M^+(q, k-Q) M(q, k) - \\ & - M^+(q, p) M(q, p-Q) M(k-Q, k) - \\ & - M^+(p, q) M(p-Q, q) M(k, k-Q)]. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Операторы M и M^+ можно переписать в терминах операторов рождения и уничтожения мезонных состояний в виде (см. также (2.35))

$$\begin{aligned} M^+(p, k) = & \sum_{n=0}^{\infty} [m_n^+(k-p) \varphi_+^n(k, k-p) - \\ & - m_n(p-k) \varphi_-^n(p, p-k)], \\ M(p, k) = & \sum_{n=0}^{\infty} [m_n(k-p) \varphi_+^n(k, k-p) - \\ & - m_n^+(p-k) \varphi_-^n(p, p-k)]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из (4.1) легко видеть, что данная поправка содержит трехмезонные вершины.

4.2. Амплитуда распада $A \rightarrow B + C$

Перейдем к изучению адронных процессов в модели 'т Хофта, причем наибольший интерес представляют сильные распады вида $A \rightarrow B + C$ [35]. Как отмечалось выше, в лидирующем по N_c порядке модель 'т Хофта описывает свободные мезоны (см. (2.39)), тогда как взаимодействие между ними содержится в подавленных членах, часть из которых восстановлена в разделе 4.1.

Таким образом, мы ожидаем, что амплитуда $M(A \rightarrow B + C)$ должна быть порядка $1/\sqrt{N_c}$, в то время как $M(A + B \rightarrow C + D) \sim 1/N_c$. В данном разделе нас интересует влияние возвратного движения, описываемого компонентой φ_- мезонной волновой функции, на упомянутую амплитуду распада.

Развитый выше гамильтонов подход представляет собой наиболее простой способ вычисления амплитуды сильного распада, поскольку все, что требуется теперь сделать, это вычислить матричный элемент

$$\begin{aligned} M(A \rightarrow B + C) = & \langle B(P_B) C(P_C) | H + \Delta H | A(P_A) \rangle = \\ = & \langle B(P_B) C(P_C) | \Delta H | A(P_A) \rangle. \end{aligned} \quad (4.3)$$

С помощью явного выражения (4.1) для оператора ΔH нетрудно найти общий вид искомой амплитуды в терминах мезонных волновых функций в системе покоя распадающейся частицы A ($P_A = 0$, $P_B = -P_C = p$) (см. работу [36], где обсуждается амплитуда распада, содер-

жащая шесть слагаемых):

$$\begin{aligned} M(A \rightarrow B + C) = & \frac{\gamma}{\sqrt{N_c}} \int \frac{dk dq}{(q-k)^2} \times \\ & \times \left\{ -\varphi_-^A(k+p, 0) \varphi_-^B(k+p, 0) \times \right. \\ & \times [c(-p, q, k) \varphi_+^C(q, -p) + s(-p, q, k) \varphi_-^C] - \\ & - \varphi_+^A(k+p, 0) \varphi_+^C(k, -p) [c(p, q+p, k+p) \varphi_+^B(q+p, p) + \\ & + s(p, q+p, k+p) \varphi_-^B(q+p, p)] - \\ & - \varphi_+^C(k, -p) \varphi_-^B(k+p, p) [s(0, q+p, k+p) \varphi_+^A(q+p, 0) + \\ & + c(0, q+p, k+p) \varphi_-^A(q+p, 0)] + \\ & + \varphi_-^C(k, -p) \varphi_+^B(k+p, p) [c(0, q+p, k+p) \varphi_+^A(q+p, 0) + \\ & + s(0, q+p, k+p) \varphi_-^A(q+p, 0)] + \\ & + \varphi_-^A(k+p, 0) \varphi_-^C(k, -p) [s(p, q+p, k+p) \varphi_+^B(q+p, p) + \\ & + c(p, q+p, k+p) \varphi_-^B(q+p, p)] + \\ & + \varphi_+^A(k+p, 0) \varphi_+^B(k+p, p) [s(-p, q, k) \varphi_+^C(q, -p) + \\ & \left. + c(-p, q, k) \varphi_-^C(q, -p)] \right\} + (B \leftrightarrow C, p \leftrightarrow -p), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} c(p, q, k) = & \cos \frac{\theta(k) - \theta(q)}{2} \sin \frac{\theta(p-k) - \theta(p-q)}{2}, \\ s(p, q, k) = & \sin \frac{\theta(k) - \theta(q)}{2} \cos \frac{\theta(p-k) - \theta(p-q)}{2}. \end{aligned}$$

Несмотря на довольно устрашающий вид, амплитуда (4.4) имеет простую структуру. Действительно, она содержит шесть слагаемых, т.е. в три раза больше, чем можно было бы наивно предположить, причем дополнительные слагаемые возникают исключительно благодаря наличию компоненты φ_- волновой функции мезона. Если в амплитуде (4.4) пренебречь возвратным движением и подставить в нее нерелятивистское выражение для угла θ ($\cos \theta(p) = 1$, $\sin \theta(p) = p/m$), то воспроизводится стандартное выражение для амплитуды распада мезона вследствие одноглюонного кулоновского обмена [37], модифицированное для двумерного случая. Тем не менее такая подстановка незаконна по кинематическим соображениям.

То же самое выражение для амплитуды можно получить с помощью матричного подхода. Для этого необходимо записать матричный элемент по диаграмме, изображенной на рис. 11:

$$\begin{aligned} M(A \rightarrow B + C) = & -\frac{i\gamma^3}{\sqrt{N_c}} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{Sp} [\Gamma_A(k + P_B, P_A) \times \\ & \times S(k - P_C) \bar{\Gamma}_C(k, P_C) S(k) \bar{\Gamma}_B(k + P_B, P_B) S(k + P_B)] + \\ & + (B \leftrightarrow C). \end{aligned} \quad (4.5)$$

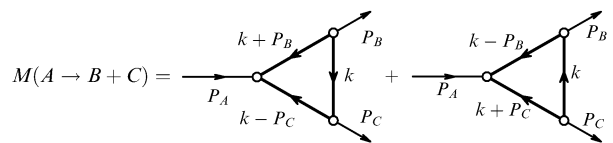


Рис. 11. Графическое представление для амплитуды распада $A \rightarrow B + C$.

Между тем матричный подход оказывается несколько удобнее при изучении амплитуды распада (4.4) и (4.5), так что мы будем использовать именно его в разделе 4.3 при изучении пионов в конечном состоянии.

4.3. Условие самосогласованности Адлера

Вернемся к проблеме пионов, а именно к их роли в адронных процессах. Прежде всего, напомним, что пионы испытывают наибольшее влияние возвратного движения $q\bar{q}$ -пары, описываемого компонентой φ_- волновой функции. Вместе с тем адронные процессы с пионами в конечном состоянии лучше всего исследованы экспериментально, так что любые теоретические предсказания, касающиеся влияния киральной природы пиона на адронные распады с его участием, представляются крайне важными. Модель 'т Хофта для двумерной КХД является одним из источников такой информации.

Итак, пусть мезон B будет пионом. Подставляя явный вид пионной вершины (3.63) в выражение (4.5) и выполняя простые алгебраические преобразования, можно прийти к изумляющему выводу, что [35]

$$M(A \rightarrow \pi + C) \equiv 0 \quad (4.6)$$

в киральном пределе. Заметим, что данный результат можно было бы предвидеть ввиду соотношения (3.64) и законов сохранения токов (3.59) и (3.62). Соотношение (4.6) есть не что иное, как двумерный аналог известного условия самосогласованности Адлера для амплитуды с участием мягких пионов [38]. Неудивительно, что ввиду безразмерности пионной константы f_π соотношение (4.6) остается справедливым при любых импульсах пиона, поскольку не существует масштаба, играющего роль границы применимости данного условия.

В заключение сделаем ряд замечаний относительно условия (4.6). Во-первых, пион оказывается стерильным, по крайней мере в лидирующем порядке по N_c . Применяя высказанные выше соображения о безразмерности константы f_π , можно обобщить данное условие на случай произвольного адронного процесса с участием пионов, так что пионы оказываются отщепленными от спектра в киральном пределе во всех порядках по N_c .

Формальная причина условия (4.6) состоит в деструктивной интерференции между компонентами φ_+ и φ_- пионной волновой функции. Как уже отмечалось, они оказываются одного порядка и, следовательно, все шесть слагаемых амплитуды (4.4) играют одинаково важную роль при установлении соотношения (4.6). Последнее наблюдение автоматически закрывает все попытки описать пион в рамках конституентной модели, когда все компоненты φ_- волновой функции отброшены. Более того, представляется крайне маловероятным, чтобы данный недостаток кварковых моделей в двумерной КХД, равно как и в четырехмерной КХД, можно было исправить простым способом, например домножением наивной амплитуды, содержащей два слагаемых, на дополнительные "магические" факторы [36] и т.д.

5. Заключение

Успешное применение кварковых моделей в феноменологии адронов говорит о том, что конституентные кварки действительно являются адекватными степе-

нями свободы в непертурбативной области. В этих моделях низшее кварк-антикварковое состояние 1S_0 существует на тех же основаниях, что и все остальные мезоны. Как отмечалось выше, нет прямых подтверждений того, что конфайнмент и спонтанное нарушение киральной инвариантности связаны между собой в четырехмерной КХД. Тем не менее, если это не так, то в рамках конституентных моделей мы приходим к противоречию: существуют два пиона, один из которых является связанным кварковым состоянием, а другой отвечает за нарушение киральной симметрии. Выходом из сложившегося положения, конечно, мог бы служить отказ от кварковых моделей. Однако проще все же иметь конфайнмент и нарушение киральной инвариантности, генерируемыми одним и тем же механизмом.

Развитие данного подхода в четырехмерной КХД является непростой задачей. Модели, развитые в работах [15, 16], включают в себя основные составляющие, такие как уравнение для щели типа (2.13) и уравнение Бете–Салпитера, подобное (2.40). Наличие кирально-неинвариантного решения уравнения для щели подразумевает наличие голдстоуновского бозона как низшего $q\bar{q}$ -состояния. Компоненты φ_+ и φ_- волновой функции этого состояния совпадают в его системе покоя, аксиально-векторный ток сохраняется в киральном пределе, а также выполняются все соотношения алгебры токов. Между тем компоненты φ_- волновой функции для других мезонов не столь велики, и для высших кварковых восстанавливается вырождение по четности.

К сожалению, все привлекательные черты, перечисленные выше, существуют ценой того, что удерживающее взаимодействие выбрано в форме временной компоненты векторного потенциала. Прежде всего, нековариантность модели не позволяет продвинуться с использованием техники, описанной в настоящем обзоре, в частности оказывается невозможным совершать лоренцевы бусты и, значит, описывать сильные распады. Есть и другой, более критичный недостаток: такая модель несовместна с законом площади для изолированной петли Вильсона, причем это имеет место не только для моделей с потенциалом взаимодействия, выбранным в виде трехмерного осциллятора [15]. Та же проблема остается и для более реалистичных моделей с линейным потенциалом (см., например, работу [39]). Причина состоит в том, что закон площади приводит к линейному потенциалу только для тяжелых конституентов. Кроме того, утраченная калибровочная инвариантность — это еще одно, причем довольно сильное, возражение.

Подход, предложенный в работе [17], является многообещающим во всех отношениях. Введенное в данном подходе взаимодействие конфайнмента параметризуется полевыми корреляторами, воспроизводящими закон площади. Корреляторы являются лоренц-инвариантными, причем калибровочная инвариантность также имеет место. Последнее свойство обеспечивается использованием обобщенной калибровки Фока–Швингера, приводящей к глюонным корреляторам, явно зависящим от контура и, как следствие, имеющим явный трансляционно неинвариантный вид. Простой двумерный аналог такого коррелятора дан в (2.55).

Таким образом, задача становится довольно-таки сложной технически, тем не менее она является физиче-

ски прозрачной. Действительно, такого рода взаимодействия описывает струну между конститuentами (последние достижения в этом направлении см. в работе [40]). Те же самые корреляторы ответственны за образование кирального конденсата [17]. По нашему мнению, кварковая модель, следующая из данного формализма, должна описывать все кварк-антикварковые связанные состояния, включая пион.

В заключение еще раз отметим необходимость построения реалистичной модели в четырех измерениях, в которой пионное решение играло бы двойную роль: будучи истинным $q\bar{q}$ -состоянием, оно являлось бы и голдстоуновским бозоном. Двумерная модель 'т Хофта представляет собой прекрасный пример того, как это могло бы происходить в Природе.

Авторы выражают благодарность Ю.А. Симонову за идею написания обзора и стимулирующие обсуждения, П. Бикудо, Ж.Э. Рибейро за помощь в изучении свойств вакуума теории и полезные рекомендации, П. Марису за прочтение рукописи обзора и критические замечания. Авторы также признательны персоналу Centro de Física das Interações Fundamentais (CFIF-IST) за теплый прием во время их посещения Лиссабона.

Работа выполнена при поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований (00-02-17836, 00-15-96786, 01-02-06273), ИНТАС-РФФИ (IR-97-232) и ИНТАС CALL (2000, № 110).

6. Приложение

Приведем некоторые формулы, полезные при матричном подходе.

Одетую функцию Грина (3.1) можно переписать в более удобной форме с помощью проекторов (2.11):

$$S(p) = \frac{A_+(p)\gamma_0}{p_0 - E(p) + i\varepsilon} + \frac{A_-(p)\gamma_0}{p_0 + E(p) - i\varepsilon}. \quad (6.1)$$

Как упоминалось выше, следует быть осторожным со знаком дисперсии $E(p)$, удерживая произведение $\varepsilon E(p)$ при объединении вместе двух дробей в формуле (6.1) [2]. Пропагатор (6.1) уже содержит в себе все радиационные поправки и его необходимо приписывать всем внутренним кварковым линиям (толстые линии на диаграммах).

Представляется удобным разделить матричную волновую функцию (3.7) на две части посредством проекторов¹² (2.11):

$$\begin{aligned} \Phi_\eta(p, P) &= A_\eta(p)\Phi(p, P)A_{\bar{\eta}}(P-p), \\ \Phi(p, P) &= \Phi_\eta(p, P) + \Phi_{\bar{\eta}}(p, P), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где индексы $\eta = +$, $\bar{\eta} = -$ или, наоборот, $\eta = -$, $\bar{\eta} = +$. Тогда соотношение полноты для функций Φ принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_n \text{Sp} [\Phi_+^{n+}(p, P)\Phi_+^n(q, P) - \Phi_-^{n+}(p, P)\Phi_-^n(q, P)] &= \\ = 2\pi\delta(p-q), \end{aligned} \quad (6.3)$$

что можно легко вывести, используя соответствующие свойства функций φ_\pm и соотношения

$$\begin{aligned} \text{Sp} [\Phi_\eta^{n+}(p, P)\Phi_{\bar{\eta}}^m(q, P)] &= \varphi_\eta^n(p, P)\varphi_{\bar{\eta}}^m(q, P) \times \\ &\times \left[\delta_{\eta\bar{\eta}} \cos \frac{\theta(p) - \theta(q)}{2} \cos \frac{\theta(P-p) - \theta(P-q)}{2} - \right. \\ &\left. - \delta_{\eta\bar{\eta}} \sin \frac{\theta(p) - \theta(q)}{2} \sin \frac{\theta(P-p) - \theta(P-q)}{2} \right]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Приведем еще два соотношения, полезные при выводе кварк-кварковой амплитуды рассеяния:

$$\Phi_\eta^{-n}(p, P) = \eta_n \Phi_\eta^{n+}(P-p, P), \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \text{Sp} [\Phi^{n+}(P-p, P)\Phi_\eta^m(P-q, P)] &= \\ = \eta_n \eta_m \text{Sp} [\Phi^{n+}(p, P)\Phi_\eta^m(q, P)]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Индексы η и $\bar{\eta}$ в формулах (6.5) и (6.6) определены выше, а индекс η_n связан с пространственной четностью состояния (см. (2.44)).

Непосредственно из уравнения для связанных состояний (2.40) следуют формулы

$$\begin{aligned} A_\eta(p)\gamma_0\Gamma(p, P)A_{\bar{\eta}}(p-P)\gamma_0 &= \\ = \frac{1}{\gamma} [E(p) + E(P-p) - \eta P_0] A_\eta(p)\Phi(p, P)A_{\bar{\eta}}(p-P) &= \\ = \frac{1}{\gamma} [E(p) + E(P-p) - \eta P_0] \Phi_\eta(p, P), \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} A_\eta(p-P)\gamma_0\bar{\Gamma}(p, P)A_{\bar{\eta}}(p)\gamma_0 &= \\ = \frac{1}{\gamma} [E(p) + E(P-p) + \eta P_0] \times \\ \times A_\eta(p-P)\gamma_0\Phi^+(p, P)A_{\bar{\eta}}(p)\gamma_0 &= \\ = \frac{1}{\gamma} [E(p) + E(P-p) + \eta P_0] \gamma_0\Phi_\eta^+(p, P)\gamma_0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

С помощью соотношений (2.43) и (2.44) можно найти

$$\Gamma_n(P-p, P) = \eta_n \gamma_0 \bar{\Gamma}_{-n}(p, P) \gamma_0. \quad (6.9)$$

Список литературы

1. 't Hooft G *Nucl. Phys. B* **75** 461 (1974)
2. Bars I, Green M B *Phys. Rev. D* **17** 537 (1978)
3. Callan C G (Jr), Coote N, Gross D J *Phys. Rev. D* **13** 1649 (1976)
4. Einhorn M B *Phys. Rev. D* **14** 3451 (1976)
5. Li M *Phys. Rev. D* **34** 3888 (1986); Li M, Willets L, Birse M C *J. Phys. G* **13** 915 (1987)
6. Житницкий А Р *ЯФ* **43** 999 (1986); **44** 139 (1986); Zhitnitsky A R *Phys. Rev. D* **53** 5821 (1996)
7. Burkardt M *Phys. Rev. D* **53** 933 (1996)
8. Lenz F et al. *Ann. Phys. (New York)* **208** 1 (1991)
9. Blok B, Shifman M, Zhang D-X *Phys. Rev. D* **57** 2691 (1998)
10. Bigi I et al. *Phys. Rev. D* **59** 054011 (1999)
11. Hornbostel K, Brodsky S J, Pauli H-C *Phys. Rev. D* **41** 3814 (1990)
12. Dalley S, Klebanov I R *Phys. Rev. D* **47** 2517 (1993)
13. Vento V *Nucl. Phys. A* **689** 223 (2001); nucl-th/0010014; in *Proc. of the XVII European Conf. on Few-Body Problems in Physics* (in press)
14. Karsch F, in *Strong and Electroweak Matter '98, Copenhagen, Denmark, 2-5 December 1998* (Eds) J Ambjörn et al. (Singapore: World Scientific, 1999) p. 101; hep-lat/9903031

¹² Ниже мы опускаем индекс, нумерующий мезонные состояния, оставляя его только в случае необходимости.

15. Le Yaouanc A et al. *Phys. Rev. D* **29** 1233 (1984); Le Yaouanc A et al. *Phys. Rev. D* **31** 137 (1985)
16. Bicudo P J A, Ribeiro J E F T *Phys. Rev. D* **42** 1611, 1625, 1635 (1990); Bicudo E F T *Phys. Rev. C* **60** 035209 (1999)
17. Simonov Yu A *ЯФ* **60** 2252 (1997)
18. Witten E *Nucl. Phys. B* **145** 110 (1978)
19. Coleman S *Commun. Math. Phys.* **31** 259 (1973)
20. Kikkawa K *Ann. Phys.* **66** 3633 (1981); Nakamura A, Odaka K *Phys. Lett. B* **105** 392 (1981); *Nucl. Phys. B* **202** 457 (1982); Rajeev S G *Int. J. Mod. Phys. A* **9** 5583 (1994); Dhar A, Mandal C, Wadia S R *Phys. Lett. B* **329** 15 (1994); Dhar A et al. *Int. J. Mod. Phys. A* **10** 15 (1995); Cavicchi M *Int. J. Mod. Phys. A* **10** 167 (1995); Itakura K *Phys. Rev. D* **54** 2853 (1996)
21. Dosch H G *Phys. Lett. B* **190** 177 (1987); Dosch H G, Simonov Yu A *Phys. Lett. B* **205** 339 (1988); Simonov Yu A *Nucl. Phys. B* **307** 512 (1988); Симонов Ю А *ЯФ* **54** 192 (1991)
22. Di Giacomo A et al., hep-ph/0007223
23. Bicudo P J A, Nefediev A V, Ribeiro J E F T *Phys. Rev. D* (в печати)
24. Gross D J, Neveu A *Phys. Rev. D* **10** 3235 (1974)
25. Rembiesa P *Phys. Rev. D* **24** 1647 (1981); Ojima I, Fukada R *Prog. Theor. Phys.* **57** 1720 (1977)
26. Kalashnikova Yu S, Nefediev A V, Volodin A V *ЯФ* **63** 1710 (2000)
27. Bars I, Hanson A J *Phys. Rev. D* **13** 1744 (1976); Bardeen W A et al. *Phys. Rev. D* **13** 2364 (1976); Kalashnikova Yu S, Nefediev A V *Phys. Lett. B* **399** 274 (1997)
28. Kalashnikova Yu S, Nefediev A V *ЯФ* **62** 359 (1999)
29. Balitsky I I *Nucl. Phys. B* **254** 166 (1985)
30. Nefediev A V, talk given at the *Third Intern. Conf. in Quark Confinement and Hadron Spectrum (Confinement III)*, Newport News, VA, USA, 7–12 June 1998; hep-ph/9808208
31. Shevchenko V, Simonov Yu *Phys. Rev. Lett.* **85** 1811 (2000)
32. Brambilla N, Vairo A *Phys. Lett. B* **407** 167 (1997)
33. Kalashnikova Yu S, Nefediev A V *Phys. Lett. B* **414** 149 (1997)
34. Gell-Mann M, Oakes R J, Renner B *Phys. Rev.* **175** 2195 (1968)
35. Kalashnikova Y S, Nefediev A V *Phys. Lett. B* **487** 371 (2000)
36. Swanson E S, in *Proc. CMU/JLab Workshop on Physics with High Energy Photons*, Jefferson Lab (1998)
37. Ackleh E S, Barnes T, Swanson E S *Phys. Rev. D* **54** 6811 (1996)
38. Adler S L *Phys. Rev.* **139** B1638 (1965)
39. Szczepaniak A P, Swanson E S *Phys. Rev. D* **55** 1578 (1997); Llanes-Estrada F J, Cotanch S R *Nucl. Phys. A* **697** 303 (2002); hep-ph/0101078
40. Simonov Yu A, Tjon J A *Phys. Rev. D* **62** 014501, 094511 (2000)

Two-dimensional QCD in the Coulomb gauge

Yu.S. Kalashnikova

*Institute of Theoretical and Experimental Physics,
B. Chermushkinskaya ul. 25, 117218 Moscow, Russian Federation
Tel. (7-095) 129-94 15
E-mail: yulia@heron.itep.ru*

A.V. Nefed'ev

*Institute of Theoretical and Experimental Physics,
B. Chermushkinskaya ul. 25, 117218 Moscow, Russian Federation
Centro de Física das Interações Fundamentais (CFIF), Departamento de Física, Instituto Superior Técnico,
Av. Rovisco Pais, P-1049-001 Lisboa, Portugal*

Various aspects of the 't Hooft model for two-dimensional QCD in the limit of infinite number of colours in the Coulomb gauge are discussed. The properties of mesonic excitations are studied, with special emphasis on the pion. Attention is paid to the dual role of the pion, which, while a genuine $q\bar{q}$ state, is a Goldstone boson of two-dimensional QCD as well. In particular, the validity of the soft-pion theorems is demonstrated. It is shown that the Coulomb gauge is the most suitable choice for the study of hadronic observables involving pions.

PACS numbers: 11.10.Kk, 11.15.Pg, 12.38.Aw

Bibliography — 40 references

Received 10 July 2001, revised 5 November 2001