



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Ершов, Препятствия к вложению расслоений матричных алгебр в тривиальное расслоение,
Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика,
2009, том 9, выпуск 3, 27–33

<https://www.mathnet.ru/isu56>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

18 мая 2025 г., 10:45:30





5. Alidrisi M. Optimal control of the service rate of an exponential queueing network using Markov decision theory // Intern. J. Syst. Sci. 1990. V. 21. P. 2553–2563.
6. Bruell S.C., Balbo G., Afshari P.V. Mean value analysis of mixed, multiple class BCMP networks with load dependent service stations // Performance Evaluation. 1984. V. 4. P. 241–260.
7. Mitra D., McKenna J. Asymptotic expansions for closed Markovian networks with state-dependent service rates // J. of the Association for Computing Machinery. 1986. V. 33, № 3. P. 568–592.
8. Ляхов А.И. Асимптотический анализ замкнутых сетей очередей, включающих устройства с переменной интенсивностью обслуживания // Автоматика и телемеханика. 1997. № 3. С. 131–143.
9. Mandelbaum A., Massey W.A., Reiman M.I. Strong approximations for Markovian service networks // Queueing Systems. 1998. V. 30. P. 149–201.
10. Митрофанов Ю.И., Долгов В.И. Динамическое управление интенсивностями обслуживания в сетях массового обслуживания // АВТ. 2008. № 6. С. 44–56.
11. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. М.: Наука, ГРФМЛ, 1969. 512 с.
12. Митрофанов Ю.И. Анализ сетей массового обслуживания. Саратов: Науч. книга, 2005. 175 с.

УДК 515.14

ПРЕПЯТСТВИЯ К ВЛОЖЕНИЮ РАССЛОЕНИЙ МАТРИЧНЫХ АЛГЕБР В ТРИВИАЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ

А.В. Ершов

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: ershov.andrei@gmail.com

В работе изучаются топологические препятствия к вложению $M_k(\mathbb{C})$ -расслоения в тривиальное $M_{kl}(\mathbb{C})$ -расслоение при условии $(k, l) = 1$. Описана также связь рассматриваемой задачи с теорией расслоений со структурным группоидом.

Ключевые слова: расслоение, топологическое препятствие, характеристический класс, группоид.

1. КОГОМОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРЕПЯТСТВИЙ

1.1. Постановка задачи. Пусть X — конечное клеточное пространство, $A_k \xrightarrow{\pi} X$ — локально тривиальное расслоение со слоем комплексная матричная алгебра $M_k(\mathbb{C})$ (таким образом, его «естественной» структурной группой является $\text{Aut}(M_k(\mathbb{C})) \cong \text{PGL}_k(\mathbb{C})$). Зафиксируем натуральное l , взаимно простое с k . Наша задача — описать топологические препятствия к существованию отображения расслоений над X :

$$\mu: A_k \rightarrow X \times M_{kl}(\mathbb{C}), \quad (1)$$

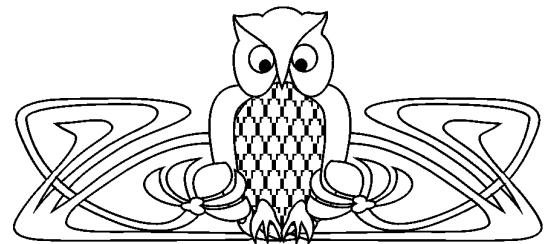
такого что для любой точки $x \in X$ ограничение $\mu|_x$ вкладывает слой $(A_k)_x$ в $M_{kl}(\mathbb{C})$ в качестве унитарной подалгебры.

1.2. Конструкция препятствий. Чтобы применить стандартную технику топологической теории препятствий, сведем задачу о вложениях к задаче о сечениях подходящего расслоения.

Заметим, что группы $\text{PGL}_n(\mathbb{C})$ можно заменить их компактными деформационными ретрактами $\text{PU}(n)$, рассматривая вместо всех унитарных гомоморфизмов матричных алгебр только их $*$ -гомоморфизмы.

Пусть $\text{Hom}_{alg}(M_k(\mathbb{C}), M_{kl}(\mathbb{C}))$ — множество всех унитарных $*$ -гомоморфизмов $M_k(\mathbb{C}) \rightarrow M_{kl}(\mathbb{C})$. Из теоремы Нетер – Сколема [1] следует его представление

$$\text{Hom}_{alg}(M_k(\mathbb{C}), M_{kl}(\mathbb{C})) \cong \text{PU}(kl)/(\mathbb{E}_k \otimes \text{PU}(l)) \quad (2)$$



Obstructions to Embedding of Matrix Algebra Bundles into a Trivial One

A.V. Ershov

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: ershov.andrei@gmail.com

Topological obstructions to embedding of an $M_k(\mathbb{C})$ -bundle into a trivial $M_{kl}(\mathbb{C})$ -bundle under the condition $(k, l) = 1$ are studied. The relation of this problem to the theory of bundles with a structure groupoid is described.

Key words: bundle, topological obstruction, characteristic class, groupoid.



(здесь и ниже символ \otimes обозначает кронекерово произведение матриц) в виде однородного пространства группы $PU(kl)$. Это пространство обозначим $Gr_{k,l}$. Полученное представление и периодичность Ботта позволяют вычислить его стабильные гомотопические группы:

$$\pi_r(Gr_{k,l}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \text{ для } r \text{ нечетного и } \pi_r(Gr_{k,l}) = 0 \text{ для } r \text{ четного.} \quad (3)$$

Пусть $A_k^{univ} \rightarrow BPU(k)$ – универсальное $M_k(\mathbb{C})$ -расслоение. Применяя функтор (со значениями в категории топологических пространств) $\text{Hom}_{alg}(\dots, M_{kl}(\mathbb{C}))$ послойно к A_k^{univ} , получаем расслоение

$$H_{k,l}(A_k^{univ}) \xrightarrow{p_{k,l}} BPU(k) \quad (4)$$

со слоем $Gr_{k,l}$.

Пусть $f: X \rightarrow BPU(k)$ – классифицирующее отображение для $A_k \xrightarrow{\pi} X$, т.е. $A_k = f^*(A_k^{univ})$.

Предложение 1. Существует взаимно однозначное соответствие между вложениями (1) и подъемами в (4)

$$\tilde{f}: X \rightarrow H_{k,l}(A_k^{univ}), \quad p_{k,l} \circ \tilde{f} = f,$$

классифицирующего отображения f .

Доказательство очевидно. \square

1.3. Первое препятствие. Применяя теорию препятствий, с учетом (3) получаем, что первое препятствие к существованию подъема \tilde{f} – некоторый характеристический класс $\bar{\omega}_1(A_k) = f^*\bar{\omega}_1 \in H^2(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ расслоения $A_k \xrightarrow{\pi} X$, где $\bar{\omega}_1 \in H^2(BPU(k), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$.

Теорема 1. Класс $\bar{\omega}_1$ – образующая в $H^2(BPU(k), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Доказательство. Идея состоит в том, что существует гомотопическая эквивалентность $\tau_{k,l}: H_{k,l}(A_k^{univ}) \simeq Gr_{k,l}$ между тотальным пространством расслоения (4) и так называемым матричным грассманианом

$$Gr_{k,l} := PU(kl)/(PU(k) \otimes PU(l)) \quad (5)$$

– однородным пространством, параметризующим унитарные $*$ -подалгебры в $M_{kl}(\mathbb{C})$, изоморфные $M_k(\mathbb{C})$ (k -подалгебры). Отображение $\tau_{k,l}$ задается так: для $h \in H_{k,l}(A_k^{univ})$, $p_{k,l}(h) = x$ $\tau_{k,l}(h)$ есть точка в $Gr_{k,l}$, отвечающая k -подалгебре $h((A_k^{univ})_x) \subset M_{kl}(\mathbb{C})$. Заметим, что $\tau_{k,l}$ в действительности есть расслоение со стягиваемыми слоями $BPU(k)$ (последнее обозначает тотальное пространство универсального $PU(k)$ -расслоения).

Представление (2) показывает, что $Gr_{k,l}$ имеет структуру главного $PU(k)$ -расслоения над $Gr_{k,l}$. Пусть $\lambda_{k,l}: Gr_{k,l} \rightarrow BPU(k)$ – его классифицирующее отображение. Тогда нетрудно показать, что $\lambda_{k,l} \circ \tau_{k,l} \simeq p_{k,l}$. Теперь, используя условие $(k, l) = 1$, мы можем вычислить интересующий нас кусок гомотопической последовательности расслоения (4):

$$\pi_2(H_{k,l}(A_k^{univ})) = 0 \rightarrow \pi_2(BPU(k)) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \pi_1(Gr_{k,l}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(H_{k,l}(A_k^{univ})) = 0.$$

Рассмотрим гомоморфизм групп $\pi_2(BPU(k)) \rightarrow H^2(S^2, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$, $[g] \mapsto g^*\bar{\omega}_1$, где $[g]$ обозначает гомотопический класс отображения $g: S^2 \rightarrow BPU(k)$. Это изоморфизм. Действительно, в силу $\pi_2(H_{k,l}(A_k^{univ})) = 0$ мы видим, что подъем в (4) существует только для отображения $g: S^2 \rightarrow BPU(k)$, гомотопический класс которого тривиален, а значит, из $[g] \neq 0$ следует $g^*\bar{\omega}_1 \neq 0$, поскольку это единственное препятствие в данном случае. \square

Легко видеть, что характеристический класс $f^*\bar{\omega}_1$ может быть также описан, как препятствие к редукции структурной группы расслоения $A_k = f^*(A_k^{univ})$ с $PU(k)$ до $SU(k)$. Поэтому структурная группа всякого расслоения A_k , допускающего вложение в $X \times M_{kl}(\mathbb{C})$, $(k, l) = 1$, редуцируется к $SU(k)$.

Рассмотрим случай, когда $A_k = \text{End}(\xi_k)$, где $\xi_k \rightarrow X$ – векторное \mathbb{C}^k -расслоение (заметим, что препятствием к такому представлению является класс $\delta(\bar{\omega}_1(A_k)) \in H^3(X, \mathbb{Z})$, где $\delta: H^2(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X, \mathbb{Z})$ – кограничный гомоморфизм, отвечающий коэффицентной последовательности $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \rightarrow 0$).

Теорема 2. Для $A_k = \text{End}(\xi_k)$ первое препятствие в рассматриваемой задаче есть $c_1(\xi_k) \bmod k \in H^2(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$, где c_1 – первый класс Чженя.



Доказательство. Конструкцию, аналогичную той, которая привела к (4), можно применить к $\text{End}(\xi_k^{univ}) \rightarrow \text{BU}(k)$, где $\xi_k^{univ} \rightarrow \text{BU}(k)$ — универсальное векторное \mathbb{C}^k -расслоение; это даст $\text{Fr}_{k,l}$ -расслоение:

$$\text{H}_{k,l}(\text{End}(\xi_k^{univ})) \rightarrow \text{BU}(k). \quad (6)$$

Это расслоение — обратный образ (4) относительно отображения классифицирующих пространств $\vartheta_k: \text{BU}(k) \rightarrow \text{BPU}(k)$, индуцированного гомоморфизмом групп $\text{U}(k) \rightarrow \text{PU}(k)$, являющимся факторизацией по центру. Отсюда легко видеть, что первое препятствие к существованию вложения для $\text{End}(\xi_k)$ есть характеристический класс $\omega_1 := \vartheta_k^*(\bar{\omega}_1) \in H^2(\text{BU}(k), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$, который равен $c_1 \bmod k$. \square

То, что $c_1 \bmod k$ является препятствием к редукции структурной группы расслоения $\text{End}(\xi_k)$ к $\text{SU}(k)$, показывает следующее рассуждение. Имеем $c_1(\xi_k) \equiv 0 \bmod k \Leftrightarrow c_1(\xi_k) = k\alpha$, $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z})$. Возьмем линейное расслоение $\zeta \rightarrow X$, такое что $c_1(\zeta) = -\alpha$. Тогда $c_1(\xi_k \otimes \zeta) = c_1(\xi_k) + kc_1(\zeta) = 0$, т.е. $\xi_k \otimes \zeta$ есть расслоение со структурной группой $\text{SU}(k)$. С другой стороны, $\text{End}(\xi_k) = \text{End}(\xi_k \otimes \zeta)$.

1.4. Второе препятствие. Предположим теперь, что для расслоения $A_k \xrightarrow{\pi} X$ первое препятствие равно 0, тогда, как мы показали ранее, $A_k \cong \text{End}(\tilde{\xi}_k)$, где $\tilde{\xi}_k \rightarrow X$ — векторное \mathbb{C}^k -расслоение со структурной группой $\text{SU}(k)$. Эквивалентно, классифицирующее отображение $f: X \rightarrow \text{BPU}(k)$ можно поднять до $\hat{f}: X \rightarrow \text{BSU}(k)$. Из (3) теперь мы видим, что следующее препятствие лежит в $H^4(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$.

Теорема 3. Второе препятствие — в точности $c_2(\tilde{\xi}_k) \bmod k$, второй класс Чженя расслоения $\tilde{\xi}_k$, приведенный по модулю k .

Доказательство. Заметим, что пространство $\tilde{\text{Fr}}_{k,l} := \text{SU}(kl)/(E_k \otimes \text{SU}(l))$ — универсальное накрытие для $\text{Fr}_{k,l}$ (ср. (2)). Заметим также, что конструкция расслоения (4) показывает, что оно ассоциировано с универсальным главным $\text{PU}(k)$ -расслоением $\text{EPU}(k) \rightarrow \text{BPU}(k)$ относительно соответствующего (правого) действия $\text{PU}(k)$ на слое $\text{Fr}_{k,l} = \text{Hom}_{alg}(M_k(\mathbb{C}), M_{kl}(\mathbb{C}))$.

Легко видеть, что существует коммутативная диаграмма расслоений:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Fr}_{k,l} & \longrightarrow \text{EPU}(k) \times_{\text{PU}(k)} \text{Fr}_{k,l} \\ & \nearrow & \searrow \simeq \\ \tilde{\text{Fr}}_{k,l} & \longrightarrow \text{ESU}(k) \times_{\text{SU}(k)} \tilde{\text{Fr}}_{k,l} & \xrightarrow{p_{k,l}} \text{BPU}(k) \\ & \downarrow & \nearrow \\ & \text{BSU}(k) & \end{array} \quad (7)$$

Здесь $p_{k,l}$ — расслоение (4), причем тотальные пространства гомотопически эквивалентны. Из $\pi_3(\tilde{\text{Fr}}_{k,l}) = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ следует, что препятствие есть характеристический класс $\omega_2 \in H^4(\text{BSU}(k), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$. Поскольку $c_2(\tilde{\xi}_k^{univ}) \bmod k$, где $\tilde{\xi}_k^{univ} \rightarrow \text{BSU}(k)$ — универсальное $\text{SU}(k)$ -расслоение, является образующей для $H^4(\text{BSU}(k), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, имеем:

$$\omega_2 = \alpha c_2(\tilde{\xi}_k^{univ}) \bmod k \in H^4(\text{BSU}(k), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}), \quad \alpha \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Кусок гомотопической последовательности для нижнего расслоения в (7)

$$\pi_4(\tilde{\text{Fr}}_{k,l}) \rightarrow \pi_4(\text{ESU}(k) \times_{\text{SU}(k)} \tilde{\text{Fr}}_{k,l}) \rightarrow \pi_4(\text{BSU}(k)) \rightarrow \pi_3(\tilde{\text{Fr}}_{k,l}) \rightarrow \pi_3(\text{ESU}(k) \times_{\text{SU}(k)} \tilde{\text{Fr}}_{k,l})$$

имеет вид

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Следовательно, образ $\pi_4(\text{ESU}(k) \times_{\text{SU}(k)} \tilde{\text{Fr}}_{k,l}) \hookrightarrow \pi_4(\text{BSU}(k))$ — подгруппа индекса k . Полагая $X = S^4$ и рассуждая, как в конце доказательства теоремы 1, получаем, что α в (8) обратимо по модулю k . \square

1.5. Высшие препятствия. В общем случае «высшие» препятствия лежат в $H^{2r}(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$, $r \in \mathbb{N}$, но для $r > 2$ они уже не совпадают с обычными классами Чженя, приведенными по модулю k .



Чтобы это показать, возьмем $X = S^8$ и рассмотрим 6-мерное векторное расслоение $\xi_6 \rightarrow S^8$. Хорошо известно [2], что для S^{2r} классы Чженя векторных расслоений образуют подгруппу индекса $(r - 1)!$ в $H^{2r}(S^{2r}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. В частности, в нашем случае $r = 4, k = 6$ имеем $c_4(\xi_6) \equiv 0 \pmod{6}$, но из гомотопической последовательности расслоения (4) следует, что не каждое такое расслоение имеет подъем.

Однако теоремы 2 и 3 можно обобщить следующим образом. Пусть $\iota: \text{BU}\langle 2r \rangle \rightarrow \text{BU} - (2r - 1)$ -связное накрытие BU (т.е. его первая нетривиальная гомотопическая группа лежит в размерности $2r$). Например, $\text{BU}\langle 2 \rangle = \text{BU}, \text{BU}\langle 4 \rangle = \text{BSU}, \dots$ Тогда известно [3], что образ r -го класса Чженя при гомоморфизме $\iota^*: H^*(\text{BU}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(\text{BU}\langle 2r \rangle, \mathbb{Z})$ делится на $(r - 1)!$ (заметим, что этот результат обобщает приведенный выше факт о классах Чженя расслоений над сферами). Положим $\tilde{c}_r := \frac{\iota^*(c_r)}{(r-1)!}$.

Теорема 4. Для расслоений, классифицируемых $\text{BU}\langle 2r \rangle$, первое нетривиальное препятствие в нашей задаче есть класс $\tilde{c}_r \pmod{k}$.

Доказательство. Для $(2r - 1)$ -связного накрытия $\iota_k: \text{BU}(k)\langle 2r \rangle \rightarrow \text{BU}(k), k > r$ пространства $\text{BU}(k)$ рассмотрим $\text{Fr}_{k,l}$ -расслоение $\iota_k^*(\text{H}_{k,l}(\text{End}(\xi_k^{\text{univ}}))) \rightarrow \text{BU}(k)\langle 2r \rangle$, индуцированное из (6). Ясно, что первое препятствие к подъему в этом расслоении — некоторый характеристический класс $\omega_r \in H^{2r}(\text{BU}(k)\langle 2r \rangle, \pi_{2r-1}(\text{Fr}_{k,l})) = H^{2r}(\text{BU}(k)\langle 2r \rangle, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Используя гомотопическую последовательность расслоения, нетрудно посчитать, что $\pi_{2r}(\iota_k^*(\text{H}_{k,l}(\text{End}(\xi_k^{\text{univ}})))) \cong \mathbb{Z}$ и что образ вложения $\pi_{2r}(\iota_k^*(\text{H}_{k,l}(\text{End}(\xi_k^{\text{univ}})))) \hookrightarrow \pi_{2r}(\text{BU}(k)\langle 2r \rangle) \cong \mathbb{Z}$ — подгруппа индекса k . Теперь, используя аргумент с S^{2r} как в конце предыдущего доказательства, получаем, что для расслоения $\xi_k \rightarrow S^{2r}$, соответствующего образующей $1 \in \pi_{2r}(\text{BU}(k)) \cong \mathbb{Z}$, класс ω_r — образующая в $H^{2r}(S^{2r}, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, т.е. $\omega_r = \tilde{c}_r \pmod{k}$, что и требовалось. \square

2. СВЯЗЬ С РАССЛОЕНИЯМИ СО СТРУКТУРНЫМ ГРУППОИДОМ

Расслоение (4), возникшее при описании препятствий к вложению (1), является универсальным главным расслоением некоторого топологического группоида $\mathfrak{G}_{k,l}$.

2.1. Группоид $\mathfrak{G}_{k,l}$. Фиксируем комплексную матричную алгебру $M_{kl}(\mathbb{C})$. Напомним, что унитарные $*$ -подалгебры в $M_{kl}(\mathbb{C})$, изоморфные $M_k(\mathbb{C})$, мы называем k -подалгебрами.

Рассмотрим категорию $C_{k,l}$, объектами которой являются k -подалгебры в $M_{kl}(\mathbb{C})$, а морфизмами из одной k -подалгебры $M_{k,\alpha} \subset M_{kl}(\mathbb{C})$ в другую $M_{k,\beta} \subset M_{kl}(\mathbb{C})$ — множество всех унитарных $*$ -гомоморфизмов $M_{k,\alpha} \rightarrow M_{k,\beta}$. Легко видеть, что $C_{k,l}$ — группоид, т.е. малая категория, в которой всякий морфизм является изоморфизмом. Кроме того, это топологический группоид (и даже группоид Ли), который мы обозначим $\mathfrak{G}_{k,l}$. Пространство его объектов $\mathfrak{G}_{k,l}^0$ — матричный грассманиан $\text{Gr}_{k,l}$ (5). Пространство морфизмов $\mathfrak{G}_{k,l}$ описывается так. Во-первых, заметим, что матричный грассманиан $\text{Gr}_{k,l}$ — база тавтологического (над точкой $\alpha \in \text{Gr}_{k,l}$ «висит» k -подалгебра $M_{k,\alpha} \subset M_{kl}(\mathbb{C})$, параметризуемая этой точкой) $M_k(\mathbb{C})$ -расслоения, которое обозначим $\mathcal{A}_{k,l} \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$. Применяя к нему послейно функтор $\text{Hom}_{\text{alg}}(\dots, M_{kl}(\mathbb{C}))$, получаем пространство $\text{H}_{k,l}(\mathcal{A}_{k,l})$, которое и есть $\mathfrak{G}_{k,l}$ (ср. (4)).

Будучи группоидом, $\mathfrak{G}_{k,l}$ задано вместе со структурными морфизмами: $s, t: \mathfrak{G}_{k,l} \rightrightarrows \mathfrak{G}_{k,l}^0$, композицией $m: \mathfrak{G}_{k,l} \times_{\mathfrak{G}_{k,l}^0} \mathfrak{G}_{k,l} \rightarrow \mathfrak{G}_{k,l}$, единицей $e: \mathfrak{G}_{k,l}^0 \rightarrow \mathfrak{G}_{k,l}$ и обращением $i: \mathfrak{G}_{k,l} \rightarrow \mathfrak{G}_{k,l}$.

Опишем, например, s и t в терминах топологических пространств $\text{Gr}_{k,l} \sim \mathfrak{G}_{k,l}^0$ и $\text{H}_{k,l}(\mathcal{A}_{k,l}) \sim \mathfrak{G}_{k,l}$. Морфизм $s: \text{H}_{k,l}(\mathcal{A}_{k,l}) \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$ — в точности отображение проекции расслоения, индуцированное проекцией тавтологического расслоения $\mathcal{A}_{k,l} \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$. Морфизм $t: \text{H}_{k,l}(\mathcal{A}_{k,l}) \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$ — отображение $h \mapsto h((\mathcal{A}_{k,l})_\alpha)$, где $h \in \text{H}_{k,l}(\mathcal{A}_{k,l}), s(h) = \alpha$, и мы как обычно отождествляем k -подалгебру $h((\mathcal{A}_{k,l})_\alpha)$ с соответствующей точкой $\text{Gr}_{k,l}$.

Заметим, что имеются бифункторы $C_{k,l} \times C_{m,n} \rightarrow C_{km,ln}$, индуцированные тензорным произведением матричных алгебр, и соответствующие морфизмы топологических группоидов

$$\mathfrak{G}_{k,l} \times \mathfrak{G}_{m,n} \rightarrow \mathfrak{G}_{km,ln}, \tag{9}$$

накрывающие соответствующие отображения $\text{Gr}_{k,l} \times \text{Gr}_{m,n} \rightarrow \text{Gr}_{km,ln}$ матричных грассманианов [4].

Для $\alpha \in \text{Ob}(C_{k,l})$ рассмотрим (полную) подкатегорию в $C_{k,l}$ с одним объектом α . Соответствующую



щий морфизм группоидов $\text{PU}(k) \rightarrow \mathfrak{G}_{k,l}$ — Морита-морфизм, т.е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{PU}(k) & \longrightarrow & \mathfrak{G}_{k,l} \\ \downarrow \alpha & & \downarrow s \times t \\ \alpha & \longrightarrow & \text{Gr}_{k,l} \times \text{Gr}_{k,l} \end{array}$$

является декартовым квадратом.

2.2. Универсальное главное $\mathfrak{G}_{k,l}$ -расслоение. Напомним, что для топологической группы G универсальное главное расслоение получается из свободного действия G на стягиваемом пространстве EG . Тогда классифицирующее пространство BG — пространство орбит EG/G этого действия. Понятия главного и универсального главного расслоения естественно обобщаются на случай топологического группоида \mathfrak{G} , причем последнее получается из свободного действия \mathfrak{G} на пространстве $E\mathfrak{G}$, гомотопически эквивалентном пространству объектов \mathfrak{G}^0 [5, II. 8] (если группоид является группой, то это сводится к универсальному расслоению группы, поскольку группу можно рассматривать как группоид с единственным объектом).

В доказательстве теоремы 1 мы определили отображение $\tau_{k,l}: \text{H}_{k,l}(A_k^{univ}) \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$, $h \mapsto h((A_k^{univ})_x) \subset M_{kl}(\mathbb{C})$, где $x \in \text{VPU}(k)$ и $h \in p_{k,l}^{-1}(x)$, которое является расслоением со стягиваемыми слоями, в частности, гомотопической эквивалентностью; причем, напомним, $\text{Gr}_{k,l} = \mathfrak{G}_{k,l}^0$.

Имеется свободное действие φ группоида $\mathfrak{G}_{k,l}$:

$$\varphi: \mathfrak{G}_{k,l} \times_s \times_{\text{Gr}_{k,l}} \text{H}_{k,l}(A_k^{univ}) \rightarrow \text{H}_{k,l}(A_k^{univ})$$

($\tau := \tau_{k,l}$), определенное с помощью композиции гомоморфизмов алгебр. Точнее, для $g \in \mathfrak{G}_{k,l}$, $h \in p_{k,l}^{-1}(x)$, $x \in \text{VPU}(k)$, такого что $s(g) = \tau_{k,l}(h)$, полагаем $\varphi(g, h) := g(h((A_k^{univ})_x)) \subset M_{kl}(\mathbb{C})$ (в частности, $\tau_{k,l}(\varphi(g, h)) = t(g)$).

Теорема 5. База главного $\mathfrak{G}_{k,l}$ -расслоения $(\text{H}_{k,l}(A_k^{univ}), \mathfrak{G}_{k,l}, \varphi)$ есть $\text{VPU}(k)$ (ср. (4)).

Доказательство. Нетрудно проверить, что отображение

$$\mathfrak{G}_{k,l} \times_s \times_{\mathfrak{G}_{k,l}^0} \text{H}_{k,l}(A_k^{univ}) \rightarrow \text{H}_{k,l}(A_k^{univ}) \times_{\text{VPU}(k)} \text{H}_{k,l}(A_k^{univ}), (g, p) \mapsto (gp, p)$$

является гомеоморфизмом. \square

Таким образом, действие φ определяет на расслоении (4) структуру главного $\mathfrak{G}_{k,l}$ -расслоения. Более того, так как $\tau_{k,l}: \text{H}_{k,l}(A_k^{univ}) \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$ имеет стягиваемые слои, это универсальное главное расслоение для $\mathfrak{G}_{k,l}$. Тем самым мы доказали гомотопическую эквивалентность $\text{V}\mathfrak{G}_{k,l} \simeq \text{VPU}(k)$.

2.3. Частичные изоморфизмы. Пусть, как в п. 1.1 $A_k \xrightarrow{\pi} X$ — $M_{kl}(\mathbb{C})$ -расслоение над X и $\mu: A_k \hookrightarrow X \times M_{kl}(\mathbb{C})$ ($(k, l) = 1$) — отображение расслоений, которое является унитарным *-гомоморфизмом алгебр на каждом слое. Таким образом, каждый слой $(A_k)_x$, $x \in X$ можно отождествить с соответствующей k -подалгеброй $\mu|_x((A_k)_x) \subset M_{kl}(\mathbb{C})$ и, фактически, мы рассматриваем тройки $(A_k, \mu, X \times M_{kl}(\mathbb{C}))$. Пусть $(A'_k, \mu', X \times M_{kl}(\mathbb{C}))$ — другая тройка этого вида. Предположим что расслоения A_k и A'_k изоморфны и выберем некоторый конкретный *-изоморфизм $\vartheta: A_k \cong A'_k$.

Заметим, что вложения μ, μ' определяют соответствующие отображения в матричный грассманиан $f_\mu, f_{\mu'}: X \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$ и, более того, ϑ, μ и μ' определяют отображение $\nu: X \rightarrow \mathfrak{G}_{k,l}$, такое что $s \circ \nu = f_\mu$, $t \circ \nu = f_{\mu'}$ и $\nu|_x = \mu' \circ \vartheta|_x \circ \mu^{-1}: \mu((A_k)_x) \rightarrow \mu'((A'_k)_x)$.

Обратно, отображение $\nu: X \rightarrow \mathfrak{G}_{k,l}$ определяет некоторые отображения $f_\mu := s \circ \nu$ и $f_{\mu'} := t \circ \nu: X \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$, которые отвечают некоторым тройкам $(A_k, \mu, X \times M_{kl}(\mathbb{C}))$, $(A'_k, \mu', X \times M_{kl}(\mathbb{C}))$, и изоморфизм $\vartheta: A_k \cong A'_k$.

Такое ν естественно назвать *частичным изоморфизмом* из $(A_k, \mu, X \times M_{kl}(\mathbb{C}))$ в $(A'_k, \mu', X \times M_{kl}(\mathbb{C}))$. Частичный изоморфизм, который может быть поднят до «настоящего» автоморфизма тривиального расслоения $X \times M_{kl}(\mathbb{C})$ (т.е. до отображения расслоений $\tilde{\vartheta}: X \times M_{kl}(\mathbb{C}) \rightarrow X \times M_{kl}(\mathbb{C})$, такого что диаграмма



$$\begin{array}{ccc}
 A_k & \xrightarrow{\vartheta} & A'_k \\
 \mu \downarrow & & \downarrow \mu' \\
 X \times M_{kl}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\tilde{\vartheta}} & X \times M_{kl}(\mathbb{C})
 \end{array}$$

коммутативна), назовем просто *изоморфизмом*.

Заметим, что не всякий частичный изоморфизм может быть поднят до изоморфизма, что связано с существованием негомотопных вложений μ . Задача подъема эквивалентна редукции структурного группоида [6] и препятствия к ней могут быть явно описаны.

2.4. Действие группоида на слоях забывающего функтора. Рассмотрим функтор

$$(A_k, \mu, X \times M_{kl}(\mathbb{C})) \mapsto A_k,$$

«забывающий» вложение μ и отвечающий отображению представляющих пространств $\text{Gr}_{k,l} \rightarrow \text{VPU}(k)$ (с гомотопическим слоем $\text{Gr}_{k,l}$).

Ранее мы показали, что для $f: X \rightarrow \text{VPU}(k)$ выбор подъема $\tilde{f}: X \rightarrow \text{H}_{k,l}(A_k^{univ})$ (если он существует) эквивалентен выбору вложения $\mu: f^*(A_k^{univ}) \rightarrow X \times M_{kl}(\mathbb{C})$. Такой подъем обозначим через \tilde{f}_μ .

Для данного $\nu: X \rightarrow \mathfrak{G}_{k,l}$, такого что $s \circ \nu = \tau_{k,l} \circ \tilde{f}_\mu = f_\mu$, $t \circ \nu = f_{\mu'}: X \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$, определим композицию $\tilde{f}_{\mu'}$:

$$X \xrightarrow{\text{diag}} X \times X \xrightarrow{\nu \times \tilde{f}_\mu} \mathfrak{G}_{k,l} \times_{\text{Gr}_{k,l}} \text{H}_{k,l}(A_k^{univ}) \xrightarrow{\varphi} \text{H}_{k,l}(A_k^{univ}),$$

которая есть другой подъем f ($p_{k,l} \circ \tilde{f}_{\mu'} = f = p_{k,l} \circ \tilde{f}_\mu$), т.е. отвечает другому (вообще говоря, гомотопически неэквивалентному) вложению $\mu': f^*(A_k^{univ}) \rightarrow X \times M_{kl}(\mathbb{C})$, т.е. $f_{\mu'} = \tau_{k,l} \circ \tilde{f}_{\mu'}: X \rightarrow \text{Gr}_{k,l}$. Ясно, что определенное действие транзитивно на гомотопических классах таких вложений.

2.5. Переход к прямому пределу. Заметим, что отображения (9) отвечают отображениям классифицирующих пространств

$$\begin{array}{ccc}
 \text{H}_{k,l}(A_k^{univ}) \times \text{H}_{m,n}(A_m^{univ}) & \longrightarrow & \text{H}_{km,ln}(A_{km}^{univ}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{VPU}(k) \times \text{VPU}(m) & \longrightarrow & \text{VPU}(km)
 \end{array}$$

(где $(km, ln) = 1$), индуцированным тензорным произведением расслоений на матричные алгебры [4]. Ввиду гомотопической эквивалентности $\text{H}_{k,l}(A_k^{univ}) \simeq \text{Gr}_{k,l}$ получаем морфизм H -пространств

$$\text{Gr} \rightarrow \varinjlim_k \text{VPU}(k), \tag{10}$$

где $\text{Gr} := \varinjlim_{(k,l)=1} \text{Gr}_{k,l}$ [4] и прямые пределы берутся относительно отображений, индуцированных тензорным произведением матричных алгебр. Ввиду изоморфизма H -пространств $\text{Gr} \cong \text{BSU}_\otimes$ [4], отображение (10) — композиция отображений локализации

$$\text{BSU}_\otimes \rightarrow \prod_{n \geq 2} \text{K}(\mathbb{Q}, 2n)$$

и включения

$$\prod_{n \geq 2} \text{K}(\mathbb{Q}, 2n) \hookrightarrow \text{K}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, 2) \times \prod_{n \geq 2} \text{K}(\mathbb{Q}, 2n) \simeq \varinjlim_k \text{VPU}(k).$$

Морфизм H -пространств (10) позволяет определить интересный гомотопический инвариант пространства X . Рассмотрим абелеву группу

$$\text{coker}\{[X, \text{Gr}] \rightarrow [X, \varinjlim_k \text{VPU}(k)]\}, \tag{11}$$



где гомоморфизм групп гомотопических классов отображений индуцирован морфизмом H -пространств (10). Эта группа допускает следующее «геометрическое» описание. Если существует вложение $\mu: A_k \hookrightarrow X \times M_{kl}(\mathbb{C})$ для некоторого l , $(k, l) = 1$, то $M_k(\mathbb{C})$ -расслоение $A_k \rightarrow X$ называется *вложимым* (заметим, что из предыдущих результатов видно, что если l достаточно велико, то вложимость не зависит от выбора конкретного l , но только от самого расслоения A_k). Если существуют вложимые расслоения A_l, B_n , такие что $C_k \otimes A_l \cong D_m \otimes B_n$, то $M_k(\mathbb{C})$ и $M_m(\mathbb{C})$ -расслоения C_k, D_m над X называются *эквивалентными*. Множество классов такой эквивалентности расслоений над данной базой X относительно операции, индуцированной тензорным произведением, является группой. Она совпадает с коядром (11). В частности, для каждой четномерной сферы S^{2n} она изоморфна \mathbb{Q}/\mathbb{Z} (и 0 для нечетномерной).

Автор выражает благодарность А.С. Мищенко, Е.В. Троицкому и Томасу Шикку за конструктивное обсуждение вопросов, затронутых в данной статье.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 07-01-00046-а, 07-01-91555-ННИО_а и 08-01-00034-а).

Библиографический список

1. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986. 543 с.
2. Каруби М. К-теория. Введение. М.: Мир, 1981. 360 с.
3. Peterson F.P. Some remarks on Chern classes // Annals of Math. 1959. V. 69. P. 414–420.
4. Ershov A.V. A generalization of the topological Brauer group // J. of K-theory: K-theory and its Applications to Algebra, Geometry and Topology. 2008. V. 2, Spec. Iss. 03. P. 407–444.
5. Connes A. Noncommutative geometry. N.Y.: Academic Press, 1994. 661 p.
6. Ershov A.V. Topological obstructions to embedding of a matrix algebra bundle into a trivial one // <http://arxiv.org/abs/0807.3544>.

УДК 512.534

ОТНОШЕНИЯ ГРИНА И ОБОБЩЁННЫЕ ОТНОШЕНИЯ ГРИНА НА НЕКОТОРЫХ ПОЛУГРУППАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

И.Б. Кожухов, В.А. Ярошевич

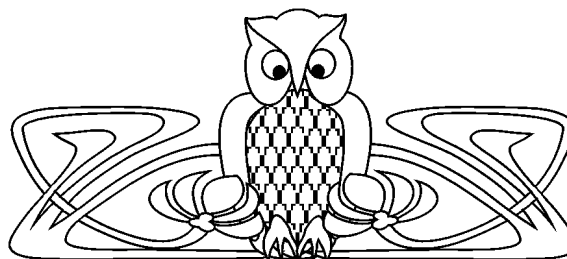
Московский институт электронной техники,
кафедра высшей математики – 1
E-mail: Kozhuhov_I_B@mail.ru, V-Yaroshevich@ya.ru

Исследуются отношения Грина \mathcal{L}, \mathcal{R} на полугруппах изотонных преобразований частично упорядоченных множеств, а также обобщённые отношения Грина $\mathcal{L}^*, \mathcal{R}^*$ на полугруппе $B(X)$ бинарных отношений на множестве X . Доказано, что хотя полугруппа $B(X)$ не регулярна при $|X| \geq 3$, но в ней, как во всякой регулярной полугруппе $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*, \mathcal{R} = \mathcal{R}^*$.

Ключевые слова: частично упорядоченное множество, полугруппа изотонных преобразований, отношение Грина на полугруппе, обобщённые отношения Грина, полугруппа бинарных отношений.

В работе используются основные понятия теории полугрупп из монографии [1]. Пусть S — полугруппа, $S^1 = S \cup \{1\}$ — полугруппа S с внешне присоединённой единицей 1. Отношения левой и правой делимости в S определяются обычным образом:

$$a \leq_l b \Leftrightarrow S^1 a \subseteq S^1 b, \quad a \leq_r b \Leftrightarrow a S^1 \subseteq b S^1.$$



The Green's Relations and the Generalized Green's Relations on Certain Transformation Semigroups

I.B. Kozhukhov, V.A. Yaroshevich

Moscow Institute of Electronic Technology,
Chair of Higher Mathematics – 1
E-mail: Kozhuhov_I_B@mail.ru, V-Yaroshevich@ya.ru

We investigate the Green's relations \mathcal{L}, \mathcal{R} on the semigroups of isotone transformations of the partially ordered sets, and also the generalized Green's relations $\mathcal{L}^*, \mathcal{R}^*$ on the semigroup $B(X)$ of binary relations on a set X . It is proved that $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*, \mathcal{R} = \mathcal{R}^*$ in the semigroup $B(X)$ though this semigroup is non-regular for $|X| \geq 3$.

Key words: partially ordered set, semigroup of isotone transformations, Green's relations on semigroup, generalized Green's relations, semigroup of binary relations.