Yu. S. Nikol'skii, On embedding theorems for weighted anisotropic spaces of differentiable functions,
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1986, Volume 291, Number 2, 298–301

https://www.mathnet.ru/eng/dan47730

ЛИТЕРАТУРА

1. *Христианович С.А.* – Тр. ЦАГИ, 1940, вып. 481. 52 с. 2. *Насыров Р.М.* – Изв. вузов. Матем., 1958, № 1 (2), с. 114–123. 3. *Боярский Б.В.* – Матем. сб., 1957, т. 43 (85), № 4, с. 451–503. 4. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. 682 с. 5. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969. 133 с. 6. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966. 628 с. 7. *Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А.* – УМН, 1975, т. 30, № 4, с. 3–60.

УДК 517.518.22 МАТЕМАТИКА

Ю.С. НИКОЛЬСКИЙ

К ТЕОРЕМАМ ВЛОЖЕНИЯ ВЕСОВЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Л.С. Понтрягиным 11 VI 1985)

Пусть $l=(l_1,\ldots,l_n)$ – вектор с целыми положительными координатами, E^n–n-мерное евклидово пространство точек $x=(x_1,\ldots,x_n)$; $\kappa=(\kappa_1,\ldots,\kappa_n)$, $\kappa_i = \lambda/l_i$, $i=1,2,\ldots,n$, $\lambda = n\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{l_i}$, $\rho(x)=\sqrt{|x_1|^{2/\kappa_1}+\ldots+|x_n|^{2/\kappa_n}}$; $L_{p,\alpha}(E^n)$– весовое пространство функций f, определенных на E^n, с конечной нормой

$$(1)\qquad \|f\|_{p,\alpha,E^n} = \|[1+\rho(x)]^\alpha f\|_{L_p(E^n)}, \qquad 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

Определим пространство $W^l_{p,\alpha}$ локально суммируемых на E^n функций f, имеющих на E^n обобщенные по С.Л. Соболеву производные $D_i^{l_i}f$, $i=1,2,\ldots,n$, и конечную норму

$$\|f\|_{W^l_{p,\alpha}} = \|f\|_{L_p(|x|<1)} + \sum_{i=1}^{n}\|D_i^{l_i}f\|_{p,\alpha,E^n} = \|f\|_{L_p(|x|<1)} + \|f\|_{L^l_{p,\alpha}}.$$

Отметим, что в определении нормы пространства $W^l_{p,\alpha}$ не требуется суммируемость в степени p функции по всему пространству E^n и что если $l_i=r$, $i=1,2,\ldots,n$, то $\rho(x)=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}=|x|$.

Обозначим через $L_{p,\alpha,\mu}(E^n)$ пространство функций f, определенных на E^n, с конечной нормой (1), в которой весовая функция $[1+\rho(x)]^\alpha$ заменена на на функцию $[1+\rho(x)]^\alpha\mu(x)$, где $\mu(x)$ – положительная непрерывная на E^n функция.

Настоящая заметка посвящена оценкам $L_{p,\beta}(E^m)$-норм или в некоторых случаях $L_{q,\beta,\mu}(E^m)$-норм функции и ее производных через ее $W^l_{p,\alpha}$-норму (или $L^l_{p,\alpha}$-полунорму), $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$, $1\leqslant m\leqslant n$. Функция $1/\mu(x)$ имеет на бесконечности логарифмический характер. При этом при определенных α оценивается весовая норма функции (или ее производной), уменьшенной на подходящий многочлен.

Эти неулучшаемые по параметрам q и β оценки являются распространением известных теорем вложений С.Л. Соболева изотропного пространства $W^{(r)}_{p,\alpha}$ в пространство $L_{q,\beta}(E^m)$ (или $L_{q,\beta,\mu}(E^m)$) (см. главы V, VI монографии [1]) на анизотропный случай. В определении нормы пространства $W^{(r)}_{p,\alpha}$ требуется суммируемость всех производных r порядка в степени p с весом $(1+|x|)^\alpha$. Частные случаи неравенств С.Л. Соболева для пространства $W^{(r)}_{p,\alpha}$ получены в работах С.В. Успенского [2] ($r=1$, $\alpha=0$, $p=q$, $p<n$), Л.Д. Кудрявцева [3] ($p=q$, $\alpha+n/p<1$), О.В. Бесова [4] ($\alpha=\beta=0$, $1<p<q<\infty$, $rp<n$) и автора [5] ($1<\alpha+n/p<n$). В работе [6] доказаны некоторые дополнения к этим неравенствам для пространства $W^{(r)}_{p,\alpha}$.

При получении указанных выше оценок для пространства $W^l_{p,\alpha}$ возникает новая по сравнению с (изотропным) пространством $W^{(r)}_{p,\alpha}$ задача об оценке производных $D^\nu f$, порядки $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ которых удовлетворяют условию $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\nu_i}{l_i}=1$.

Везде в дальнейшем будем считать, что $1\leqslant m\leqslant n$, $|\kappa^m|=\kappa_1+\ldots+\kappa_m$, $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in N_0^n$, где N_0^n — множество векторов с целыми неотрицательными координатами, $D^\nu=D^{\nu_1}_{x_1}\ldots D^{\nu_n}_{x_n}$, $(\nu,\kappa)=\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_i\kappa_i$; $E^m=\{x\colon x_{m+1}=\ldots=x_n=0\}$, если $m<n$, $1/p+1/p'=1$; c — положительная постоянная, не зависящая от функции f рассматриваемого пространства; $\|f\|_{q,\beta,E^m}$ (или $\|f\|_{q,\beta,\mu,E^m}$) — норма следа $f|_{E^m}$ (функции f при $m=n$) в смысле пространства $L_{q,\beta}(E^m)$ (или $L_{q,\beta,\mu}(E^m)$). Заметим, что $|\kappa|=|\kappa^n|=n$ (см. выше определение вектора κ).

Теорема 1. *Пусть* $f\in W^l_{p,\alpha}$, $\lambda-n/p+|\kappa^m|/q-(\alpha-\beta)-(\nu,\kappa)=0$, *и пусть выполнено одно из условий*: а) $\alpha-\beta>0$, $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$, б) $\alpha-\beta=0$, $1<p<q<\infty$, в) $\alpha-\beta=0$, $p=1$, $q=\infty$.

Тогда, если $(\nu,\kappa)>\lambda-n/p-\alpha$ $((\nu,\kappa)\geqslant\lambda-n-\alpha$ *при* $p=1$, $q=\infty)$, *то существует такой многочлен* $P_{l-1}=P_{l-1}(x;\ f)$ *степеней не выше* l_i-1 *по* x_i, $i=1,2,\ldots,n$, *линейно зависящий от* f, *что*

$$\|D^\nu(f-P_{l-1})\|_{q,\beta,E^m}\leqslant c\|f\|_{L^l_{p,\alpha}}. \tag{2}$$

Из условий теоремы следует, что только при

$$\alpha+\frac{n}{p}>\lambda-\sigma\quad(\alpha+n\geqslant\lambda-\sigma\ \text{ при }\ p=1,\ q=\infty), \tag{3}$$

$$\sigma=\max\{(\nu,\kappa)\colon\ \nu\in N_0^n,\ (\nu,\kappa)<\lambda\},$$

найдется по крайней мере одна производная $D^\nu f$, $\lambda-n/p-\alpha<(\nu,\kappa)<\lambda$ ($\lambda-n-p\leqslant(\nu,\kappa)<\lambda$ при $p=1$, $q=\infty$), для которой имеет место оценка (2).

Отметим, что при $l_i=r$, $i=1,2,\ldots,n$, условия $\lambda-n/p+|\kappa^m|/q-(\alpha-\beta)-(\nu,\kappa)=0$ и (3) превращаются соответственно в условия

$$r-\frac{n}{p}+\frac{m}{q}-(\alpha-\beta)-|\nu|=0,\qquad \alpha+\frac{n}{p}>1$$

$$(\alpha+n\geqslant1\ \text{ при }\ p=1,\ q=\infty).$$

Поэтому в этом случае условия теоремы 1 и условие (3) такие же, как и в соответствующей теореме для (изотропного) пространства $W^{(r)}_{p,\alpha}$ (см. [6]).

Теорема 1 в невесовом случае ($\alpha=\beta=0$) получена О.В. Бесовым [4]. Для финитных бесконечно дифференцируемых функций эта теорема при $\alpha = \beta = 0$ доказана В.П. Ильиным и В.А. Солонниковым [7].

Теорема 2. *Пусть* $f \in W^l_{p,\alpha}$, $(\nu, \kappa) = \lambda$, $1 < p < \infty$, $\alpha > -n/p$. *Тогда существует такой многочлен* $P_{l-1} = P_{l-1}(x; f)$, *совпадающий с многочленом из теоремы* 1, *что*

$$\| D^\nu (f - P_{l-1}) \|_{p,\alpha,E^n} \leqslant c \| f \|_{L^l_{p,\alpha}}.$$

Эта теорема при $\alpha = 0$ получена О.В. Бесовым [4] и С.В. Успенским [8].

Теорема 3. *Пусть* $f \in W^l_{p,\alpha}$, $\lambda - n/p + |\kappa^m|/q - (\alpha - \beta) - (\nu, \kappa) = 0$, *и пусть выполнено одно из условий* а), б), в) *из теоремы* 1.

Тогда, если $\alpha < n/p'$ ($\alpha \leqslant 0$ *при* $p = 1$, $q = \infty$), *то*

$$\| D^\nu f \|_{q,\beta,E^m} \leqslant c (\| f \|_{p,\alpha-\lambda,E^n} + \| f \|_{L^l_{p,\alpha}}).$$

Везде в дальнейшем будем считать, что $\mu(x) = \ln^{-1}(2 + \rho(x))$ ($\mu(x) = \ln^{-1}(2 + \rho(x)) \ln^{-\gamma} \ln(3 + \rho(x))$, $\gamma > 1$ при $p = q = 1$), если $\alpha = n/p'$ или $\alpha = n/p' + \lambda - \lambda n$.

Теорема 4. *Пусть* $f \in W^l_{p,\alpha}$, $\lambda - n/p + |\kappa^m|/q - (\alpha - \beta) - (\nu, \kappa) = 0$, *и пусть выполнено одно из условий* а), б) *из теоремы* 1. *Тогда, если* $\alpha = n/p'$, *то*

$$\| D^\nu f \|_{q,\beta,\mu,E^m} \leqslant c (\| f \|_{p,\alpha-\lambda,\mu,E^n} + \| f \|_{L^l_{p,\alpha}}).$$

Теорема 5. *Пусть* $f \in W^l_{p,\alpha}$, $(\nu, \kappa) = \lambda$, $1 < p < \infty$. *Тогда*

$$\| D^\nu f \|_{p,\alpha,E^n} \leqslant c (\| f \|_{p,\alpha-\lambda,E^n} + \| f \|_{L^l_{p,\alpha}}), \quad \alpha < n/p',$$

$$\| D^\nu f \|_{p,\alpha,\mu,E^n} \leqslant c (\| f \|_{p,\alpha-\lambda,\mu,E^n} + \| f \|_{L^l_{p,\alpha}}), \quad \alpha = n/p'.$$

Теорема 6. *Пусть* $f \in W^l_{p,\alpha}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда*

$$\| f \|_{p,\alpha-\lambda,E^n} \leqslant c \| f \|_{W^l_{p,\alpha}}, \quad \alpha < n/p' + \lambda - \lambda n; \tag{4}$$

$$\| f \|_{p,\alpha-\lambda,\mu,E^n} \leqslant c \| f \|_{W^l_{p,\alpha}}, \quad \alpha = n/p' + \lambda - \lambda n. \tag{5}$$

При $l_i = r$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\lambda = r$ и оценки (4), (5) имеют такой же вид, как и для (изотропного) пространства $W^{(r)}_{p,\alpha}$ при $\alpha + n/p \leqslant 1$ (см. [1]). Однако здесь приходится накладывать более жесткие ограничения сверху на α, за исключением случаев, для которых пространство $W^l_{p,\alpha}$ совпадает с пространством $W^{(r)}_{p,\alpha}$ ($l_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, или $n = 1$). В этих случаях условие $\alpha \leqslant n/p' + \lambda - \lambda n$ превращается в условие $\alpha + n/p \leqslant 1$.

Следствием из теорем 3–6 являются следующие теоремы.

Теорема 7. *Пусть* $f \in W^l_{p,\alpha}$, $\lambda - n/p + |\kappa^m|/q - (\alpha - \beta) - (\nu, \kappa) = 0$, *и пусть выполнено одно из условий* а), б), в) *из теоремы* 1. *Тогда*

$$\| D^\nu f \|_{q,\beta,E^m} \leqslant c \| f \|_{W^l_{p,\alpha}}, \quad \alpha < n/p' + \lambda - \lambda n,$$

$$\| D^\nu f \|_{q,\beta,\mu,E^m} \leqslant c \| f \|_{W^l_{p,\alpha}}, \quad \alpha = n/p' + \lambda - \lambda n.$$

Теорема 8. *Пусть* $f \in W^l_{p,\alpha}$, $(\nu, \kappa) = \lambda$, $1 < p < \infty$. *Тогда*

$$\| D^\nu f \|_{p,\alpha,E^n} \leqslant c \| f \|_{W^l_{p,\alpha}}, \quad \alpha < n/p' + \lambda - \lambda n,$$

$$\| D^\nu f \|_{p,\alpha,\mu,E^n} \leqslant c \| f \|_{W^l_{p,\alpha}}, \quad \alpha = n/p' + \lambda - \lambda n.$$

Доказательства приведенных теорем базируются на интегральных представлениях функций через их производные, полученных В.П. Ильиным [9] и О.В. Бесовым [4], на неизотропных неравенствах типа двупараметрического неравенства Харди и Литтлвуда (изотропный случай см. [6]) и на неравенстве типа Зигмунда–Кальдерона для сингулярных интегральных операторов с обобщенно однородными ядрами, рассматриваемых в $L_p(E^n)$ [10].

Московский физико-технический институт
Долгопрудный Московской обл.

Поступило
19 VI 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 2. *Успенский С.В.* Тр. МИАН, 1961, т. 61, с. 282. 3. *Кудрявцев Л.Д.* – ДАН, 1963, т. 153, № 3, с. 530. 4. *Бесов О.В.* Тр. МИАН, 1969, т. 105, с. 3. 5. *Никольский Ю.С.* Там же, 1972, т. 117, с. 244. 6. *Никольский Ю.С.* Там же, 1984, т. 170, с. 233. 7. *Ильин В.П., Солонников В.А.* Там же, 1962, т. 66, с. 205. 8. *Успенский С.В.* – ДАН, 1968, т. 181, № 3, с. 562. 9. *Ильин В.П.* – Сиб. матем. журн., 1967, т. 8, № 3, с. 573. 10. *Бесов О.В., Лизоркин П.И.* – Матем. сб., 1967, т. 73 (115), № 1, с. 65.