Е. Г. Голузина, Некоторые экстремальные задачи в классе функций с ограниченным граничным вращением комплексного порядка, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1991, том 196, 35–40

Е.Г.Голузина

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ГРАНИЧНЫМ ВРАЩЕНИЕМ КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА

В [I] рассматривался класс $V_k(b)$ регулярных в единичном круге функций с граничным вращением, не превосходящим $k\pi$, комплексного порядка b и решены некоторые экстремальные задачи на этом классе. В настоящей заметке рассмотрены более общие экстремальные вопросы, касающиеся множеств значений функционалов на классе $V_k(b)$, для решения которых удобно пользоваться представлениями функций класса $V_k(b)$ через функции классов $V_k(1)$ и $V_2(1)$. В частности, нами получены точные оценки для $|f'(z)|$ и $\arg f'(z)$, поскольку в [I] приведены неверные оценки этих величин.

I°. Пусть M_k, $k \geqslant 2$, – класс вещественнозначных функций $\nu(t)$ ограниченной вариации на $[0, 2\pi)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^{2\pi} d\nu(t) = 1, \quad \int_0^{2\pi} |d\nu(t)| \leqslant \frac{k}{2}.$$

Заметим, что M_2 – класс неубывающих на $[0, 2\pi)$ функций $\mu(t)$ с $\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 1$.

Пусть P_k, $k \geqslant 2$, – класс функций $p(z) = 1 + \alpha_1 z + \ldots$, регулярных в круге $\mathcal{U} = \{z : |z| < 1\}$ и таких, что

$$p(z) = \int_0^{2\pi} (1 + ze^{-it})(1 - ze^{-it})^{-1} d\nu(t), \ \nu \in M_k, \ z \in \mathcal{U};$$

$V_k(b)$, $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k \geqslant 2$, – класс функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, регулярных в $\mathcal{U}$, $f'(z) \neq 0$ в $\mathcal{U}$, для которых

$$f'(z) = \exp\left\{-2b \int_0^{2\pi} \log(1 - ze^{-it}) d\nu(t)\right\}, \ \nu \in M_k, \ z \in \mathcal{U};$$

$$V_k = V_k(1), \ C = V_2(1).$$

Легко видеть, что P_2 – класс регулярных в $\mathcal{U}$ функций $p(z) = 1 + \alpha_1 z + \ldots$ с $\operatorname{Re} p(z) > 0$ в $\mathcal{U}$; C – класс выпуклых однолистных функций и V_k – класс функций с граничным вращением, не превосходящим $k\pi$.

Из определений классов P_k и $V_k(b)$ можно вывести структурные формулы для $f(z) \in V_k(b)$. Именно, справедлива

ЛЕММА I [1]. Пусть функции $f(z)=z+\ldots$, $g(z)=z+\ldots$ и $\sigma_j(z)=z+\ldots$, $j=1,2$, регулярны в $\mathcal{U}$. Тогда имеют место следующие утверждения:

1. $f(z)\in V_K(b) \iff p(z)\in P_K$, где $p(z)=1+\dfrac{zf''(z)}{bf'(z)}$;

2. $f(z)\in V_K(b) \iff f'(z)=\left(g'(z)\right)^{b}$ где $g(z)\in V_K$;

3. $f(z)\in V_K(b) \iff f'(z)=\left(\sigma_1'(z)\right)^{b\frac{K+2}{4}}\Big/\left(\sigma_2'(z)\right)^{b\frac{K-2}{4}}$,

где $\sigma_j(z)\in C$, $j=1,2$.

2^0. Рассмотрим на классе $V_K(b)$ функционал $\log f'(z)$ со значениями в комплексной плоскости W, где z -фиксированная точка в $\mathcal{U}\setminus\{0\}$, $|z|=r$. Имеют место следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА I. Множество $\mathcal{D}(z)$ значений $\log f'(z)$ на классе $V_K(b)$ не зависит от аргумента z и представляет собой ограниченное замкнутое выпуклое множество, содержащее начало координат и ограниченное кривой с уравнением

$$W=\log\frac{\left[1+re^{-i(\varphi+\arcsin(r\sin\varphi))}\right]^{\frac{K-2}{2}b}}{\left[1-re^{-i(\varphi-\arcsin(r\sin\varphi))}\right]^{\frac{K+2}{2}b}},$$

где φ - параметр, $0\leqslant\varphi<2\pi$.

ТЕОРЕМА 2. $\max\limits_{f\in V_K(b)} \operatorname{Re}\left(e^{i\alpha}\log f'(z)\right)=$

$$=|b|\cos\gamma\log\frac{\left(\sqrt{1-r^2\sin^2\gamma}+r\cos\gamma\right)^{(K-2)/2}}{\left(\sqrt{1-r^2\sin^2\gamma}-r\cos\gamma\right)^{(K+2)/2}}+$$

$$+K|b|\sin\gamma\arcsin(r\sin\gamma),$$

где $b=|b|e^{i\beta}$, $\gamma=\alpha+\beta$, $z=re^{i\psi}$, $r\in(0,1)$, $\alpha\in[0,2\pi)$.

Экстремальная функция находится из уравнения

$$f'(z)=\left(1+ze^{-it_2}\right)^{\frac{K-2}{2}b}\left(1-ze^{-it_1}\right)^{-\frac{K+2}{2}b},$$

где $e^{i(\psi-t_j)}=e^{-i(\gamma+(-1)^j \arcsin(r\sin\gamma))}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теорем I и 2. Докажем сначала теорему 2. Из леммы I следует, что

$$\log f'(z)=b\log g'(z)=b\left(\frac{k+2}{4}\log\sigma_1'(z)-\frac{k-2}{4}\log\sigma_2'(z)\right),$$

откуда получаем

$$\begin{aligned}I(f)&=\operatorname{Re}(e^{i\alpha}\log f'(z))=|b|\Big[\frac{k+2}{4}(\cos\gamma\log|\sigma_1'(z)|-\\&-\sin\gamma\arg\sigma_1'(z))-\frac{k-2}{4}(\cos\gamma\log|\sigma_2'(z)|-\sin\gamma\arg\sigma_2'(z))\Big].\end{aligned} \tag{2}$$

Используем теперь интегральное представление класса C. Имеем

$$\sigma_j'(z)=\exp\int_0^{2\pi}\log(1-ze^{-i\theta})^{-2}d\mu_j(\theta),\ \mu_j\in M_2,\ z\in U. \tag{3}$$

Полагая в (3) $z=re^{i\psi}$, получаем

$$\begin{aligned}\log|\sigma_j'(z)|&=-\int_0^{2\pi}\log(1+r^2-2r\cos(\psi-\theta))d\mu_j(\theta),\\ \arg\sigma_j'(z)&=2\int_0^{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{r\sin(\psi-\theta)}{1-r\cos(\psi-\theta)}\,d\mu_j(\theta),\end{aligned} \tag{4}$$

где $\mu_j\in M_2$, $j=1,2$, $z\in U$.

Из (2) и (4) находим

$$I(f)=|b|\left[\frac{k+2}{4}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)d\mu_1(\theta)-\frac{k-2}{4}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)d\mu_2(\theta)\right], \tag{5}$$

где

$$\Phi(\theta)=-\cos\gamma\log(1+r^2-2r\cos(\psi-\theta))-2\sin\gamma\operatorname{arctg}\frac{r\sin(\psi-\theta)}{1-r\cos(\psi-\theta)}.$$

Из (5) следует, что

$$\max_{f\in V_k(b)}I(f)=|b|\left[\frac{k+2}{4}\max_{\theta\in[0,2\pi)}\Phi(\theta)-\frac{k-2}{4}\min_{\theta\in[0,2\pi)}\Phi(\theta)\right]. \tag{6}$$

Исследуем на экстремум функцию $\Phi(\theta)$. Положим $\psi-\theta=\varphi$. Находим

$$\Phi'(\theta)=\frac{2r(\sin(\gamma+\varphi)-r\sin\gamma)}{1+r^2-2r\cos\varphi} .$$

Уравнение $\Phi'_\theta=0$ имеет на отрезке $[0,2\pi)$ два корня θ_+ и θ_-, для которых

$$\cos(\psi-\theta_\pm)=r\sin^2\gamma\pm\cos\gamma\sqrt{1-r^2\sin^2\gamma},$$

$$\sin(\psi-\theta_\pm)=\sin\gamma\left(r\cos\gamma\mp\sqrt{1-r^2\sin^2\gamma}\right).$$

Вычисляя $\Phi''_{\theta^2}(\theta_\pm)$ и $\Phi(\theta_\pm)$, получаем

$$\Phi''_{\theta^2}(\theta_\pm)=\mp\frac{2r\sqrt{1-r^2\sin^2\gamma}}{\left(\sqrt{1-r^2\sin^2\gamma}\mp r\cos\gamma\right)^2}, \tag{7}$$

$$\Phi(\theta_\pm)=-\cos\gamma\log\left(\sqrt{1-r^2\sin^2\gamma}\mp r\cos\gamma\right)^2\pm \tag{8}$$

$$\pm 2\sin\gamma\arcsin(r\sin\gamma).$$

Таким образом, в силу (7)

$$\max_{\theta\in[0,2\pi)}\Phi(\theta)=\Phi(\theta_+),\ \min_{\theta\in[0,2\pi)}\Phi(\theta)=\Phi(\theta_-).$$

Подставив (8) в (6), получим утверждение теоремы 2. Производная экстремальной функции имеет вид (I).

Докажем теперь теорему I. Из леммы I и интегрального представления (3) получаем

$$\log f'(z)=b\left[\frac{k+2}{2}\int_0^{2\pi}\log(1-ze^{-i\theta})d\mu_1(\theta)-\right.$$

$$\left.-\frac{k-2}{2}\int_0^{2\pi}\log(1-ze^{-i\theta})d\mu_2(\theta)\right]. \tag{9}$$

Из представления (9) и теоремы 2 вытекают все утверждения теоремы I.

Полагая в теореме I последовательно $\alpha = 0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, получим

СЛЕДСТВИЕ. Для $f(z) \in V_K(b)$ при $|z| = r$, $0 < r < 1$, справедливы следующие точные оценки:

$$\log|f'(z)| \leqslant |b| \cos\beta \log \frac{\left(\sqrt{1-r^2\sin^2\beta} + r\cos\beta\right)^{\frac{K-2}{2}}}{\left(\sqrt{1-r^2\sin^2\beta} - r\cos\beta\right)^{\frac{K+2}{2}}} +$$

$$+ K|b| \sin\beta \arcsin(r \sin\beta),$$

$$\log|f'(z)| \geqslant |b| \cos\beta \log \frac{\left(\sqrt{1-r^2\sin^2\beta} - r\cos\beta\right)^{\frac{K-2}{2}}}{\left(\sqrt{1-r^2\sin^2\beta} + r\cos\beta\right)^{\frac{K+2}{2}}} -$$

$$- K|b| \sin\beta \arcsin(r \sin\beta),$$

$$\arg f'(z) \leqslant |b| \sin\beta \log \frac{\left(\sqrt{1-r^2\cos^2\beta} + r\sin\beta\right)^{\frac{K-2}{2}}}{\left(\sqrt{1-r^2\cos^2\beta} - r\sin\beta\right)^{\frac{K+2}{2}}} +$$

$$+ K|b| \cos\beta \arcsin(r \cos\beta),$$

$$\arg f'(z) \geqslant |b| \sin\beta \log \frac{\left(\sqrt{1-r^2\cos^2\beta} - r\sin\beta\right)^{\frac{K-2}{2}}}{\left(\sqrt{1-r^2\cos^2\beta} + r\sin\beta\right)^{\frac{K+2}{2}}} -$$

$$- K|b| \cos\beta \arcsin(r \cos\beta).$$

3^0. Используем лемму I для нахождения еще двух множеств значений в классе $V_K(b)$.

ТЕОРЕМА 3. Множеством значений коэффициента a_2 на классе $V_K(b)$ является круг $|w| \leqslant \frac{K}{2}|b|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в лемме I

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots, \quad g(z) = z + b_2 z^2 + \ldots, \quad |z| < 1.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в равенстве

$$\log f'(z) = b \log g'(z),$$

получим, что $a_2 = b b_2$. Так как множеством значений коэффициенты b_2 на классе V_k является круг $|w| \leqslant \frac{k}{2}$ [2], то теорема 3 доказана.

Пусть

$$J_b(f) = 1 + \frac{1}{b} z_0 \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}, \quad 0 < |z_0| < 1, \quad f \in V_k(b).$$

ТЕОРЕМА 4. Множеством значений функционала $J_1(f)$ на классе $V_k(b)$ (z_0 фиксировано) является круг

$$\left| w - \frac{1 + r^2(2b-1)}{1-r^2} \right| \leqslant \frac{r k |b|}{1-r^2}, \quad r = |z_0|. \qquad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество значений функционала $p(z_0)$ на классе P_k совпадает с кругом

$$\left| w - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \leqslant \frac{k r}{1-r^2}, \quad r = |z_0|, \qquad (11)$$

[2]. Из леммы I следует, что круг (11) является также множеством значений функционала $J_b(f)$ на классе $V_k(b)$. Посредством вычислений получаем (10).

Из теоремы 4 нетрудно получить уравнение для радиуса выпуклости класса $V_k(b)$, данное в [1].

Литература

1. U m a r a n i P.G. Functions of bounded boundary rotation of complex order. - Math.Balkan, 1989, vol.3, N 1, p.34-43.
2. Г о л у з и н а Е.Г. Об областях значений систем функционалов в некоторых классах регулярных функций. - Мат.заметки, 1985, т.37, № 6, с.803-810.