ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том XIII 1977 Вып. 1

УДК 621.391.193

О МИНИМАКСНОМ ОБУЧЕНИИ РАЗЛИЧЕНИЮ СИГНАЛОВ

В. А. Корадо

Рассматривается оптимизация обучения и самообучения принятию решений в условиях априорной неопределенности при конечном объеме обучающей выборки по минимаксному критерию. Приводится решение задачи синтеза локально минимаксных решающих правил различения **двух постоянных сигналов с неизвестными амплитудами** на фоне гауссовского шума с неизвестной дисперсией при наличии классифицированных и неклассифицированных обучающих выборок.

§ 1. Введение

Задача оптимизации обучения и самообучения машин принятию тех или иных решений в условиях априорной неопределенности рассматривалась многими авторами применительно к статистическим проблемам различения сигналов, распознавания образов и т. д. (см., например, [1–7]). Для оптимизации обучения и самообучения использовались критерии байесовской оптимизации, применимые при априорно известных статистических характеристиках наблюдаемых объектов, а также критерии асимптотической оптимизации, применимые при неизвестных или неполностью известных статистических характеристиках и неограниченном возрастании объема обучающей выборки. Вопросам оптимизации обучения и особенно самообучения при неполностью известных статистических характеристиках и конечной обучающей выборке уделялось значительно меньше внимания. В работе [8] для решения ряда задач классификации наблюдений в случае многомерных нормальных генеральных совокупностей с неизвестными корреляционными матрицами применялись метод оценки неизвестных параметров по обучающей выборке с подстановкой последних в алгоритм классификации основной выборки, оптимальный для случая известных параметров, а также критерий отношения максимального правдоподобия, примененный к полной входной выборке. К сожалению, оба эти подхода при конечной выборке не отвечают какому-либо критерию оптимизации алгоритма классификации. В работе [9] для оптимизации процедур обучения проверке гипотез относительно математического ожидания нормальных случайных величин при ограниченном объеме классифицированной обучающей выборки применен критерий равномерно наибольшей мощности среди процедур с заданным уровнем значимости, инвариантных относительно некоторых групп преобразований полного выборочного пространства. Однако процедуры, обеспечивающие минимальную вероятность ошибочных решений при каждом значении неизвестных параметров задачи, существуют далеко не для всех представляющих интерес задач классификации. В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть задачу оптимизации обучения и самообучения машин в условиях априорной неопределенности минимаксными методами теории статистических решений [10, 11]. При этом оптимизация обучения или самообучения понимается как оптимизация алгоритма выработки окончательных решений по совокупным данным основной выборки, предъявленной на «экзамен», и обучающей классифицированной либо неклассифицированной выборки. В качестве критерия оптимизации предполагается обеспечение минимума максимального условного среднего риска, связанного с вероятностями ошибочных решений (минимаксный критерий), а также один из локальных вариантов этого критерия.

В настоящей работе рассматривается задача минимаксного обучения и самообучения различению двух детерминированных постоянных сигналов с неизвестными амплитудами на фоне гауссовского шума с неизвестной дисперсией.

§ 2. Обучение различению детерминированных сигналов по неклассифицированной выборке

Пусть задача состоит в различении двух постоянных сигналов с a priori неизвестными амплитудами a_1 и a_2 на фоне стационарного некоррелированного гауссовского шума с неизвестной интенсивностью (дисперсией) σ^2 по полной выборке

(1) $$x=\{x_{ij}\},\quad i=(\overline{1,n}),\quad j=(\overline{1,m}),$$

где x_{ij} — i-е выборочное значение в j-й подвыборке.

Обучающая выборка

(2) $$x_{\text{обуч}}=\{x_{ij}\},\ j=\overline{(1,m-1)},$$

состоит из $m-1$ подвыборок, содержащих сигналы того или другого вида. Объемы обучающих подвыборок равны объему n основной выборки

(3) $$x_{\text{осн}}=\{x_{im}\},$$

предъявляемой на экзамен. В режиме обучения учитель сообщает факты наличия сигналов первого или второго видов в обучающих подвыборках. Параметры a_1, a_2 и σ остаются неизвестными. В режиме самообучения информация о виде сигналов в обучающей выборке отсутствует.

Дальнейшая конкретизация рассматриваемых задач обучения и самообучения возможна в двух вариантах. В одном из них альтернативные гипотезы считаются определенными в подпространстве параметров основной выборки и пронумерованными априори с помощью, например, соотношения $a_1>a_2$. Во втором варианте такое предположение не делается и различаемые гипотезы определяются лишь относительно — равенством полезного параметра основной выборки (амплитуды сигнала) аналогичным параметрам тех или иных обучающих подвыборок.

В этой работе рассматривается задача обучения различению сигналов, в основном, в первом варианте. Особенности относительного различения будут обсуждены в § 4.

Введем новые параметры

(4) $$\alpha={}^1\!/_2(a_1+a_2),\quad \beta={}^1\!/_2(a_1-a_2)\ \text{и}\ \mu=\{\mu_j\},\quad j=(\overline{1,m}),$$

такие, что реализация амплитуд сигналов в обучающей и основной выборках запишется через них в виде

(5) $$U_j=\alpha+\mu_j\beta=\begin{cases} a_1 & \text{при } \mu_j=1,\\ a_2 & \text{при } \mu_j=-1,\end{cases}$$

где $\alpha=(-\infty,+\infty)$, $\beta>0$, $\mu_j=\pm1$.

В случае обучения значения параметров μ_j, $j=(\overline{1,m-1})$, могут сообщаться учителем, а информационный параметр μ_m и мешающие параметры α, β и σ являются неизвестными параметрами задачи. В случае самообучения параметры μ_j, $j=\overline{(1, m-1)}$, также входят в число неизвестных. Обозначим совокупность неизвестных параметров задачи через θ, а область их изменения (множество возможных значений θ) — через Ω. Предполагается, что неизвестные параметры θ либо не являются случайными, либо их распределение вероятностей неизвестно.

В принятых обозначениях задача сводится к различению двух сложных гипотез

$$(6) \qquad H_1 : \mu_m=1 \text{ и } H_2 : \mu_m=-1.$$

Так как при $(\beta/\sigma)=0$ эффективное различение невозможно, введем ограничение на Ω вида

$$(7) \qquad \gamma=\beta/\sigma\geqslant\gamma_0.$$

При этом реализации параметров с $\gamma<\gamma_0$ соответствуют области безразличия, т. е. не контролируются критерием. Далее, так как сколько-нибудь эффективное различение H_1 при $\mu_j=1$, $j=\overline{(1, m-1)}$, и H_2 при $\mu_j=-1$, $j=\overline{(1, m-1)}$, также принципиально невозможно ни одним решающим правилом (РП), в случае самообучения реализации параметров обучающей выборки вида $\mu_j=\mu_m$, $j=\overline{(1, m-1)}$, исключим из рассмотрения (т. е. из Ω). Кроме того, будем считать, что требования к различного вида ошибкам одинаковы, так что одинаковы и потери, связанные с ошибочными решениями обоих видов. Потери при правильных решениях будем считать нулевыми.

В качестве критерия оптимизации решающего правила различения сигналов φ предполагается минимаксный критерий, требующий минимизации максимального значения в Ω условного среднего риска $R(\theta, \varphi)$, пропорционального условным вероятностям ошибочных решений при всевозможных реализациях неизвестных параметров задачи $\theta\in\Omega$. Таким образом, РП φ^* является минимаксным, если для любого РП $\varphi\in\Phi$, где Φ — множество всех возможных РП,

$$(8) \qquad \inf_{\varphi\in\Phi} \sup_{\theta\in\Omega} R(\theta, \varphi) = \sup_{\theta\in\Omega} R(\theta, \varphi^*).$$

Кроме того, с целью упрощения решающих правил мы применим также один из локальных вариантов минимаксного критерия различения сигналов, требующий минимизации максимальной производной условного среднего риска по параметру γ в точке $\gamma=0$.

Пусть $\theta=(\theta_0, \gamma)$, $\Omega=\Omega_0\times\Gamma$, $\theta_0\in\Omega_0$, $\gamma\in\Gamma$, где Ω_0 и Γ — пространства значений параметров (α, σ, μ) и $\gamma\geqslant0$. Тогда локально минимаксным по производной функции риска правилом различения сигналов будем считать РП φ_0^*, удовлетворяющее условию

$$(9) \qquad \inf_{\varphi\in\Phi} \sup_{\theta_0\in\Omega_0} \frac{\partial}{\partial\gamma} R(\theta, \varphi)\,|_{\gamma=0} = \sup_{\theta_0\in\Omega_0} \frac{\partial}{\partial\gamma} R(\theta, \varphi_0^*)\,|_{\gamma=0}.$$

В тех случаях, когда вместе с (9) РП φ_0^* удовлетворяет и условию

$$(10) \qquad \inf_{\varphi\in\Phi} \sup_{\theta_0\in\Omega_0} R(\theta, \varphi)\,|_{\gamma=0} = \sup_{\theta_0\in\Omega_0} R(\theta, \varphi_0^*)\,|_{\gamma=0},$$

оно будет удовлетворять также следующему условию: для любого РП $\varphi\in\Phi$ найдется такое $\gamma_0>0$, что

$$(11) \qquad \sup_{\theta_0\in\Omega_0} R(\theta, \varphi_0^*) \leqslant \sup_{\theta_0\in\Omega_0} R(\theta, \varphi)$$

для всех $\gamma\leqslant\gamma_0$.

Рассмотрим вначале задачу самообучения, когда значения параметров μ_j, $j=\overline{(1, m-1)}$, неизвестны. Плотность распределения вероятности полной входной выборки имеет вид *

$$(12)\qquad P(x|\gamma,\alpha,\sigma,\mu)=(2\pi)^{-mn/2}\sigma^{-mn}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-U_j)^2\right]=$$

$$=(2\pi)^{-mn/2}\sigma^{-mn}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\gamma\sigma\mu_j-\alpha)^2\right].$$

Как видно из (12), рассматриваемая задача инвариантна относительно группы G_1 сдвигов $x_{ij}'=x_{ij}+\alpha'$ в полном выборочном пространстве по направлению единичного вектора

$$(13)\qquad e=\{e_{ij}\},\ e_{ij}=1/\sqrt{mn},\ i=\overline{(1,n)},\ j=\overline{(1,m)},$$

и группы G_2 преобразований масштаба $x_{ij}'=\sigma' x_{ij}$, а также относительно произведения этих групп $G=G_2G_1$.

Известно ([11], примеры 7 и 8 гл. 8), что группа преобразований G удовлетворяет условию теоремы Ханта – Стейна ([11], теорема 2 гл. 8). Поэтому в соответствии с утверждениями теоремы 3 Приложения искомое минимаксное РП различения сигналов можно отыскать среди РП, инвариантных относительно G, и при фиксированном $\gamma=\gamma_0$ оно имеет вид

$$(14)\qquad \left(\sum_{\mu\in M_1}P_\mu^*\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty P(x|\gamma_0,\alpha,\sigma,\mu)\,d\alpha\,\sigma^{-1}\,d\sigma\right)\Big/$$

$$\Big/\left(\sum_{\mu\in M_2}Q_\mu^*\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty P(x|\gamma_0,\alpha,\sigma,\mu)\,d\alpha\,\sigma^{-1}\,d\sigma\right)\geqslant C=\frac{q^*}{p^*},$$

где M_1 и M_2 – множества допустимых реализаций векторного параметра μ при условиях $\mu_m=1$ и $\mu_m=-1$ соответственно, P_μ^* и Q_μ^* – наименее благоприятные (в совокупности) априорные вероятности реализаций μ соответственно для H_1 и H_2, p^* и q^* – наименее благоприятные значения априорных вероятностей p и q альтернатив H_1 и H_2, C – порог.

После интегрирования (12) по α (см. [12], формула 3.323.2) получим

$$(15)\qquad \int_{-\infty} P(x|\gamma,\alpha,\sigma,\mu)\,d\alpha=$$

$$=(mn)^{-1/2}(2\pi)^{-(mn-1)/2}\sigma^{-mn+1}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i,j}^{n,m}(x_{ij}-\gamma\sigma\mu_j)^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{mn}\left(\sum_{i,j}^{n,m}x_{ij}-n\gamma\sigma\sum_{j}^{m}\mu_j\right)^2\right]\right\}.$$

Далее, после разложения аргумента экспоненты по степеням σ^{-1}, интегрирование (15) по инвариантной мере $\sigma^{-1}d\sigma$ с учетом $\gamma=\gamma_0$ (см. [12],

* Здесь и в дальнейшем случайные величины и их значения, обозначаемые одинаково, легко различаются по контексту.

формула 3.462.1) дает

$$(16)\qquad \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty P(x|\gamma_0,\alpha,\sigma,\mu)\,d\alpha\,\sigma^{-1}\,d\sigma=(mn)^{-1/2}(2\pi)^{-(mn-1)/2}\Gamma(mn-1)\times$$
$$\times\left[\sum_{i,j}^{n,m} x_{ij}^2-\frac{1}{mn}\left(\sum_{i,j}^{n,m} x_{ij}\right)^2\right]^{-(mn-1)/2}\times$$
$$\times\exp(-{}^1/_2\gamma_0^2h_\mu)\exp({}^1/_4\gamma_0^2Z_\mu^2)D_{-mn+1}(-\gamma_0Z_\mu),$$

где

$$(17)\qquad Z_\mu=\left(\sum_j^m\left(\mu_j-\frac{1}{m}\sum_j^m\mu_j\right)\sum_i^n x_{ij}\right)\Bigg/\left(\sqrt{\sum_{i,j}^{n,m} x_{ij}^2-\frac{1}{mn}\left(\sum_{i,j}^{n,m} x_{ij}\right)^2}\right),$$

$$(18)\qquad h_\mu=mn\left[1-\left(\frac{1}{m}\sum_j^m\mu_j\right)^2\right],$$

а $D_p(x)$ — функция параболического цилиндра.

Подставив (16) в (14), получим РП

$$(19)\qquad \left(\sum_{\mu\in M_1}P_\mu^*\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_0^2h_\mu\right)\omega(\gamma_0Z_\mu)\right)\Bigg/\left(\sum_{\mu\in M_2}Q_\mu^*\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma_0^2h_\mu\right)\omega(\gamma_0Z_\mu)\right)\geqslant C,$$

где

$$(20)\qquad \omega(x)=\exp(x^2/4)D_{-mn+1}(-x).$$

Статистика Z_μ (17), входящая в (19), при любом μ инвариантна относительно рассматриваемых групп преобразований G_1, G_2 и G. Благодаря этому, как и следовало ожидать, формально байесовское относительно инвариантной меры $d\alpha\sigma^{-1}d\sigma$ РП (19) также инвариантно относительно этих групп. Для конкретизации минимаксного РП в (19) остается определить наименее благоприятную совокупность априорных вероятностей P_μ^* и Q_μ^*. При фиксированных P_μ^* и Q_μ^* порог C определяется из условия равенства максимальных вероятностей обоих видов ошибочных решений (см. условие (П.12) теоремы 3 в Приложении). В общем случае аналитическое решение задачи отыскания НБР априорных вероятностей P_μ и Q_μ параметров μ затруднительно. Для ее сколь угодно точного решения можно воспользоваться итерационным численным методом отыскания НБР [13]. Учитывая, что в конечномерной выпуклой ограниченной области априорных распределений вероятностей P_μ и Q_μ НБР соответствует максимуму унимодальной выпуклой непрерывной функции байесовского риска [14], оно может быть найдено градиентными (квазиградиентными) методами поиска экстремума функции многих переменных. При этом размерность области поиска может быть сокращена с учетом ограничения на Ω, инвариантности задачи относительно группы перестановок по j обучающих подвыборок и симметрии ее относительно альтернатив с 2^m-4 до $m-2$. Под симметрией задачи относительно альтернатив в соответствии с общим определением инвариантности статистических задач [11] здесь понимается инвариантность (при любом γ) исходного параметрического семейства плотностей вероятности (12) относительно группы G_3 преобразований в выборочном пространстве вида

(21) $$x'=-x,$$

дополненных тождественным преобразованием. Действительно, значение указанной плотности не изменяется при замене x на $-x$ и одновременном изменении знаков параметров μ_j и α на противоположные, что означает и замену альтернатив, связанных со знаком μ_m. При этом учитывается равенство потерь (рисков), связанных с ошибками классификации, и то, что каждому μ соответствует $\mu'=-\mu$, т. е. что Ω инвариантно относительно группы $\overline{G}_3$, индуцируемой G_3 в параметрическом пространстве.

В частном случае $m=3$ сокращенная область поиска НБР вырождается в отрезок $[0, 1/2]$ одинаковых значений априорной вероятности реализаций μ с различными знаками μ_1 и μ_2, и РП может быть записано в виде

(22) $$\frac{P\omega(\gamma_0Z_1)+P\omega(\gamma_0Z_2)+(1-2P)\,\omega(\gamma_0Z_3)}{P\omega(\gamma_0Z_4)+P\omega(\gamma_0Z_5)+(1-2P)\,\omega(\gamma_0Z_6)}\geqslant 1,$$

где Z_k соответствует $\mu^{(k)}$ вида $\mu^{(1)}=(-1, 1, 1)$, $\mu^{(2)}=(1, -1, 1)$, $\mu^{(3)}=(-1, -1, 1)$, $\mu^{(4)}=(-1, 1, -1)$, $\mu^{(5)}=(1, -1, -1)$ и $\mu^{(6)}=(1, 1, -1)$. Предполагая $P=0{,}5$ и учитывая, что $\mu^{(1)}=-\mu^{(5)}$, $\mu^{(2)}=-\mu^{(4)}$ и, следовательно, $Z_1=-Z_5$, $Z_2=-Z_4$, а также монотонность функции $\omega_1(x)=\omega(x)-\omega(-x)$, нетрудно найти, что РП (22) сводится к $Z_1+Z_2\geqslant 0$ или

(23) $$\sum_i^n x_{i3}\geqslant\frac{1}{2}\left(\sum_i^n x_{i1}+\sum_i^n x_{i2}\right),$$

которое известно в литературе как РП с обучением по выборочному среднему значению [1, 6]. Монотонность $\omega_1(x)$ следует из монотонности $\omega(x)$, в которой нетрудно убедиться, в частности, с помощью интегрального представления (см. [12] 3.462.1)

(24) $$\omega(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty z^{\nu-1}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\exp(xz)\,dz.$$

Ясно, что при любом γ_0 условные вероятности ошибок РП (23) для $\mu\in M^*=\{\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(4)}, \mu^{(5)}\}$ одинаковы и превышают вероятности ошибок при $\mu^{(3)}$ и $\mu^{(6)}$, что, согласно теореме 3 Приложения, доказывает минимаксность РП различения сигналов (23) по критерию (8).

Учитывая, что РП (19) относительно сложно, рассмотрим его локально минимаксный вариант в смысле критерия (9). При $\gamma_0\to 0$ благодаря ограничению $|Z_\mu|\leqslant\sqrt{h_\mu}$ имеем $\gamma_0Z_\mu\to 0$ и функция $\omega(x)$ линеаризуется ([12], формулы (9.240) и (9.210))

(25) $$\omega(x)=a+bx+o(x),$$

где

$$a=2^{(1-mn)/2}\sqrt{\pi}/\Gamma(mn/2),$$
$$b=2^{(1-mn)/2}\sqrt{2\pi}\,/\,\Gamma((mn-1)/2).$$

Предположим, что НБР сосредоточено в точках, соответствующих реализациям μ с $m-2$ значениями μ_j $(j\neq m)$, совпадающими с μ_m, и приписывает этим точкам одинаковые вероятности $(m-1)^{-1}$. При этом в силу симметрии задачи относительно альтернатив $q^*=p^*=0{,}5$ и $C=1$. Тогда с учетом (25) находим, что

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\exp(-{}^1/_2\,\gamma^2 h_\mu)\,\omega(\gamma Z_\mu)\,|_{\gamma=0}=bZ_\mu \tag{26}$$

и что в соответствии с теоремами 4 и 6 Приложения локально минимаксный вариант РП (19) имеет вид

$$\sum_{\mu\in M_1}P_\mu^* Z_\mu\geqslant\sum_{\mu\in M_2}Q_\mu^* Z_\mu,\quad \text{где}\quad \sum_{\mu\in M_1}P_\mu^* Z_\mu=-\sum_{\mu\in M_2}Q_\mu^* Z_\mu= \tag{27}$$

$$=2\left(\sum_i^n x_{im}-\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_i^n x_{ij}\right)\Big/$$

$$\Big/m\left[\sum_{i,j}^{n,m}x_{ij}^2-\frac{1}{mn}\left(\sum_{i,j}^{n,m}x_{ij}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Как видно, (27) эквивалентно РП

$$\sum_i^n x_{im}\geqslant\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}\sum_i^n x_{ij}, \tag{28}$$

которое является РП с обучением по выборочному среднему значению при произвольном m. Анализируя зависимость математического ожидания правой части (28) от μ, нетрудно убедиться в том, что для РП (28) производные вероятности ошибочных решений по γ при $\gamma=0$ для реализаций параметров μ с $P_\mu^*=Q_\mu^*\neq0$ одинаковы и превышают аналогичные производные при всех других возможных реализациях этих параметров. Следовательно, сделанное выше предположение о виде НБР μ справедливо и по теореме 6 Приложения РП (28) является локально минимаксным РП для рассматриваемой задачи. Его можно рассматривать также и как минимаксное «самообучающееся» РП для случая близких альтернатив.

Заметим, что РП (28) обеспечивает не только наибольшую скорость снижения вероятности ошибок различения сигналов с ростом γ в точке $\gamma=0$ при наименее благоприятных обучающих выборках, но также и минимаксное значение (равное 0,5) самой вероятности ошибок (риска) в этой же точке. Поэтому это РП локально минимизирует наибольшую вероятность ошибок в соответствии с критерием (11). Кроме того, так как вероятности ошибочных решений РП (28) монотонно уменьшаются с ростом γ, это РП удовлетворяет также и следующему локально минимаксному критерию: для любого РП φ найдется такое $\Delta>0$, что

$$\sup_{\substack{\theta_0\in\Omega_0\\ \gamma\geqslant\gamma_0}}R(\theta,\varphi_0^*)\leqslant\sup_{\substack{\theta_0\in\Omega_0\\ \gamma\geqslant\gamma_0}}R(\theta,\varphi) \tag{29}$$

для всех $0<\gamma_0<\Delta$. Критерий (29) является аналогом локально минимаксного критерия для проверки гипотез ([11], гл. 8).

§ 3. Обучение различению детерминированных сигналов по классифицированной обучающей выборке

В случае обучения по классифицированной обучающей выборке реализации μ' и μ'' параметров μ для альтернатив известны априори и отличаются лишь знаком μ_m. При этом задача перестает быть симметричной относительно альтернатив, и РП (19) приобретает вид

$$\frac{\exp(-{}^1/_2\gamma_0{}^2h_1)\,\omega(\gamma_0 Z_1)}{\exp(-{}^1/_2\gamma_0{}^2h_2)\,\omega(\gamma_0 Z_2)} \geqslant C, \tag{30}$$

где h_i и Z_i определяются (18) и (17) при μ, соответствующем H_i, $i=1$, 2, а C выбирается из условия равенства вероятностей ошибок при справедливой и неверной гипотезе H_1.

По аналогии с РП (27) локально минимаксный вариант РП (30), соответствующий критерию (8), получаем в виде

$$Z_1 \geqslant CZ_2, \tag{31}$$

где C определяется из условия равенства производных вероятностей ошибочных решений при $\gamma=0$.

Можно показать, что РП (31) приводится к следующему эквивалентному виду:

$$\sum_i^n x_{im} \geqslant \sum_{j=1}^{m-1} \nu_j{}^* \sum_i^n x_{ij}, \tag{32}$$

где

$$\nu_j{}^* = \left(m-1+\mu_j\sum_{j=1}^{m-1}\mu_j\right)^{-1}. \tag{33}$$

Действительно, РП (31) при любом C является РП с линейной разделяющей поверхностью в пространстве достаточных статистик $x_j = \sum_i^n x_{ij}$ и имеет вид

$$\sum_{j=1}^m \nu_j x_j \geqslant 0. \tag{34}$$

Обозначим $t_j' = \mu_j' - \frac{1}{m}\left(\sum_j^m \mu_j'\right)$ и $t_j'' = \mu_j'' - \frac{1}{m}\left(\sum_j^m \mu_j''\right)$ где $\mu'=\{\mu_j'\}$ и $\mu''=\{\mu_j''\}$ соответствуют H_1 и H_2. Тогда из (17) видно, что

$$\nu_j = t_j' - Ct_j'' \quad \text{и} \quad \sum_j^m \nu_j = 0. \tag{35}$$

Следовательно, разделяющая гиперплоскость нормальна гиперплоскости, натянутой на t_j' и t_j''. Если выбрать C так, что

$$\sum_j^m \nu_j(t_j' + t_j'') = 0, \tag{36}$$

то будем иметь $E_{\mu'}\sum_{j}^{m}\nu_j x_j=\sum_{j}^{m}\nu_j t_j'=-\sum_{j}^{m}\nu_j t_j''=-E_{\mu''}\sum_{j}^{m}\nu_j x_j$, что с учетом нормальности статистики $\sum_{j}^{m}\nu_j x_j$ и независимости ее дисперсии от альтернатив обеспечивает равенство как вероятностей ошибок РП (34), так и их производных по γ при обоих видах альтернатив и любых значениях параметра γ.

Из (35) и (36) нетрудно найти, что искомое

$$C=\Big[\sum_{j}^{m}(t_j')^2+\sum_{j}^{m}t_j't_j''\Big]\Big/\Big[\sum_{j}^{m}(t_j'')^2+\sum_{j}^{m}t_j't_j''\Big] \tag{37}$$

и несложные преобразования (34) с учетом (35) и (37) приводят к (32). Следует отметить, что правая часть РП (32) является несмещенной оценкой условного математического ожидания $\sum_{i}^{n}x_{im}$ при $\gamma=0$ по обучающей выборке. Действительно, входящие в (32) величины $(\nu_p^*)^{-1}=m-1+\mu_p\sum_{j=1}^{m-1}\mu_j$ равны удвоенному числу обучающих подвыборок, соответствующих $\mu_j=\mu_p$, а правая часть есть среднее от средних по двум группам обучающих подвыборок, соответствующим одинаковым μ_j. Так как при $\gamma=0$ вероятности ошибочных решений $P_{\text{ош }1}=P_{\text{ош }2}=0{,}5$, то полученное РП является локально минимаксным и по критерию (11).

Интересно отметить, что РП (32) может быть интерпретировано как линейное минимаксное РП с обучением по классифицированной выборке при произвольном γ_0, т. е. минимаксное РП в классе РП с линейной разделяющей поверхностью в пространстве полной выборки. Действительно, для задачи различения сигналов, инвариантной относительно групп преобразований G_1 и G_2, линейное минимаксное РП обязано также быть инвариантным относительно этих групп преобразований и потому имеет вид (32), где ν_j^* должны удовлетворять условию $\sum_{j=1}^{m-1}\nu_j^*=1$. В противном случае наибольшая вероятность ошибочных решений оказывается равной 1, так как, очевидно, найдутся такие значения неизвестных параметров задачи α и σ, при которых вероятность ошибочных решений равна 1. С другой стороны, выше было показано, что в классе РП вида (32) выбор ν_j^* в соответствии с (33) обеспечивает минимум наибольшей вероятности ошибочных решений, которые в этом случае равны друг другу. Таким образом РП (32) с (33) можно рассматривать и как линейное приближение РП (30). При $\gamma_0\to 0$ это приближение становится сколь угодно точным.

Аналогично можно показать, что для рассмотренной в § 2 задачи самообучения РП (28) является линейным минимаксным РП при произвольном пороговом отношении сигнал / помеха γ_0. Действительно, оно имеет вид (32), а одинаковость весовых коэффициентов $\nu_j^*=1/(m-1)$

является следствием инвариантности задачи самообучения относительно группы перестановок индексов j обучающей выборки. Следовательно, РП (28) можно рассматривать как линейное приближение РП (19). При $\gamma_0 \to 0$ это приближение становится сколь угодно точным.

§ 4. Обучение относительному различению детерминированных сигналов

Отметим некоторые особенности относительного различения (см. § 2) сигналов с помощью обучающей выборки. Пусть параметром сравнения служит параметр μ_{m-1} последней обучающей подвыборки. Введем относительные параметры вида

(38) $\quad \mu_j' = \mu_j/\mu_{m-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, m-2, m,$

где $\mu_j' = \pm 1$. Тогда задача относительного различения сводится к различению двух сложных гипотез относительно параметра μ_m'

(39) $\quad H_1 : \mu_m' = 1$ и $H_2 : \mu_m' = -1.$

Как и раньше, задача обучения по классифицированной выборке соответствует априори известным значениям параметров μ_j', $j = 1, 2, \ldots, m-2$. Случай, когда эти параметры неизвестны, соответствует задаче самообучения относительному различению сигналов. Базовый параметр μ_{m-1} в обоих случаях остается априори неизвестным. Остальные параметры и условия задачи сохраняют свой прежний смысл.

Подставив в (12) или в (16) и (17) $\mu_j = \mu_{m-1}\mu_j'$, находим, что рассматриваемая задача относительного различения сигналов как в случае обучения, так и в случае самообучения инвариантна относительно группы преобразований G_3 (21) при любой фиксированной гипотезе. В новом параметрическом пространстве с учетом (38) ей соответствует группа изменений знака μ_{m-1}, а в прежнем (Ω) — группа одновременного изменения знака у всех μ_j (включая тождественное преобразование). Так как совокупности $\mu_j = 1$, $j = \overline{(1, m)}$, и $\mu_j = -1$, $j = \overline{(1, m)}$, в данном случае принадлежат одной и той же гипотезе H_1, их следует включить в Ω. Полагая в силу указанной инвариантности наименее благоприятные вероятности значений μ_{m-1} одинаковыми и учитывая, что при фиксированных μ_j' изменение знака μ_{m-1} изменяет знак Z_μ, в случае самообучения приходим к РП (19), где множества M_1 и M_2 определяются H_1 и H_2 в соответствии с (39). Суммируя в числителе и знаменателе попарно члены, отличающиеся знаком Z_μ, находим, что РП может быть выражено через четную функцию

(40) $\quad \omega_2(x) = \frac{1}{2}[\omega(x) + \omega(-x)].$

Поэтому РП в этом случае оказывается функцией статистик $|Z_\mu|$, либо Z_μ^2 и является в отличие от РП (19) инвариантным относительно G_3. К сожалению, задача самообучения в рассматриваемом случае перестает быть симметричной относительно альтернатив. По аналогии с (25) находим, что

(41) $\quad \omega(x) = a + bx + dx^2 + o(x^2), \quad$ где $d = 2^{(mn+1)/2}\sqrt{\pi}/\Gamma(mn/2)$

и

(42) $\quad \omega_2(x) = a + dx^2 + o(x^2).$

Поэтому структура локально минимаксного правила самообучения различению (по производной риска по параметру γ^2) может быть записана в виде

$$(43) \qquad \sum_{\mu\in M_1} P_\mu^*(Z_\mu^2 - lh_\mu) \geqslant C \sum_{\mu\in M_2} Q_\mu^*(Z_\mu^2 - lh_\mu), \qquad \text{где } l = a/2d.$$

Однако дальнейшая конкретизация РП (определение НБР P_μ^*, Q_μ^* и C), по-видимому, требует численного решения.

Аналогично структура локально минимаксного РП обучения с учителем имеет вид

$$(44) \qquad Z_1^2 - lh_1 \geqslant C(Z_2^2 - lh_2),$$

где единственный параметр C определяется из условия равенства производных вероятностей ошибок в точке $\gamma=0$. Как видно, в обоих рассмотренных случаях относительного различения разделяющая поверхность даже при $\gamma_0 \to 0$ остается гиперповерхностью 2-го порядка.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Введем следующие обозначения: $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ — N-мерное евклидово пространство выборок, где $\mathscr{A}$ — σ-поле борелевских подмножеств $\mathscr{X}$; $P(x|\theta)$, $x\in\mathscr{X}$, $\theta\in\Omega$ — семейство плотностей распределения вероятностей на $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ по мере Лебега; Ω_1 и Ω_2, где $\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega$, $\Omega_1\cap\Omega_2=0$,— подмножества значений θ, соответствующие двум альтернативным гипотезам H_1 и H_2; $D=\{D_1, D_2\}$ — множество решений, соответствующих принятию H_1 и H_2; $L=L(D_i, H_j):\{L=1,\ i\neq j$ и $L=0,\ i=j\}$ — простая функция потерь; G — группа преобразований сдвига и масштаба в $\mathscr{X}$ вида $x'=gx=((x_1-u)/\rho, \ldots, (x_N-u)/\rho)$, $g\in G$, $-\infty<u<\infty$, $0<\rho<\infty$; $\bar G$ — группа преобразований сдвига и масштаба $\bar g$, индуцируемых G в Ω; $\varphi=\varphi(x)$ — критерий (измеримая критическая функция, решающее правило) различения гипотез H_1 и H_2, равный вероятности принятия H_1 при данном x; $\varphi_G=\varphi_G(x)$ — критерий различения H_1 и H_2, (почти) инвариантный относительно G.

Теорема 1. *Пусть*

$$(\text{П}.1) \qquad P(x|\theta)=P(x|\alpha,\sigma)=\sigma^{-N}f((x_1-\alpha)/\sigma, \ldots, (x_N-\alpha)/\sigma),$$

где $-\infty<\alpha<\infty$, $0<\sigma<\infty$; $y=Cx$ *и* $v=\tau^{-1}(y)$ — *преобразование координат, где* $N^{-1/2}C$ — *ортогональная матрица, такая, что* $y_1=x_1+\ldots+x_N$, *а* $y=\tau(v)$ *имеет вид*

$$y_1=v_1;\ y_2=v_2\cos v_3;\ y_3=v_2\sin v_3\cos v_4;\ \ldots;$$
$$y_{N-1}=v_2\sin v_3\sin v_4\ldots\sin v_{N-1}\cos v_N;$$
$$y_N=v_2\sin v_3\sin v_4\ldots\sin v_{N-1}\sin v_N,$$

где $-\infty<v_1<\infty$; $0<v_2<\infty$; $0<v_3, \ldots, v_{N-1}<\pi$ *и* $0\leqslant v_N<2\pi$.

Тогда

(I). $v^*=(v_3, \ldots, v_N)$ — *максимальный инвариант относительно* G.

(II). *Плотность распределения вероятности* v^* *по мере Лебега на* σ-*поле борелевских подмножеств* $(N-2)$-*мерного евклидового пространства значений* v^* *дается формулой*

$$(\text{П}.2) \qquad P(v_3,\ldots,v_N)=Nv_2^{N-1}\,k(v_3,\ldots,v_N)\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}P(x|\alpha,\sigma)\,\sigma^{-1}\,d\alpha\,d\sigma,$$

где

$$v_2=N^{1/2}\left[\sum_{i=1}^N x_i^2 - N^{-1}\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2\right]^{1/2}, \qquad x=C^{-1}\tau(v)$$

и

$$k(v_3,\ldots,v_N)=N^{-1/2}(\sin v_3)^{N-3}(\sin v_4)^{N-4}\ldots\sin v_{N-1}.$$

Доказательство. (I). Преобразование g переводит $v=(v_1, \ldots, v_N)$ в $((v_1-Nu)/\rho, v_2/\rho, v_3, \ldots, v_N)$. Следовательно, статистика $v^*=T(x)$ инвариантна относительно G. В соответствии с определением максимального инварианта [11], остается показать, что из $T(x')=T(x'')$, x', $x''\in\mathscr{X}$, следует, что $x''=gx'$ для некоторого $g\in G$. Пусть $T(x')=T(x'')$. Обозначим $v'=\tau^{-1}(Cx')$ и $v''=\tau^{-1}(Cx'')$. Тогда $v_i''=v_i'$ для $i=3, \ldots, N$. С другой стороны, при любых v_1', v_2', v_1'', v_2'' найдутся такие u и ρ, что $(v_1'-Nu)/\rho=v_1''$ и $v_2'/\rho=v_2''$. Следовательно, в силу однозначности преобразования $x=C^{-1}\tau(v)$ найдется такое $g\in G$, что $x''=gx'$.

(II). Пусть $P_v(v_1, \ldots, v_N)$ и $P_T(v_3, \ldots, v_N)$ — плотности распределения вероятностей v и v^* по мере Лебега в соответствующих евклидовых пространствах. Тогда

$$P_T(v_3,\ldots,v_N)=\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty P_v(v_1,\ldots,v_N)\,dv_1\,dv_2. \tag{П.3}$$

Учитывая, что $v=\tau^{-1}(Cx)$, находим, что

$$P_v(v)=P(C^{-1}\tau(v)\,|\alpha,\,\sigma)J(v), \tag{П.4}$$

где J — якобиан преобразования $v=\tau^{-1}(Cx)$, причем $J=J(v)=v_2^{N-2}\,k(v_3, \ldots, v_N)$. Подставляя (П.4) в (П.3), получаем, что

$$P_T(v_3,\ldots,v_N)=k(v_3,\ldots,v_N)\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty P(C^{-1}\tau(v)\,|\alpha,\,\sigma)\,v_2^{N-2}\,dv_1\,dv_2= \tag{П.5}$$

$$=k(v_3,\ldots,v_N)\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty P(x\,|\alpha,\,\sigma)\,v_2^{N-2}\,dv_1\,dv_2.$$

Введем в (П.5) новые переменные интегрирования u и ρ

$$v_1=(v_1'-Nu)/\rho;\quad v_2=v_2'/\rho, \tag{П.6}$$

где $-\infty<v_1'<\infty$ и $0<v_2'<\infty$ — некоторые константы. Якобиан преобразования (П.6) $\dfrac{\partial(v_1,\,v_2)}{\partial(\rho,\,u)}=-N\rho^{-3}v_2'$. Поэтому вместо (П.5) имеем

$$P_T(v_3,\ldots,v_N)=N(v_2')^{N-1}\,k(v_3,\ldots,v_N)\times \tag{П.7}$$

$$\times\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty P\left(\frac{x_1-u}{\rho},\ \ldots,\ \frac{x_N-u}{\rho}\,\middle|\ \alpha,\ \sigma\right)\rho^{-N-1}\,du\,d\rho.$$

Так как левая часть (П.7) не зависит от констант v_1' и v_2', то в правой части их можно заменить на v_1 и v_2 без изменения результата. Далее из (П.1) находим, что при любых $0<\rho<\infty$, $-\infty<u<\infty$

$$\begin{aligned}&\rho^{-N}P((x_1-u)/\rho,\ldots,(x_N-u)/\rho\,|\alpha,\,\sigma)=\\&=\sigma^{-N}\rho^{-N}f((x_1-\alpha-u)/\sigma\rho,\ldots,(x_N-\alpha-u)/\sigma\rho)=P(x\,|\alpha+u,\ \sigma\rho).\end{aligned} \tag{П.8}$$

Подставив (П.8) в (П.7) и заменив переменные интегрирования по формулам $\alpha'=\alpha+u$, $\sigma'=\sigma\rho$, получаем

$$P_T(v_3,\ldots,v_N)=Nv_2^{N-1}\,k(v_3,\ldots,v_N)\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty P(x\,|\alpha',\,\sigma')\,d\alpha'\,\sigma'^{-1}\,d\sigma'.$$

Наконец, принимая во внимание, что

$$\sum_{i=1}^N x_i^2-N^{-1}\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2=N^{-1}\sum_{i=2}^N y_i^2=N^{-1}v_2^2,$$

получаем окончательно (П.2).

Замечание. В настоящей теореме используется метод преобразования координат, аналогичный примененному в теореме А § 2.2 в [15].

Теорема 2. *Пусть*

$$P(x\,|\,\theta)=P_i(x\,|\alpha,\,\sigma)=\sigma^{-N}f_i\left(\frac{x_1-\alpha}{\sigma},\ \ldots,\ \frac{x_N-\alpha}{\sigma}\right), \tag{П.9}$$

$$i=1,\,2;\quad -\infty<\alpha<\infty,\quad 0<\sigma<\infty$$

— семейство плотностей распределений вероятностей на $(\mathscr{X},\ \mathscr{A})$ по мере Лебега, соответствующих H_1 и H_2 с априорными вероятностями p_1 и p_2. Пусть заданы D, L и G. Тогда правило решения для различения гипотез H_1 и H_2, минимизирующее сред-

ний риск среди всех правил, инвариантных относительно G, таково, что H_1 принимается при

(П.10) $$p_1 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty P_1(x|\alpha, \sigma)\sigma^{-1}\,d\alpha\,d\sigma \geqslant p_2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty P_2(x|\alpha, \sigma)\sigma^{-1}\,d\alpha\,d\sigma,$$

а гипотеза H_2 — когда верно строго противоположное неравенство.

Доказательство. Если $v=T(x)$ — максимальный инвариант относительно группы G, являющийся измеримой по Борелю функцией со значениями в евклидовом пространстве, то по теореме 1 гл. 6 [11] искомое байесовское инвариантное правило решения эквивалентно байесовскому правилу решения относительно v. С учетом заключения (II) теоремы 1 и теоремы 5.1 [10] это правило имеет вид (П.10).

Отметим, что результат этой теоремы можно получить из более общей теоремы 3.1 [16], применение которой к задаче различения двух сложных гипотез проиллюстрировано там же (Приложение, пример 1). Однако приведенное здесь доказательство значительно проще.

Теорема 3. *Пусть*

$$P(x|\theta)=P(x|\alpha, \sigma, \mu, \gamma)=\sigma^{-N}f((x_1-\alpha)/\sigma, \ldots, (x_N-\alpha)/\sigma|\mu, \gamma),$$
$$-\infty<\alpha<\infty,\ 0<\sigma<\infty,\ \mu=(\mu_1, \ldots, \mu_m),\ \mu_j=\pm1,\ \gamma\geqslant 0$$

— семейство плотностей вероятности на $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ по мере Лебега; M_1 и M_2, где $M_1\cup M_2=M$, $M_1\cap M_2=0$ — подмножества значений μ, соответствующие H_1 и H_2; D, L, G и φ_G — такие же, как ранее; $\lambda=\lambda(\mu)$ — априорное распределение вероятности μ; $R(\mu, \gamma, \varphi_G)$ — условный риск, соответствующий критерию φ_G; $R_\lambda(\gamma, \varphi_G)=$

$$=\sum_{\mu\in M}\lambda(\mu)R(\mu, \gamma, \varphi_G)$$ *— средний относительно λ условный риск, соответствующий*

φ_G, $\varphi_{\lambda G}$ — критерий различения H_1 и H_2, минимизирующий $R_\lambda(\gamma_0, \varphi_G)$ среди всех критериев φ_G в смысле

(П.11) $$R_\lambda(\gamma_0, \varphi_{\lambda G})\leqslant R_\lambda(\gamma_0, \varphi_G).$$

Пусть $\lambda=\lambda(\mu)$ удовлетворяет условию

(П.12) $$\sum_{\mu\in M^*}\lambda(\mu)=1, \quad \text{где} \quad M^*:\{\mu:\mu\in M \text{ и } R(\mu, \gamma_0, \varphi_{\lambda G})=\max_\mu R(\mu, \gamma_0, \varphi_{\lambda G})\}.$$

Тогда

(I). *$\varphi_{\lambda G}(x)$ — минимаксный в смысле* (8) *критерий для рассматриваемой задачи различения гипотез при фиксированном $\gamma=\gamma_0$.*

(II). *λ — есть наименее благоприятное распределение параметра μ в том смысле, что для любого другого распределения этого параметра ξ $R_\lambda(\gamma_0, \varphi_{\lambda G})\geqslant R_\xi(\gamma_0, \varphi_{\xi G})$.*

(III). *$\varphi_{\lambda G}$ имеет вид $\varphi_{\lambda G}(x)=1$ при*

(П.13) $$\sum_{\mu\in M_1}\lambda(\mu)\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty P(x|\alpha, \sigma, \mu, \gamma_0)\sigma^{-1}\,d\alpha\,d\sigma \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{\mu\in M_2}\lambda(\mu)\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty P(x|\alpha, \sigma, \mu, \gamma_0)\sigma^{-1}\,d\alpha\,d\sigma$$

и $\varphi_{\lambda G}(x)=0$ при строгом противоположном неравенстве.

(IV). *В случае, если $\max_{\mu\in M} R(\mu, \gamma, \varphi_{\lambda G})$ не возрастает с ростом γ, то $\varphi_{\lambda G}$ есть минимаксный критерий различения сигналов в смысле* (8), *а распределение вероятности γ в Γ_0: $\gamma\geqslant\gamma_0$, сосредоточенное в точке $\gamma=\gamma_0$, совместно с $\lambda(\mu)$ является НБР неизвестных параметров задачи $\theta\in\Omega$.*

Доказательство. (I). Пусть $\varphi_G(x)$ — любой другой инвариантный относительно G критерий различения H_1 и H_2. Тогда, учитывая условие (П.12) теоремы, имеем

(П.14) $$\max_\mu R(\mu, \gamma_0, \varphi_{\lambda G})\leqslant R_\lambda(\gamma_0, \varphi_G)\leqslant \max_\mu R(\mu, \gamma_0, \varphi_G),$$

т. е. критерий $\varphi_{\lambda G}(x)$ является минимаксным среди всех критериев инвариантных относительно G. Далее по теореме Ханта — Стейна ([11], теорема 2 гл. 8), в которой выполнены условия существования правоинвариантной последовательности распределений вероятности на группах преобразований сдвига и масштаба G_1 и G_2, а также на $G=G_2G_1$ (см. пример 8 гл. 8 [11], а также доказательство п. 1 теоремы 6), какова бы ни была критическая функция φ, существует критическая функция ψ, которая почти инвариантна и при любом $\theta\in\Omega$

$$\sup_{\overline{G}} M_{\bar{g}\theta}\varphi(x) \geqslant M_\theta\psi(x) \geqslant \inf_{\overline{G}} M_{\bar{g}\theta}\varphi(x),$$

откуда при всех $\theta\in\Omega$

$$R(\theta, \psi) \leqslant \sup_{\overline{G}} R(\bar{g}\theta, \varphi) \leqslant \sup_{\Omega} R(\theta, \varphi). \tag{П.15}$$

Но согласно (П.14) с $\varphi_G=\psi$ и (П. 15) каковы бы ни были критическая функция φ и γ

$$\max_\mu R(\mu, \gamma, \varphi_{\lambda G}) \leqslant \max_\mu R(\mu, \gamma, \psi) \leqslant \max_\mu R(\mu, \gamma, \varphi). \tag{П.16}$$

(II). Пусть ξ — любое другое распределение вероятности μ; $R_\xi(\gamma, \varphi_G)$ — средний по ξ условный риск, соответствующий критерию φ_G; $\varphi_{\xi G}(x)$ — критерий различения гипотез H_1 и H_2, минимизирующий $R_\xi(\gamma_0, \varphi_G)$ среди всех критериев φ_G. Тогда

$$R_\xi(\gamma_0, \varphi_{\xi G}) \leqslant R_\xi(\gamma_0, \varphi_{\lambda G}) \leqslant \max_{\mu\in M} R(\mu, \gamma_0, \varphi_{\lambda G}) = R_\lambda(\gamma_0, \varphi_{\lambda G}).$$

(III). Полагая $P_i(x|\alpha, \sigma, \gamma_0) = \sum_{\mu\in M_i} \lambda(\mu) P(x|\alpha, \sigma, \mu, \gamma_0) \Big/ \sum_{\mu\in M_i} \lambda(\mu)$ и $p_i = \sum_{\mu\in M_i}\lambda(\mu)$, $i=1, 2$, и применяя теорему 2, получаем (П.13).

(IV). Пусть $\varphi_{\lambda G}$ соответствует $\gamma=\gamma_0$, тогда по условию для $\gamma\in\Gamma_0$ $\max_\mu R(\mu, \gamma, \varphi_{\lambda G}) \leqslant \max_\mu R(\mu, \gamma_0, \varphi_{\lambda G})$ и с учетом (П.16) для любой критической функции φ

$$\sup_{\theta\in\Omega} R(\theta, \varphi_{\lambda G}) = \sup_{\gamma\in\Gamma_0}\max_{\mu\in M} R(\mu, \gamma, \varphi_{\lambda G}) = \max_\mu R(\mu, \gamma_0, \varphi_{\lambda G}) \leqslant$$
$$\leqslant \max_\mu R(\mu, \gamma_0, \varphi) \leqslant \sup_{\gamma\in\Gamma_0}\max_{\mu\in M} R(\mu, \gamma_0, \varphi) = \sup_{\theta\in\Omega} R(\theta, \varphi).$$

Кроме того, пусть $\eta(\mu, \gamma)$ — произвольное распределение вероятности на $M\times\Gamma_0$, $\varphi_{\eta G}$ — байесовское инвариантное решающее правило относительно η, $R_\eta(\varphi_{\eta G})$ — средний риск критерия $\varphi_{\eta G}$ относительно η (байесовский риск для η). Тогда

$$R_\eta(\varphi_{\eta G}) \leqslant R_\eta(\varphi_{\lambda G}) \leqslant \sup_{\gamma\in\Gamma_0}\max_{\mu\in M} R(\mu, \gamma, \varphi_{\lambda G}) = R_\lambda(\gamma_0, \varphi_{\lambda G}),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Пусть* $P(x|\theta)=P_i(x|\alpha, \sigma, \gamma)=\sigma^{-N}f_i((x_1-\alpha)/\sigma, \ldots, (x_N-\alpha)/\sigma|\gamma)$, $i=1, 2$, $-\infty<\alpha<\infty$, $0<\sigma<\infty$, $\gamma\geqslant 0$ — *семейство плотностей распределения вероятности на* $(\mathscr{X}, \mathscr{A})$ *по мере Лебега, соответствующих* H_1 *и* H_2 *с априорными вероятностями* p_1 *и* p_2; D, L *и* G — *соответствуют принятым обозначениям; функции*

$$F_i(x, \gamma) = \frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\sum_{j=1}^N x_j^2 - N^{-1}\left(\sum_{j=1}^N x_j\right)^2\right]^{(N-1)/2} \times \tag{П.17}$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} P_i(x|\alpha, \sigma, \gamma)\,\sigma^{-1}\,d\sigma\,d\alpha$$

определены, непрерывны по γ *в некоторой окрестности* J *точки* $\gamma=0$ *и удовлетворяют условию* $|F_i(x, 0)|\leqslant W$, $W=\mathrm{const}$, $x\in\mathscr{X}$. *Тогда правило решения для различения гипотез* H_1 *и* H_2, *минимизирующее производную среднего риска по* γ *при* $\gamma=0$ *среди всех правил, инвариантных относительно* G, *таково, что* H_1 *принимается при*

$$(\text{П.18})\qquad p_1\frac{\partial}{\partial\gamma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}P_1(x|\alpha,\sigma,\gamma)\,\sigma^{-1}\,d\sigma\,d\alpha|_{\gamma=0}\geqslant$$

$$\geqslant p_2\frac{\partial}{\partial\gamma}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}P_2(x|\alpha,\sigma,\gamma)\,\sigma^{-1}\,d\sigma\,d\alpha|_{\gamma=0},$$

а H_2 — когда верно строго противоположное неравенство.

Доказательство. Если $v^*=T(x)$ — максимальный инвариант относительно группы G со значениями в ограниченной области $\mathcal{T}$ (N—2)-мерного евклидового пространства и плотность распределения вероятности v^* на $(\mathcal{T},\mathcal{B})$ при H_1 и H_2 есть $P_1(v^*|\gamma)$ и $P_2(v^*|\gamma)$, то условный средний риск при данном γ и произвольной (измеримой) инвариантной относительно G решающей функции $\varphi(v^*)$, $0\leqslant\varphi(v^*)\leqslant1$, определяющей вероятность принятия H_1,

$$R(\gamma,\varphi)=p_1+\int\limits_{\mathcal{T}}\varphi(v^*)\,[p_2P_2(v^*|\gamma)-p_1P_1(v^*|\gamma)\,]\,dv^*.$$

Используя формулу (П.2) теоремы 1 и условия на $F_i(x,\gamma)$, находим, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial\gamma}P_i(v^*|\gamma)\right|<W_1,\qquad W_1=\text{const},\qquad v^*\in\mathcal{T},\qquad \gamma\in J.$$

Следовательно, по теореме о дифференцировании интеграла Лебега по параметру

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\int\limits_{\mathcal{T}}\varphi(v^*)P_i(v^*|\gamma)\,dv^*=\int\limits_{\mathcal{T}}\varphi(v^*)\,\frac{\partial}{\partial\gamma}P_i(v^*|\gamma)\,dv^*,\qquad \gamma\in J.$$

Поэтому

$$(\text{П.19})\qquad \frac{\partial}{\partial\gamma}R(\gamma,\varphi)\Big|_{\gamma=0}=\int\limits_{\mathcal{T}}\varphi(v^*)\left[p_2\frac{\partial}{\partial\gamma}P_2(v^*|\gamma)\Big|_{\gamma=0}-\right.$$

$$\left.-p_1\frac{\partial}{\partial\gamma}P_1(v^*|\gamma)\Big|_{\gamma=0}\right]dv^*.$$

Следовательно, инфимум левой части (П.19) по $\varphi(v^*)$ достигается для $\varphi(v^*)=1$, если

$$(\text{П.20})\qquad p_1\frac{\partial}{\partial\gamma}P_1(v^*|\gamma)\Big|_{\gamma=0}\geqslant p_2\frac{\partial}{\partial\gamma}P_2(v^*|\gamma)\Big|_{\gamma=0}$$

и $\varphi(v^*)=0$, если верно строго противоположное неравенство. Подставляя в (П.20) выражение для $P_i(v^*|\gamma)$, $i=1, 2$, даваемое, согласно п. (II) теоремы 1, выражением (П. 2), получаем (П. 18), что и требовалось доказать.

Теорема 5. (Аналог теоремы Ханта — Стейна [11]). *Пусть $\mathcal{P}=\{P_\theta,\ \theta\in\Omega\}$ — доминированное семейство распределений на $(\mathcal{X},\mathcal{A})$, $\theta=(\theta_0,\gamma)$, $\Omega=\Omega_0\times\Gamma$, $\theta_0\in\Omega_0$, $\Gamma:\gamma\geqslant0$; G — группа преобразований на $(\mathcal{X},\mathcal{A})$, такая, что индуцированная в Ω группа $\bar{G}$ оставляет инвариантным Ω_0; $\varphi(x)$ — критерий различения H_1 и H_2, равный вероятности принятия решения H_1 при данном $x\in\mathcal{X}$, и пусть $R(\theta_0,\gamma,\varphi)$ — условный риск критерия φ при данных $\theta_0\in\Omega_0$ и $\gamma\in\Gamma$. Пусть $\mathcal{B}$ σ-поле подмножеств группы G, такое, что для любого $A\in\mathcal{A}$ множество пар (x, g) с $gx\in A$ принадлежит $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ и $Bg\in\mathcal{B}$ для любых $B\in\mathcal{B}$ и $g\in G$. Допустим, что существует последовательность распределений вероятностей ν_n на $(G,\mathcal{B})$, которые асимптотически правоинвариантны в том смысле, что для любых $g\in G$, $B\in\mathcal{B}$*

$$(\text{П.21})\qquad \lim_{n\to\infty}|\nu_n(Bg)-\nu_n(B)|=0.$$

Пусть для любого (измеримого) $\varphi(x)$ условное математическое ожидание $M_\theta\varphi(x)=\int\varphi(x)\,dP_\theta(x)$ удовлетворяет условию

$$(\text{П.22})\qquad \left|\frac{\partial}{\partial\gamma}M_\theta\varphi(x)\right|<W_2,\quad W_2=\text{const}<\infty,\ \textit{для всех}\ \theta_0\in\Omega_0\ \textit{и}\ \gamma\in J,$$

где J — некоторая открытая окрестность точки $\gamma=0$. Тогда

(I) *Какова бы ни была критическая функция* φ, *существует критическая функция* ψ, *которая почти инвариантна и при всех* $\theta_0 \in \Omega_0$ *удовлетворяет условию*

$$\text{(П.23)} \qquad \frac{\partial}{\partial\gamma} R(\theta_0, \gamma, \psi)\big|_{\gamma=0} \leqslant \sup_{\bar{G}} \frac{\partial}{\partial\gamma} R(\bar{g}\theta_0, \gamma, \varphi)\big|_{\gamma=0}.$$

(II) *Если существует критерий* φ_0, *минимизирующий* $\sup\limits_{\Omega_0} \dfrac{\partial}{\partial\gamma} R(\theta_0, \gamma, \varphi)\Big|_{\gamma=0}$, *то существует и почти инвариантный критерий с этим свойством.*

Доказательство.

(I) Пусть $\psi_n(x) = \int \varphi(gx)\, d\nu_n(g)$. Тогда $\psi_n(x)$ измерима и $0 \leqslant \psi_n(x) \leqslant 1$. По теореме о слабой компактности (теорема 3 в дополнении [11]) существует подпоследовательность $\{\psi_{ni}\}$ и измеримая функция ψ, лежащая между 0 и 1, для которой $\lim\limits_{i\to\infty} \int \psi_{ni} P\, d\mu = \int \psi P\, d\mu$ для всех μ-интегрируемых функций P. В частности,

$$\text{(П.24)} \qquad \lim_{i\to\infty} \mathbf{M}_\theta \psi_{ni}(x) = \mathbf{M}_\theta \psi(x)$$

при всех $\theta \in \Omega$. По теореме Фубини

$$\text{(П.25)} \qquad \mathbf{M}_\theta \psi_{ni}(x) = \int [\mathbf{M}_\theta \varphi(gx)]\, d\nu_{ni}(g) = \int \mathbf{M}_{\bar{g}\theta} \varphi(x)\, d\nu_{ni}(g).$$

Благодаря условию (П.22) в (П.25) можно дифференцировать по $\gamma \in J$ под знаком интеграла, и, в частности, $\dfrac{\partial}{\partial\gamma} \mathbf{M}_\theta \psi_{ni}(x)\Big|_{\gamma=0} = \displaystyle\int \frac{\partial}{\partial\gamma} \mathbf{M}_{\bar{g}\theta} \varphi(x)\big|_{\gamma=0} d\nu_{ni}(g)$, что дает

$$\inf_{\bar{G}} \frac{\partial}{\partial\gamma} \mathbf{M}_{\bar{g}\theta} \varphi(x) \leqslant \frac{\partial}{\partial\gamma} \mathbf{M}_\theta \psi_{ni}(x)\big|_{\gamma=0} \leqslant \sup_{\bar{G}} \frac{\partial}{\partial\gamma} \mathbf{M}_{\bar{g}\theta} \varphi(x).$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$ с учетом (П.24), равенства

$$R(\theta_0, \gamma, \psi) = \begin{cases} 1 - \mathbf{M}_\theta \psi(x), & \theta \in \Omega_1, \\ \mathbf{M}_\theta \psi(x), & \theta \in \Omega_2 \end{cases}$$

и соотношения

$$\sup_{\bar{G}} \left[-\frac{\partial}{\partial\gamma} \mathbf{M}_{\bar{g}\theta} \varphi(x) \right] = -\inf_{\bar{G}} \frac{\partial}{\partial\gamma} \mathbf{M}_{\bar{g}\theta} \varphi(x),$$

получаем при любых $\theta_0 \in \Omega_0$ (П.23). Доказательство почти инвариантности $\psi(x)$ совпадает с соответствующей частью доказательства теоремы Ханта — Стейна.

(II) Пусть $\sup\limits_{\Omega_0} \dfrac{\partial}{\partial\gamma} R(\theta_0, \gamma, \varphi_0)\Big|_{\gamma=0} = r_0$ и пусть ψ_0 — (почти) инвариантный критерий, такой, что (П.23) выполняется с $\varphi = \varphi_0$ и $\psi = \psi_0$. Тогда

$$\text{(П.26)} \qquad \frac{\partial}{\partial\gamma} R(\theta_0, \gamma, \psi_0)\big|_{\gamma=0} \leqslant \sup_{\bar{G}} \frac{\partial}{\partial\gamma} R(\bar{g}\theta_0, \gamma, \varphi_0)\big|_{\gamma=0} \leqslant r_0$$

при всех $\theta_0 \in \Omega_0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Пусть $P(x|\theta) = P(x|\gamma, \theta_0)$ — плотность P_θ по мере Лебега $\mu(x)$ такая, что $P(gx|\bar{g}\theta)\,|\det g| = P(x|\theta)$, где $|\det g|$ — модуль определителя (якобиана) g, $\bar{G}$ — транзитивна в Ω_0; $\dfrac{\partial}{\partial\gamma} P(x|\theta)$, $x \in \mathscr{X}$, существует и непрерывна по γ в Γ и

$$\text{(П.27)} \qquad \int \left| \frac{\partial}{\partial\gamma} P(x|\theta) \right|_{\gamma=0} d\mu(x) < W_3, \qquad W_3 = \text{const}(\theta_0) < \infty.$$

Тогда условие (П.22) теоремы 5 выполнено. Действительно, в этом случае в силу условия непрерывности для некоторого фиксированного θ_0 найдется такая окрестность $\gamma = 0$ J, что для любого $x \in \mathscr{X}$

$$\text{(П.28)} \qquad \left| \frac{\partial}{\partial\gamma} P(x|\theta) \right| < 2 \left| \frac{\partial}{\partial\gamma} P(x|\theta) \right|_{\gamma=0}, \qquad \gamma \in J.$$

В силу условия инвариантности неравенство (П.28) справедливо для любого θ_0, причем J не зависит от θ_0. Следовательно, с учетом (П.27) и $0 \leqslant |\varphi(x)| \leqslant 1$ для любого $\theta_0 \in \Omega_0$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial\gamma} \mathbf{M}_\theta \varphi(x) = \int \varphi(x) \frac{\partial}{\partial\gamma} P(x|\theta)\, d\mu(x), \qquad \gamma \in J,$$

что совместно с (П.27) и (П.28) обеспечивает (П.22). Нетрудно проверить, что плотность (12) удовлетворяет условию (П.22) теоремы 5.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теорем* 3, 4 *и* 5, *где вместо* (П.11) *и* (П.12) $\overset{0}{\varphi}_{\lambda G}$ – *критерий различения гипотез* H_1 *и* H_2, *минимизирующий* $\frac{\partial}{\partial\gamma} R_\lambda(\gamma, \varphi_G)$ *среди всех критериев* φ_G *в смысле*

$$\text{(П.29)} \qquad \frac{\partial}{\partial\gamma} R_\lambda(\gamma, \varphi_{\lambda G}{}^0) \Big|_{\gamma=0} \leqslant \frac{\partial}{\partial\gamma} R_\lambda(\gamma, \varphi_G) \Big|_{\gamma=0}$$

и λ *удовлетворяет условию*

$$\text{(П.30)} \qquad \sum_{\mu \in M^*} \lambda(\mu) = 1, \quad \text{где} \quad M^*: \left\{ \mu : \mu \in M \ \text{и} \ \frac{\partial}{\partial\gamma} R(\mu, \gamma, \overset{0}{\varphi}_{\lambda G}) \Big|_{\gamma=0} = \right.$$
$$\left. = \max_\mu \frac{\partial}{\partial\gamma} R(\mu, \gamma, \overset{0}{\varphi}_{\lambda G}) \Big|_{\gamma=0} \right\}.$$

Тогда

(I) $\overset{0}{\varphi}_{\lambda G}(x)$ – *локально минимаксный критерий для рассматриваемой задачи различения гипотез* H_1 *и* H_2, *удовлетворяющий* (9).

(II) λ – *есть наименее благоприятное распределение параметра в том смысле, что оно максимизирует*

$$\frac{\partial}{\partial\gamma} R_{\lambda'}(\gamma, \overset{0}{\varphi}_{\lambda' G}) \Big|_{\gamma=0}$$

(III) $\overset{0}{\varphi}_{\lambda G}(x)$ *имеет вид* $\overset{0}{\varphi}_{\lambda G}(x) = 1$ *при*

$$\text{(П.31)} \qquad \sum_{\mu \in M_1} \lambda(\mu) \frac{\partial}{\partial\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} P(x|\alpha, \sigma, \mu, \gamma)\, \sigma^{-1}\, d\sigma\, d\alpha \Big|_{\gamma=0} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{\mu \in M_2} \lambda(\mu) \frac{\partial}{\partial\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} P(x|\alpha, \sigma, \mu, \gamma)\, \sigma^{-1}\, d\sigma\, d\alpha \Big|_{\gamma=0}$$

и $\overset{0}{\varphi}_{\lambda G}(x) = 0$ *при строго обратном неравенстве.*

Доказательство. (I) Пусть $\varphi_G(x)$ – любой другой инвариантный относительно G критерий различения H_1 и H_2. Тогда, учитывая условие (П.30) теоремы, имеем

$$\max_\mu \frac{\partial}{\partial\gamma} R(\mu, \gamma, \varphi_{\lambda G}{}^0) \Big|_{\gamma=0} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\partial}{\partial\gamma} R_\lambda(\gamma, \varphi_G) \Big|_{\gamma=0} \leqslant \max_\mu \frac{\partial}{\partial\gamma} R(\mu, \gamma, \varphi_G) \Big|_{\gamma=0},$$

т. е. критерий $\overset{0}{\varphi}_{\lambda G}(x)$ является локально минимаксным среди всех критериев, инвариантных относительно G. Для завершения доказательства п. (I) теоремы достаточно применить теорему 5. Представим $G = G_2 G_1$, где G_1 и G_2 – соответствующие подгруппы преобразований сдвига и масштаба в $\mathscr{X}$. Известно, (см. [11], пример 7 гл. 8), что для групп G_1 и G_2 по отдельности условие (П.21) теоремы 5 выполняется. С другой стороны, в подпространстве $\mathscr{T}$ максимального инварианта относительно G_1 группа G_2 индуцирует группу $G_2{}^*$ также преобразований масштаба. Поэтому, применяя теорему 5 последовательно к G_1 и G_2^* (см. [11], гл. 8), получаем, что искомый локально минимаксный критерий найдется среди критериев, инвариантных относительно $\overset{0}{G}$, и им, в частности, является локально минимаксный инвариантный критерий $\varphi_{\lambda G}(x)$.

(II) Пусть ξ – любое другое распределение вероятностей μ, $R_\xi(\gamma, \varphi_{\overset{0}{G}})$ – средний по ξ условный риск, соответствующий критерию φ_G; $\varphi_{\xi G}(x)$ – критерий различения H_1 и H_2, минимизирующий $\left.\frac{\partial}{\partial\gamma}R_\xi(\gamma, \varphi_G)\right|_{\gamma=0}$ среди всех критериев φ_G; тогда

$$\left.\frac{\partial}{\partial\gamma}R_\xi(\gamma, \varphi_{\xi G^0})\right|_{\gamma=0} \leqslant \left.\frac{\partial}{\partial\gamma}R_\xi(\gamma, \varphi_{\lambda G^0})\right|_{\gamma=0} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\mu\in M}\left.\frac{\partial}{\partial\gamma}R(\mu, \gamma, \varphi_{\lambda G})\right|_{\gamma=0} = \left.\frac{\partial}{\partial\gamma}R_\lambda(\gamma, \varphi_{\lambda G^0})\right|_{\gamma=0}.$$

(III) Полагая

$$P_i(x|\alpha, \sigma, \gamma) = \sum_{\mu\in M_i}\lambda(\mu)P(x|\alpha, \sigma, \mu, \gamma) \Big/ \sum_{\mu\in M_i}\lambda(\mu),$$

$$p_i = \sum_{\mu\in M_i}\lambda(\mu), \qquad i=1, 2,$$

и применяя теорему 4, получаем (П.31), что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники, II. М., «Сов. радио», 1968.
2. *Цыпкин Я. З.* Основы теории обучающихся систем. М., «Наука», 1970.
3. *Айзерман М. А., Браверман Э. М., Розоноэр Л. И.* Метод потенциальных функций в теории обучения машин. М., «Наука», 1970.
4. *Большаков И. А., Левин Б. Р., Репин В. Г., Тартаковский Г. П.* Некоторые вопросы статистического синтеза информационных систем. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1970, *2*, 153—169.
5. *Пугачев В. С.* Статистические методы в технической кибернетике. М., «Сов. радио», 1971.
6. *Фу К.* Последовательные методы в распознавании образов и обучении машин. М., «Наука», 1971.
7. *Лихарев В. А., Тебякин В. П.* Методы обучения систем, решающих задачи распознавания образов и обнаружения сигналов на фоне шумов (обзор). Зарубежная радиоэлектроника, 1967, *11*, 59–73.
8. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ. М., Физматгиз, 1963.
9. *Данков П. П.* Оптимальные процедуры обучения принятию статистических решений. Радиотехника и электроника, 1965, 10, *10*, 1774—1782.
10. *Wald A.* Statistical Decision Functions. New York, Wiley, 1950. (Русск. пер.: *Вальд А.* Статистические решающие функции. Сб. «Позиционные игры». М., «Наука», 1967, 300–522).
11. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. М., «Наука», 1964.
12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
13. *Nelson W.* Minimax Solution of Statistical Decision Problems by Iteration. Ann. Math. Statist., 1966, 37, *6*, 1643–1657.
14. *Блекуэлл Д., Гиршик М. А.* Теория игр и статистических решений. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1958.
15. *Гаек Я., Шидак З.* Теория ранговых критериев. М., «Наука», 1971.
16. *Zidek J. V.* A Representation of Bayes Invariant Procedures in Terms of Haar Measure. Ann. Inst. Statist. Math., 1969, *2*, 291–308.

Поступила в редакцию
27 декабря 1971 г.
После переработки
4 января 1976 г.