

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Хапаев, Б. А. Володин, О моделировании динамики зарядов в системе типа Виплера с ведущим магнитным полем, *Матем. моделирование*, 1994, том 6, номер 7, 103–115

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

19 марта 2025 г., 02:14:09



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том 6 номер 7 год 1994

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

О МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ЗАРЯДОВ В СИСТЕМЕ ТИПА ВИГГЛЕРА С ВЕДУЩИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

© А.М. Хапаев, Б.А. Володин.

Московский Государственный Университет, физический факультет.

В работе построены интегралы движения, описывающие динамику заряда в конфигурации электромагнитного поля типа вигглера с учетом входных условий и параметров поля. На их основе выводится нелинейное дифференциальное уравнение для продольного импульса или энергии заряда как функции длины области взаимодействия, периодические и солитонные решения которого анализируются.

ON MODELLING OF CHARGE DYNAMICS IN THE VIGGLER'S TYPE SYSTEM WITH A GUIDING MAGNETIC FIELD

A.M. Khapaev, B.A. Volodin.

Moscow State University, Physics Department

The integrals of movement were constructed in this work which described the charge dynamics in the configuration of the electromagnetic field of the viggler's type taking into account the starting conditions and parameters of the field. On this basis a nonlinear differential equation is derived for the longitudinal impulse or for the charge energy as a function of the interaction range, periodic and soliton solutions of which are analyzed.

Введение. Исследование динамики релятивистских зарядов в идеализированных магнитных полях, представляющих суперпозицию спирального и ведущего стационарных магнитных полей или спирального и поля замедленной высокочастотной волны, проводилось в ряде работ [1,2,3,5]. Основная цель исследований первой конфигурации - определение условий, при которых осуществляется максимальная раскачка зарядов, поступающих на вход области взаимодействия с нулевыми поперечными компонентами скорости. Во второй конфигурации - нахождение условий, при которых эффективность взаимодействия с высокочастотным полем максимальна.

В связи с поставленной задачей возникает необходимость решения релятивистских уравнений движения, что приводит к необходимости анализа нелинейных дифференциальных уравнений. Последнее существенно ограничивает возможности аналитического исследования проблемы и лишает полученные результаты наглядности. В данной статье предлагается новый подход к решению задачи, существенно расширяющий возможности аналитического метода.

Статья разбивается на две части: в первой анализируется динамика зарядов в области создания поперечных осцилляций; во второй определяется эффективность взаимодействия с высокочастотным электромагнитным полем в присутствии стационарного винтового магнитного.

Полученные результаты проверяются прямым численным интегрированием.

§1. Область взаимодействия с винтовым магнитным полем.

1. Постановка задачи. Вывод уравнения, описывающего изменение продольного импульса.

Пусть заряд, двигаясь вдоль оси Z , при $z > 0$ попадает в область существования стационарных магнитных полей: вращающегося H_0 и винтового B_{\perp} , заданных выражением

$$\mathbf{H} = H_0 \mathbf{n} + B_{\perp} (\cos(k_0 z) \mathbf{i} + \sin(k_0 z) \mathbf{j}), \quad k_0 = 2\pi/\lambda_0, \quad (1.1.1)$$

H_0 - амплитуда однородного магнитного поля, параллельного оси $Z(\mathbf{n})$, B_{\perp} - амплитуда винтового стационарного поля, k_0 - волновое число.

При рассмотрении данной задачи пренебрегаем электрическими и магнитными полями, создаваемыми самим зарядом. Будем также предполагать, что в момент влета в область существования данных полей (1.1.1) отлична от нуля только z - компонента импульса заряда. После сделанных предположений исходная система уравнений имеет вид

$$\dot{\mathbf{p}} = - \frac{e}{mc} [\mathbf{p} \mathbf{H}], \quad (1.1.2)$$

\mathbf{p} - импульс заряда, τ - собственное время, $dr = dt(1 - \beta^2)^{1/2}$, $\beta^2 = \beta_{\perp}^2 + \beta_{\parallel}^2$ - скорость, m - масса покоя (энергия $\gamma = 1/(1 - \beta^2)^{1/2}$ в стационарных полях (1.1.1) - постоянна). После некоторых преобразований [1] можно понизить порядок интегрируемой системы (1.1.2) для скалярных уравнений в поперечной плоскости (XY) и заменить (1.1.2) следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_0 y - \omega_1 k_0^{-1} \cos(k_0 z), & \omega_0 &= eH_0/mc, \\ \dot{y} &= \omega_0 x - \omega_1 k_0^{-1} \sin(k_0 z), & \omega_1 &= eB_{\perp}/mc, \\ \dot{z} &= \omega_0 \omega_1 (\dot{x} \cos(k_0 z) + \dot{y} \sin(k_0 z)) \\ \dot{z}^2 &= c^2(\gamma^2 - 1) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Четвертое - дисперсионное уравнение, связывает продольную и поперечную компоненту импульса. Дальнейший анализ (1.1.3) проведем в цилиндрической системе координат, введя новые переменные:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \psi = k_0 z - \varphi. \quad (1.1.4)$$

При этом дифференциальные уравнения (1.1.3) приводятся к виду, замкнутому относительно переменных

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\omega_1 k_0^{-1} \cos \psi, & r \dot{\varphi} &= r \omega_0 - \omega_1 k_0^{-1} \sin \psi, \\ \dot{z} &= \omega_0 \omega_1 r \cos \psi, & \dot{z}^2 &= c^2(\gamma^2 - 1) - \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Для системы (1.1.3), (1.1.5) выпишем начальные и граничные условия

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad \dot{x} = -\omega_1/k_0, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z}_0^2 = (\gamma^2 - 1)c^2 - (\omega_1/k_0)^2 \quad (1.1.6)$$

Как следствие (1.1.5), имеем соотношение между квадратом радиуса и продольным импульсом

$$r^2 = 2(k_0 \omega_0)^{-1} (\dot{z} - \dot{z}_0) \quad (1.1.7)$$

О МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ЗАРЯДОВ

Свертка системы (1.1.5) приводит к одному уравнению, описывающему изменение продольного импульса в зависимости от длины пролета области раскачки. Для удобства выкладок введем новую переменную

$$\sigma = \dot{z} - \dot{z}_0 = 0.5 k_0 \omega_0 r^2,$$

тогда уравнение, описывающее изменение продольного импульса, примет вид

$$\dot{\sigma}^2 = 0.25 k_0^2 P_4(\sigma). \quad (1.1.8)$$

Переход к производной по z от производной по τ проведем согласно правилу

$$r \dot{\tau} = 0.5 \dot{z} (r^2)' = (k_0 \omega_0)^{-1} (\sigma + \dot{z}_0) \sigma',$$

штрих - производная по z . С учетом принятых обозначений и перехода к новой переменной дифференцирования уравнение (1.1.8) сводится к

$$\begin{aligned} (\sigma + \dot{z}_0)^2 \sigma'^2 &= 0.25 k_0^2 P_4(\sigma), \quad P_4(\sigma) = \sigma P_3(\sigma), \\ P_3(\sigma) &= -\sigma^3 - a_1 \sigma^2 - a_2 \sigma + a_3, \quad a_1 = 4(\dot{z}_0 + \omega_0 k_0^{-1}), \\ a_2 &= 4(\dot{z}_0 + \omega_0 k_0^{-1})^2, \quad a_3 = 8\omega_0 \omega_1^2 k_0^{-3}. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Полином в (1.1.8), (1.1.9) один и тот же.

2. Построение решений уравнения, описывающего изменение продольного импульса (σ).

Уравнение (1.1.9) позволяет разделить переменные (σ, z) и интегрируя, найти явное выражение для функции, описывающей изменение импульса продольного (или квадрата радиуса (1.1.7) от длины пролета области взаимодействия

$$z - z_0 = -2k_0^{-1} \int_0^\sigma (\sigma + \dot{z}_0) (P_4(\sigma))^{-1/2} d\sigma. \quad (1.2.1)$$

Во второй части статьи аналогичная задача будет решена иным методом, основанным на использовании уравнения (1.1.8). Интегрирование (1.2.1) и обращение полученного результата для получения $\sigma = f(z)$ представляет основную трудность поставленной задачи при произвольном соотношении между начальными условиями (1.1.6) и параметрами электромагнитного поля (1.1.1). Алгоритм ее решения заключается в анализе полинома $P_4(\sigma)$ (1.1.9) после приведения его к каноническому виду двумя заменами аргумента σ . Первая:

$$\bar{\sigma} = \sigma + \delta, \quad \delta = 4(\dot{z}_0 + \omega_0 k_0^{-1})/3, \quad P_4(\sigma) = -(\bar{\sigma} - \delta)(\bar{\sigma}^3 + \bar{p}\bar{\sigma} + \bar{q}) \quad (1.2.2)$$

Анализируя знак коэффициентов \bar{p}, \bar{q} и детерминанта Δ кубического трехчлена $P_3(\bar{\sigma})$ (1.2.2), находим

$$\bar{p} = -(3\delta^2/4) < 0, \quad \bar{q} = -0.25\delta^3 - 8\omega_0 \omega_1^2 k_0^{-3} < 0, \quad \Delta = (\bar{p}/3)^3 + (\bar{q}/2)^2,$$

т.е. $P_3(\bar{\sigma})$ имеет один действительный, два - комплексно-сопряженных

корня, представляемых обычными соотношениями через коэффициенты А,В [1,4]

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_1 &= A + B, \quad A = (-0.5\bar{q} + \Delta^{1/2})^{1/3}, \quad B = (-0.5\bar{q} - \Delta^{1/2})^{1/3}, \\ \bar{\sigma}_2 &= -0.5(A + B) + i0.5(A - B)3^{1/2}, \quad \bar{\sigma}_3 = 0.5(A - B) - i0.5(A-B)3^{1/2}.\end{aligned}$$

Разобьем $P_4(\bar{\sigma})$ на два квадратных трехчлена:

$$P_4(\bar{\sigma}) = -Q_1(\bar{\sigma})Q_2(\bar{\sigma}), \quad Q_1 = \bar{\sigma}^2 + p\bar{\sigma} + q, \quad Q_2 = \bar{\sigma}^2 + p'\bar{\sigma} + q', \quad (1.2.3)$$

p, p', q, q' - коэффициенты полиномов второй степени Q_i , связанные с корнями кубического полинома $P_3(\bar{\sigma})$ (1.2.2) соотношениями:

$$\begin{aligned}p &= -(A + B + \delta), \quad q = \delta(A + B), \quad p' = (A + B), \\ q' &= 0.25 [(A + B)^2 + 3(A - B)^2].\end{aligned}$$

Дробно-линейная замена аргумента $\bar{\sigma} \rightarrow v$ приводит $P_4(\bar{\sigma})$ (1.2.2) к общепринятому виду [4]

$$v = (v - \bar{\sigma})(\bar{\sigma} - \mu)^{-1}, \quad P_4(v) = (w_0 - v^2)(w + v^2), \quad (1.2.4)$$

$$w_0 = (v^2 + pv + q)(\mu^2 + p\mu + q)^{-1}, \quad w = (v^2 + p'v + q')(\mu^2 + p'\mu + q')^{-1} \quad (1.2.5)$$

где μ, ν - решения квадратного уравнения, возникающего при замене (1.2.4)

$$\begin{aligned}\mu &= (2a)^{-1}[-b + (b^2 + 2ad)^{1/2}], \quad \nu = (2a)^{-1}[-b - (b^2 + 2ac)^2], \\ a &= -0.5(p - p'), \quad b = (q' - q), \quad d = p'q - pq'.\end{aligned}$$

Причем $w_0 > 0, w > 0$. При этом интегральное уравнение (1.2.1) сводится к следующему

$$\begin{aligned}z - z_0 &= -2(k_0 \ell)^{-1} \{ (\mu - \delta + z_0)(\mu - \nu) \int_{\nu_0}^{\nu} (P_4(v))^{-1/2} dv - \\ &- (\mu - \nu)^2 \int_{\nu_0}^{\nu} [(1+v)P_4(v)]^{-1} dv \}, \quad \ell = [(\mu^2 + p\mu + q)(\mu^2 + p'\mu + q')]^{-1}\end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Первый интеграл в правой части (1.2.6) -эллиптический первого рода. Обозначим его буквой F, получаем

$$\begin{aligned}F &= L(z - z_0) \{ 1 - 0.5 k_0 (\nu - \mu)^2 [\ell(z - z_0)]^{-1} \int_{\nu_0}^{\nu} (1+v)^{-1} (P_4(v))^{-1/2} dv \} + F_0 \\ L &= 0.5 \nu k_0 (w_0 + w)^{1/2} \ell (\mu - \delta + z_0)^{-1} (\nu - \mu)^{-1}\end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Согласно теореме Лагранжа преобразуем интеграл в правой части (1.2.7) (F_0 - эллиптический интеграл первого рода в постоянных пределах)

$$\begin{aligned}(z - z_0)^{-1} \int_{\nu_0}^{\nu} (1+v)^{-1} (P_4(v))^{-1/2} dv &\approx ((1+v)^{-1} (P_4(v))^{-1/2} \frac{dv}{dz} \Big|_{v=\xi}, \\ \xi &\in [\nu_0, \nu].\end{aligned}$$

В результате, обращаясь к (1.1.9), имеем вместо (1.2.7)

$$F = L(z-z_0)\{1-(\nu-\mu)[(\mu\nu + \nu + \dot{z}_0 - \delta)(1+\nu)]^{-1}|_{\nu=\xi}\} + F_0 \quad (1.2.8)$$

Обращение интеграла (1.2.8) приводит к следующему результату, дающему аналогичное описание изменения продольного импульса (квадрата радиуса) заряда при пролете электромагнитной конфигурации (1.1.1)

$$\sigma(z) = [(\nu - \delta) - (\mu' - \delta)abd \operatorname{dn}(u,k)]/[1 + abd \operatorname{dn}(u,k)] \quad (1.2.9)$$

$$u = L(z - z_0)\{1 - (\mu - \nu)[(\mu\nu + \nu + \dot{z}_0 - \delta)(1 + \nu)]^{-1}|_{\nu=\xi} + F_0 \quad (1.2.10)$$

$$k^2 = w_0/(w_0 + w) \quad (1.2.11)$$

Но возможности аналитического (качественного) анализа поставленной задачи значительно расширяются, если рассмотреть уравнение (1.1.8) и построить фазовый портрет колебаний продольного импульса σ .

3. Представление решений на фазовой плоскости. Амплитуда колебаний радиуса.

Полином $P_4(\nu)$ (1.2.4) является согласно постановке задачи выражением для эффективности потенциала, в границах которого финитно меняется продольный импульс (квадрат радиуса). Это можно проиллюстрировать на фазовой плоскости $\nu, \dot{\nu}$ (замкнутый эллипс), которой соответствует потенциальная кривая $P_4(\nu)$. Соотношение между корнями полинома (1.2.4) определяет единственный тип решения - два действительных корня. Траекторная кривая на фазовой плоскости, соответствующая данной потенциальной кривой, представляет собой замкнутый овал, что подтверждает описание решения, заданного эллиптической функцией (1.2.9).

Пределы изменения квадрата радиуса при пролете заряда сквозь поле ондулятора (раскачка поперечных колебаний) может быть определена более точным методом. Для этого заменим в дисперсионном соотношении \dot{z} на r^2 согласно (1.1.7). Получим кубическое уравнение относительно r

$$r^3 + 4r(k_0\dot{z} + \omega_0)/(k_0^2\omega_0) - (k_0\omega/8\omega_1)\sin \psi = 0 \quad (1.3.1)$$

Знак детерминанта уравнения (1.3.1), а, следовательно, тип корней уравнения (1.3.1) определяется величиной δ (близостью циклотронной частоты к баунс-частоте), при которой достигается максимальная закрутка пучка [3]. При $\delta=0$ имеем

$$r = r_m(\sin \psi)^{1/3}, \quad r_m = 2(\omega_1/k_0^3\omega_0)^{1/3} \quad (1.3.2)$$

В зависимости от величины отношения w_1/w_0 (B_{\perp}/H_0) меняется r_m , т.е. r является осциллирующей функцией разности фаз $\psi = kz - \varphi$, но ограниченной. Более точная количественная оценка поперечных дается формулой (1.2.9) при $\delta=0$. Тогда

$$\sigma(z) = \mu[\nu/\mu - \operatorname{dn}(u|k)]/[1 + \operatorname{dn}(u|k)], \quad (1.3.3)$$

$$u = L|_{\delta=0}(z - z_0)\{1 - (\mu - \nu)[(\mu\nu^* + \nu + \dot{z}_0)(1 + \nu^*)]^{-1}\} + F_0 \quad (1.3.4)$$

при следующих значениях параметров

$$w=(1+(3)^{1/2})^2/(1-(3)^{1/2})^2, w=1, \mu=((3)^{1/2}-1)r_m/2, \nu=-((3)^{1/2}+1)r_m/2.$$

Амплитуда колебаний r^2 , как видно из (1.3.3), (1.3.4), пропорциональна r_m . Более точная оценка затруднена необходимостью определения вклада эллиптического интеграла первого рода F_0 и v^* в аргумент u (1.3.4), что может быть проведено при конкретных значениях параметров.

Как следует из (1.1.3), в данной конфигурации стационарных магнитных полей (1.1.1) энергия не меняется, т.е. она служит для раскачки поперечных колебаний. На следующем отрезке траектории включается высокочастотное электромагнитное поле. Проведем анализ взаимодействия с ним аналогично рассмотренному.

§2. Область взаимодействия с высокочастотным электромагнитным полем.

1. Постановка задачи. Интегралы движения.

Пусть из области раскачки поперечных колебаний заряд попадает в область существования стационарного винтового магнитного поля и электромагнитной волны, заданных выражением

$$\begin{aligned} H &= B_1(\cos(k_0 z) i + \sin(k_0 z) j) - [n A'] / (c \beta_\phi), \\ A &= -(c E_0 / \omega)(\sin(\omega \xi) i + \cos(\omega \xi) j), \quad \xi = t - z / (c \beta_\phi) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

β_ϕ - фазовая скорость циркулярно - поляризованной электромагнитной волны, штрих - производная по ξ . Будем предполагать, что в момент влета в область, занятую данными полями (2.1.1), могут быть отличны от нуля все три компоненты скорости заряда. Как и раньше пренебрегаем электрическими и магнитными полями, создаваемыми самим зарядом.

Исходные анализируемые уравнения движения и баланса энергии отличаются от (1.1.2)

$$p = -eE - \frac{e}{mc} [pH], \quad \dot{\gamma} = e(m^{-2}c^{-3})(pA'). \quad (2.1.2)$$

После некоторых преобразований приходим к интегралам движения в поперечной плоскости (XY), позволяющим понизить порядок интегрируемой системы

$$\begin{aligned} p_1 &= \dot{x} + c \varepsilon_\perp (\omega_1 / \omega) \sin \omega \xi + (\omega_1 / k_0) \cos k_0 z, \quad \varepsilon_\perp = E_0 / B_\perp, \\ p_2 &= \dot{y} - c \varepsilon_\perp (\omega_1 / \omega) \cos \omega \xi + (\omega_1 / k_0) \sin k_0 z. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Анализ уравнений баланса энергии и z - компоненты импульса также позволяет понизить порядок решаемой системы уравнений, т.е. получить интеграл движения, связывающий энергию и z - компоненту импульса

$$\alpha = (1 + \beta_\phi (\lambda / \lambda_0)) \gamma - \beta_\phi (k_0 / c) (p_2 x - p_1 y), \quad (2.1.4)$$

где x, y - координаты заряда в плоскости (X,Y), p_i - интегралы (константы), а частоты, длины волн и волновые вектора связаны обычными соотношениями: $k_s = \omega / c = 2\pi / \lambda$, $k_\perp = \omega_1 / c = 2\pi / \lambda_\perp$.

2. Вывод уравнения, описывающего изменение энергии заряда.

Анализ энергетического состояния электрона в полях типа (2.1.1) на основе построения и решения уравнения для энергии с помощью интегралов (2.1.3), (2.1.4) представляется удобным провести, как и прежде (1.1.4),

(2.1.3), (2.1.4) представляется удобным провести, как и прежде (1.1.4), (1.1.5), в цилиндрической системе координат. Для этого введем, кроме γ , φ , ψ , величину $\theta = \varphi - \omega\xi$. Пусть $p_1 = p_2 = 0$. Принятые ограничения незначительно сужают задачу, но позволяют получить решение в квадратурах. При этом система дифференциальных уравнений первого порядка, состоящая из (2.1.3), (2.1.4) и дисперсионного уравнения, приводится к замкнутому виду, подобному (1.1.5)

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -(\omega_1/k_0) \cos \psi + c\varepsilon_{\perp}(\omega_1/\omega) \sin \theta, \\ r\dot{\varphi} &= -(\omega_1/k_0) \sin \psi + c\varepsilon_{\perp}(\omega_1/\omega) \cos \theta, \\ \dot{z} &= c^2(\gamma^2 - 1) - \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2, \quad \dot{\psi} = \varepsilon_{\perp} \omega_1^2 (ck_s)^{-1} \cos(\theta + \psi) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Система уравнений (2.1.1) позволяет построить дифференциальное уравнение нелинейных колебаний, описывающее изменение энергии заряда γ в стационарном винтовом магнитном поле и поле плоской волны (2.1.1) как функцию τ

$$\begin{aligned} 4\omega^{-2} \dot{\gamma}^2 &= Q_1 Q_2, \quad Q_1 = -\bar{a}\gamma^2 - \bar{b}\gamma + \bar{f}_0, \quad Q_2 = \bar{a}\gamma^2 + \bar{b}\gamma - \bar{f}_0 + f, \\ \bar{a} &= 1 - (\bar{d}/\beta_{\phi})^2, \quad \bar{d} = 1 + \beta_{\phi}(\lambda/\lambda_0), \quad \bar{b} = 2\alpha\bar{d}\beta_{\phi}^{-2}, \\ \bar{f}_0 &= 1 + (\alpha/\beta_{\phi})^2 + [(\omega_1/ck_s)(1 + \varepsilon(\lambda/\lambda_0))]^2, \quad f = 4\varepsilon_{\perp}(\lambda/\lambda_0)(\omega_1/k_s)^2. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Преобразуем полиномы Q_i с помощью подстановки $v = \gamma + \bar{b}/(2\bar{a})$ к каноническому виду

$$\begin{aligned} Q_1 Q_2 &= -\bar{a}^2(\bar{w}_0 + v^2)(\bar{w} + v^2), \\ \bar{w}_0 &= -(\beta_{\phi}/(\beta_{\phi}^2 - \bar{d}^2))^2(\alpha^2 + \bar{a}d_+\beta_{\phi}^2), \quad d_+ = 1 + (\lambda_0/\lambda_{\perp}^2)(1 + \varepsilon_{\perp}(\lambda/\lambda_0))^2, \\ \bar{w} &= -(\beta_{\phi}/(\beta_{\phi}^2 - \bar{d}^2))^2(\alpha^2 + \bar{a}d_-\beta_{\phi}^2), \quad d_- = 1 + (\lambda_0/\lambda_{\perp}^2)(1 - \varepsilon_{\perp}(\lambda/\lambda_0))^2 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

В результате мы приходим к выражению для потенциальной функции $P_4(v)$, аналогичному приведенному в (1.2.4). Уравнение (2.2.2) можно преобразовать к подобному (1.1.9), перейдя к дифференцированию по z ,

$$(v + v_0)^2 (v')^2 = Q_1(v) \cdot Q_2(v), \quad v_0 = -(\bar{b}/(2\pi) + \alpha/\bar{d}). \quad (2.2.4)$$

Анализ энергетического состояния заряда в электромагнитном поле (2.1.1) является не единственным методом решения данной задачи. Используя замкнутую систему уравнений (2.2.1), данную задачу можно сформулировать иначе, введя понятие фазы и фазовых колебаний

$$\Phi = \theta + \psi = 2\pi[z/\lambda_0 - (ct - z/(c\beta_{\phi}))]/\lambda. \quad (2.2.5)$$

С помощью системы (2.2.1) выводится уравнение фазовых колебаний

$$\ddot{\Phi} + \omega_{\phi}^2 \Phi = 0, \quad \omega_{\phi}^2 = \bar{a} \varepsilon_{\perp} \omega_1^2. \quad (2.2.6)$$

Решив уравнение фазовых колебаний (2.2.6), можно с помощью

$$\dot{\Phi} = 2\pi \bar{a} \dot{z}/(\lambda\beta_{\phi}) - 2\pi c\gamma/\lambda,$$

устанавливающей связь между фазовой скоростью $\dot{\Phi}$, \dot{z} , γ и интегралом

движения (2.1.4) для энергии, и z - компоненты импульса, получить выражение для γ как функции пролетного угла. Последний метод анализа поставленной задачи (аналогия с решением уравнения колебаний маятника) будет изложен в отдельной работе. В дальнейшем мы проведем анализ энергетического состояния заряда, построив решение нелинейного дифференциального уравнения (2.2.2). Зная производную от γ по τ , получим z - координату как функцию τ . Совместное решение параметрических уравнений для энергии и z - координаты должно определить основные особенности энергообмена с волной.

3. Построение решений уравнения для γ , представление решений на фазовой плоскости.

Анализ решений уравнения (2.2.2), т.е. определение типа колебаний, амплитуды и периода изменения энергии заряда, как и прежде, основывается на нахождении знака и абсолютной величины параметров \bar{w}_0 , \bar{w} . Удастся выделить следующие типы полиномов четвертой степени, определяющие все возможные формы решений (2.2.3)

$$\begin{aligned} \bar{w}_0 < 0, \bar{w} < 0, & P_1 = \bar{a}^2 |\bar{w}_0|^2 (1 - v^2)(v^2 - m_1), m_1 = |\bar{w}| / |\bar{w}_0|, \\ \bar{w}_0 > 0, \bar{w} < 0, & P_2 = \bar{a}^2 |\bar{w}_0|^2 (1 + v^2)(m_1 - v^2), \\ \bar{w}_0 = 0, \bar{w} < 0, & P_3 = -\bar{a}^2 v^2 (\bar{w} + v^2), \\ \bar{w}_0 < 0, \bar{w} = 0, & P_4 = -\bar{a}^2 v^2 (\bar{w}_0 + v^2), \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

комбинации параметров $\bar{w}_0 \leq 0, \bar{w} \geq 0$ физически не реализуемы. Приведенные к канонической полиномы (2.3.1) позволяют свести решение задачи о нахождении энергии заряженной частицы к обращению эллиптических интегралов

$$0.5 \cdot w \cdot (\tau - \tau_0) = s \int_{v_0}^v (P_i(v))^{-1/2} dv, \quad i=1,2,3,4, \quad s = \text{sign} \cos \Phi, \quad (2.3.2)$$

Полиномы P_i (2.3.1) являются выражением для эффективного потенциала, в границах которого меняется энергия частиц (в (1.2.4) продольный импульс или квадрат радиуса). Это иллюстрируется на рис.1а,б, где приведены потенциальные кривые $P_i(v)$ и соответствующие им диаграммы на фазовой плоскости v, \dot{v} . Соотношение между корнями полинома $P_i(v)$: $\mp 1, \mp (m_1)^{1/2}$ позволяет выделить возможные типы решений в зависимости от величины m_1 : $m_1 < 1; m_1 > 1; m_1 = 1; m_1 = 0$. Решения, определяемые $P_{1,2}$, описываются эллиптическими функциями одного типа, различие заключается в расположении корней, т.е. в величине дополнительного модуля m_1 . Третий тип решений соответствует значению $m_1 = 0$, т.е. непериодическому, солитонному решению. Четвертый тип решения определен значением дополнительного модуля $m_1 = 1$, поэтому не описывается (2.3.1), т.е. потенциальная кривая P_5 только касается оси v в точках $v = \mp 1$. На фазовой плоскости траектория данной потенциальной кривой вырождается в точку, что означает движение без изменения энергии. Данная ситуация реализуется в одном случае, когда амплитуда высокочастотного поля $E_0 = 0$ независимо от внешних условий. Проведенный анализ позволяет представить изменение энергии - v и z - координаты частицы следующими функциями [4]

$$m_1 < 1 \begin{cases} v = (m_1)^{1/2} \operatorname{nd}(u + \bar{u} | m), \quad m = 1 - m_1, \\ z = q\tau + 2\bar{d} \operatorname{sc} / (\beta_\phi \omega | \bar{a} |) [\arccos(\operatorname{cd}(u + \bar{u} / m) - \operatorname{arccos} \operatorname{cd} \bar{u})], \end{cases} \quad (2.3.3.1)$$

$$m_1 > 1 \begin{cases} v = (m_1)^{1/2} \operatorname{cn}((1 + m_1)^{1/2} u + \bar{u} | M), \quad M = m_1 / (1 + m_1), \\ z = q\tau + 2\bar{d} \operatorname{sc} / (\beta_\phi \omega | \bar{a} |) [\arccos(\operatorname{dn}((1 + m_1)^{1/2} u + \bar{u} / M)) - \operatorname{arccos} \operatorname{dn}(\bar{u} / M)] \end{cases} \quad (2.3.3.2)$$

$$m_1 = 1 \begin{cases} v = 2\rho / (\exp(-u) + (\rho)^2 \exp(u)), \\ z = q\tau + 4\bar{d} / (\beta_\phi \omega | \bar{a} |) [\operatorname{arctg}(\rho \exp(u)) - \operatorname{arctg}(\rho)], \end{cases} \quad (2.3.3.3)$$

где

$$q = -(\alpha + \bar{b}\bar{d} / (2\bar{a})) c / \beta_\phi, \quad \rho = v_0 / (1 + (1 - v_0^2)^{1/2}), \quad u = 0.5 | \bar{a} | (\operatorname{abs}(w_0))^{1/2} \omega (\tau - \tau_0)^{1/2}$$

$$\bar{u} = \operatorname{nd}^{-1}(v_0 / m_1)^{1/2} | 1 - m_1 |, \quad \bar{u} = \operatorname{cn}^{-1}(v_0 / m_1)^{1/2} | m_1 / (1 + m_1) |.$$

Из формул (2.3.3) следует, что рассматриваемая задача свелась к решению системы двух параметрических уравнений. Наличие параметра m_1 (\bar{w}_0 , \bar{w}) дает возможность влиять на динамику электрона, а параметрические выражения (2.3.3) определяют период изменения $\gamma_i(z)$ ($i=1,2,\dots$), линейно связанной с энергией, как функцию от z .

Пусть известен период изменения γ_i как функции от τ [4] при $m < 1$

$$T_1 = 4K(m) / (|a| \omega | \bar{w}_0 |^{1/2}), \quad T_2 = 8K(M) / (|a| \omega (| \bar{w}_0 |^{1/2} (1 + m_1)^{1/2})). \quad (2.3.4)$$

Подставим в уравнение, определяющее z как функцию τ два значения τ_0 (τ , $\tau_0 + T$). Слева соответственно получим z_1 / λ , z_2 / λ . Разность $(z_2 - z_1) / \lambda$ дает выражение для периода

$$T_i(z / \lambda) = q T_i(\omega \tau), \quad i=1,2.$$

Кроме рассмотренных режимов изменения энергии и z - компоненты заряда при пролете через область существования электромагнитного поля (2.1.1) представляет особый интерес нахождение тех параметров внешнего поля или параметров пучка, при которых изменение энергии электронов происходит по гармоническому закону, т.е. амплитуда колебаний должна быть максимальной.

Пусть коэффициент при старшем члене в полиномах Q (2.2.3) равен нулю ($\bar{a}=0$), что приводит к соотношению между β_ϕ и λ / λ_0 : $\beta_\phi = \lambda_0 / (\lambda + \lambda_0)$. При этом выражение для энергии и z - координаты заряда после прямого интегрирования (2.2.2) принимает вид

$$\gamma = [2f_0 - f + f \sin(\nu(0.5\omega\tau - u_0))] / (2b)$$

$$z = q_1 \tau - 2fc / (\beta_\phi \omega \bar{b}^2) [\cos(0.5\bar{b}\omega\tau - u_0) - \cos u_0], \quad (2.3.5)$$

$$q_1 = [-\alpha + 0.5(2f_0 - f)\bar{d} / \bar{b}] c / \beta_\phi, \quad u_0 = \nu \operatorname{arcsin}[(-2b\gamma_0 + 2f_0 - f) / f].$$

Для всех рассмотренных режимов изменения энергии заряда (2.3.4), (2.3.5) при движении в заданном поле (2.1.1) можно записать приближенные аналитические выражения, связывающие γ и z по аналогии с (1.2.9) с ограничением на параметры q , q_1 , \bar{a} , \bar{d} , что связано с необходимостью пренебречь нелинейными членами в выражении для z - компоненты.

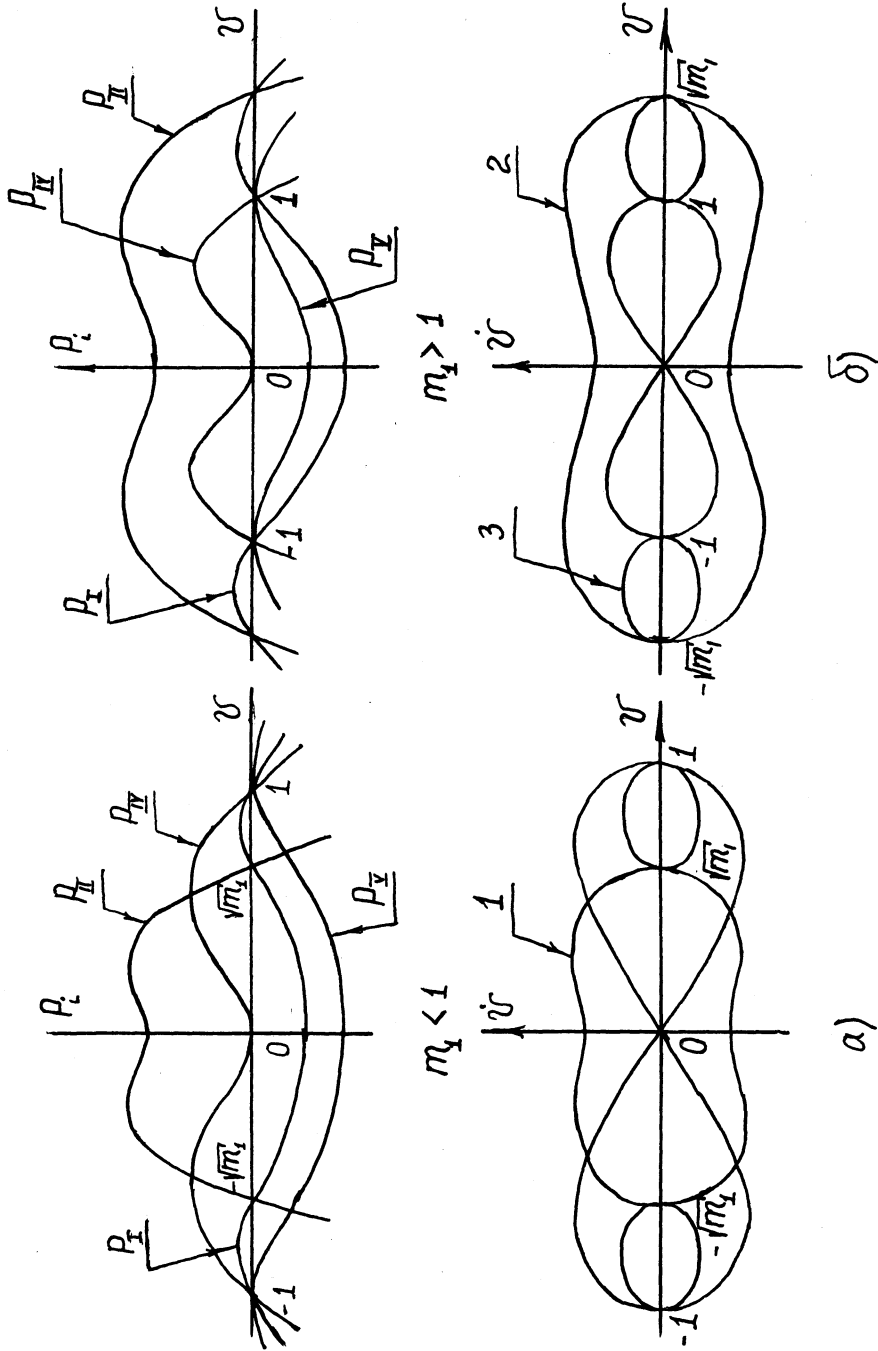


Рис.1.

4. Сравнение с результатами прямого численного интегрирования.

Для проверки правильности построенных выражений для изменения энергии, координаты z заряда (2.3.3), а также интегралов движения (2.1.3), (2.1.4) проводилось прямое численное интегрирование системы нелинейных дифференциальных уравнений (2.1.2) без уравнения баланса энергии, в качестве аргумента принимался пролетный угол ωt . Как было показано ранее, в суперпозиции полей (2.1.3) сохраняется поперечная часть обобщенного импульса $P_{1,2}$ (2.1.3), поэтому было принято $P_{1,2}=0$. Решение системы уравнений при выполнении данного условия относительно z_0, t_0 приводит к следующим значениям начальных данных

$$k_y z_0 = \varphi_0 \pm \arccos [(a_1^2 + d_1^2 - c_1^2)/2a_1 d_1] + 2\pi n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\omega \xi_0 = \varphi_0 \mp \arccos [(a_1^2 + c_1^2 - d_1^2)/2a_1 c_1] + 2\pi m + \pi/2, \quad m = 1, 2, \dots,$$

a_1, d_1, c_1 - начальные данные, зависят от параметров заданного электромагнитного поля, энергии γ_0 и компонент скорости β_{x0}, β_{y0} на входе в область взаимодействия с внешним полем (2.1.1) при $z=z_0$

$$a_1 \cos \varphi_0 = -\gamma_0 \beta_{x0}, \quad a_1 \sin \varphi_0 = -\gamma_0 \beta_{y0}, \quad c_1 = \epsilon_s \omega_1 / \omega, \quad d_1 = \omega_1 / \omega.$$

Причем совокупность параметров должна удовлетворять условиям

$$|(a_1^2 + d_1^2 - c_1^2)/2a_1 d_1| \leq 1, \quad |(a_1^2 + c_1^2 - d_1^2)/2a_1 c_1| \leq 1$$

Графики, приведенные на рис.2 иллюстрируют изменение энергии $\Delta\gamma = (\gamma - \gamma_H)/(\gamma_H - 1)$ при следующих величинах входных параметров. Кривая 1 соответствует условиям: $\bar{\omega}_0 > 0, \bar{\omega} < 0, m_1 = 0.2 < 1$. На фазовой плоскости рис.1а это область, ограниченная линией 1 (эффективный потенциал P_H). Ход кривой 1 (рис.2) описывается эллиптической функцией sn (2.3.3.2). Амплитуда изменения энергии γ и период по ωt совпадают с результатом прямого численного интегрирования.

Кривая 2 (рис.2) отличается величиной фазовой скорости высокочастотного электромагнитного поля, остальные параметры оставлены прежними. Ей соответствуют значения: $\bar{\omega}_0 > 0, \bar{\omega} < 0, m_1 = 2.547 > 1$. На фазовой плоскости (рис.1б) это овальная область, ограниченная линией 2 (эффективный потенциал P_H), описывается эллиптической функцией sn (2.3.3.2).

Третий вариант численного расчета (рис.2, кривая 3) проведен при $m_1 > 1$, но описывается эллиптической функцией (2.3.3.1). На рис.1б-это область 3 (эффективный потенциал P_f) с периодом по ωt

$$\bar{\omega}_0 = m/(1+m), \quad \bar{\omega}_1 = (1+m_1)^{-1}, \quad T = 4K(m)/(|\bar{\omega}| |w_0|^{1/2}) = 4.803$$

Траекторная кривая 4 рис.2 соответствует гармоническим колебаниям при пролете заряда.

Для нахождения зависимости $\gamma(z)$ был использован итерационный алгоритм решения параметрической задачи (2.3.3), (2.3.5). Достаточным условием сходимости итерационного процесса является выполнение неравенств

$$|\bar{q}_k / A_k| < 1, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

$$\bar{q}_{1,2,3} = q, \quad \bar{q}_4 = q_1, \quad A_1 = 2cd/(\bar{a}\beta), \quad A_2 = 2[m/(1+m)]^{1/2} A,$$

$$A_3 = 2A_0, \quad A_4 = 2cf/(b\beta\phi)^2$$

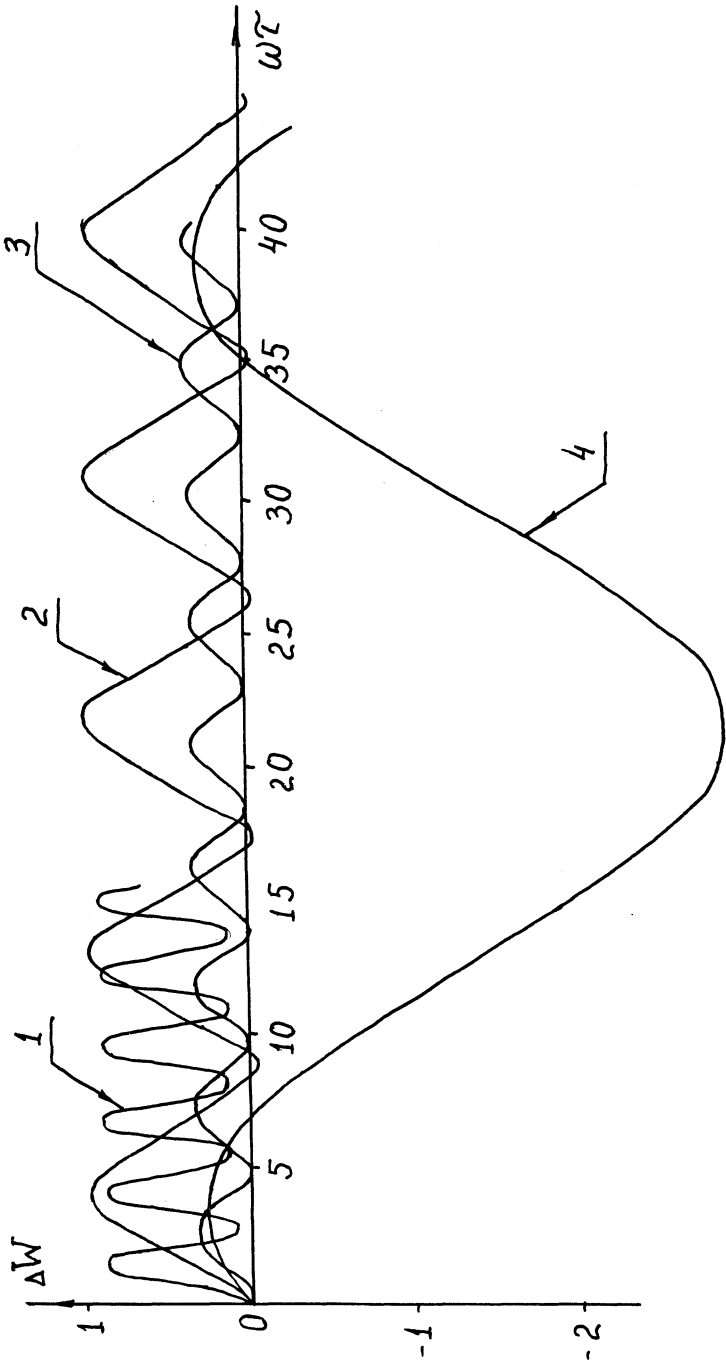


Рис.2.

При этом системы уравнений (2.3.3) , (2.3.5) однозначно разрешимы относительно $\gamma(z)$, так как $z(\tau)$ -неубывающая на всем исследуемом интервале функция.

Расчеты, проведенные для z - координаты электрона как функции τ , подтвердили, что можно выделить диапазон параметров, в котором они связаны линейной зависимостью. Оценка влияния остаточного члена на точность вычислений требует дополнительного исследования.

Заключение. Основные результаты , полученные в статье, сводятся к следующим.

В работе построены интегралы движения заряженных частиц в электромагнитных полях типа вигглера (1.1.7) , (2.2.2). Они позволяют понизить порядок исследуемой задачи (1.1.2) , (2.1.2) и свести ее к анализу системы дифференциальных уравнений первого порядка (1.1.3) , (2.1.3) в декартовых координатах или (1.1.5) , (2.2.1) в цилиндрических. Последние представляют замкнутую систему уравнений, сводящуюся к одному нелинейному дифференциальному уравнению (1.1.9) или (2.2.2).

Полученное аналитическое представление в эллиптических функциях для изменения амплитуды продольного импульса (квадрата радиуса) (1.2.9) и эффективности взаимодействия зарядов (2.3.3). Анализ решений нелинейных дифференциальных уравнений (1.1.9) , (2.2.2) проведен различными методами.

На основе фазового анализа указанных дифференциальных уравнений описываются качественные и некоторые количественные особенности движения заряда , не решая численно задачу при каждом значении параметра. Найдены периоды и амплитуды колебаний квадрата радиуса и энергии заряда.

Сравнение построенных аналитических решений поставленной задачи , проведенное при различных значениях входных параметров , с результатами прямого численного интегрирования по методу Рунге-Кутты показало их совпадение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Володин Б.А., Хапаев А.М.* Решение одной задачи, связанной с динамикой электрона. //ЖВМ и МФ, 1987, т.27, N2, с.245-251.
2. *Володин Б.А., Хапаев А.М.* Математическое моделирование процессов индуцированного излучения в переменных электромагнитных полях. //Матем. моделирование, 1989, т.1, N4, с.100-109.
3. *Т.Маршалл.* Лазеры на свободных электронах, М.: Мир, 1987.
4. *М.Абрамовиц, И.Стиган.* Справочник по специальным функциям. - М.: Наука, 1979.
5. *Терновский В.В., Хапаев А.М.* К вопросу о движении частиц в системах типа лазера на свободных электронах. // 5 Всесоюзный семинар по релятивистской СВЧ электронике, Москва, 1984, с.267.

Поступила в редакцию
04.02.93.