V. V. Golovizin, On the distribution of integer points on hyperbolic surfaces of the second order, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1981, Volume 106, 52–69

В.В.Головизин

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

§ I. Введение.

В предлагаемой статье дается обобщение некоторых результатов А.В.Малышева [3] и Б.З.Мороза [4] о распределении целых точек на поверхностях второго порядка.

Введем следующие обозначения: $x=(x_1,\dots,x_s)$ – s-мерный вектор; $(x,y)_s=\sum_{k=1}^{s} x_k y_k$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^s$; $A[x]=(x,Ax)=\sum_{k,j=1} a_{kj}x_k x_j$ – квадратичная форма от S переменных $x_1,\dots,x_s$ с симметрической матрицей коэффициентов $A=(a_{kj})$ размера $s\times s$, $a_{kj}\in\mathbb{C}$ $(k,j=1,\dots,s)$; $\|x\|=\max_{1\leqslant k\leqslant s}|x_k|$; $\|A\|=\max_{1\leqslant k\leqslant s}\sum_{j=1}^{s}|a_{kj}|$; $|x|=\sqrt{(x,x)}$; $\lambda_1(A)\geqslant\lambda_2(A)\geqslant\dots\geqslant\lambda_s(A)$ – собственные числа вещественной симметрической матрицы A размера $s\times s$; $A>0$ – положительно определенная вещественная симметрическая матрица; ε – произвольное, сколь угодно малое, положительное вещественное число.

Везде в этой работе будем предполагать, что $\mathcal{P}$ – поверхность, задаваемая уравнением

$$p(x)=0, \tag{I.I}$$

где $p(x)=A[x]+(b,x)+c$ – многочлен второго порядка с целыми рациональными коэффициентами, $c\in\mathbb{Z}$, $b=(b_1,\dots,b_s)\in\mathbb{Z}^s$, $A=(a_{kj})$, $a_{kj}=a_{jk}$, $a_{kj}+a_{jk}\in\mathbb{Z}$, $a_{kk}\in\mathbb{Z}$ $(k,j=1,\dots,s)$; $d=\det A\neq 0$; $s\geqslant 4$ и при $s=4$ $A^{-1}[b]\neq 4c$.

Запись $\sum_{p(x)=0}$ и $\sum_{x\in\mathbb{Z}^s_{q-1}}$ означает, что суммирование ведется по всем целочисленным векторам $x=(x_1,\dots,x_s)$, удовлетворяющим в первом случае уравнению (I.I), а во втором условию $1\leqslant x_k\leqslant q-1$, $k=1,\dots,s$.

ТЕОРЕМА.I. Пусть

$$\omega(x)=G[x]+(\beta,x)+\gamma \tag{I.2}$$

– многочлен второй степени с комплексными коэффициентами. Обозначим

$$\left.\begin{array}{llll} G' = \operatorname{Re} G, & G'' = \operatorname{Im} G, & \beta' = \operatorname{Re} \beta, \\ \beta'' = \operatorname{Im} \beta, & \gamma' = \operatorname{Re} \gamma, & \gamma'' = \operatorname{Im} \gamma; \end{array}\right\} \qquad (I.3)$$

τ и η – фиксированные вещественные числа; N – положительное вещественное число;

$$R(N) = \sum_{P(x)=0} \exp\left\{-\frac{\omega(x)}{N}\right\} \qquad (I.4)$$

– взвешенное число целочисленных решений уравнения (I.I);

$$W(N) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{c}{N} z + \frac{1}{4N}(Az+G)^{-1}[Bz+\beta]\right\}}{\sqrt{\det(Az+G)}}\, dz; \qquad (I.5)$$

$$H(p) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-s} \sum_{h \,(\mathrm{mod}\, q)}{}' S(hp; q) \qquad (I.6)$$

– особый ряд, где

$$S(hp; q) = \sum_{x \in Z^s_{q-1}} \exp\left\{2\pi i \frac{P(x)}{q}\right\}$$

– сумма Гаусса.

Пусть

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le \tau \le \eta < \frac{1}{2}, \quad (A+G') > 0, \quad \lambda_s(A+G') \gg \|A\| N^{-\frac{\varepsilon}{s}}, \\ c \ll N, \quad \gamma' \ll N, \quad \|B\| \ll N^{\frac{1}{2}-\eta-\varepsilon}, \\ \|\beta'\| \ll N^{\frac{1}{2}-\eta-\varepsilon}, \quad \|\beta''\| \ll N^{\frac{1}{2}+\eta}, \\ \|G'\| \ll \|A\| N^{\frac{\varepsilon}{s}}, \quad \|G''\| \ll N^{\tau+\frac{\varepsilon}{s}} \end{array}\right\} \qquad (I.7)$$

Тогда при $N \longrightarrow \infty$

$$R(N)=\pi^{\frac{s}{2}} N^{\frac{s}{2}-1} exp\left\{-\frac{\gamma}{N}\right\} W(N)\, H(p)+$$

$$+\left\{\begin{array}{l} O\left(\|A\|^{\frac{s}{4}} d^{\frac{3}{2}} N^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\frac{s\tau}{2}+\frac{(s-1)h}{2}+\varepsilon}\right), \text{ если } 4c\neq A^{-1}[b] \\ \qquad\qquad (\text{т.е.поверхность } \mathcal{P} \text{ не конус}) \\ O\left(\|A\|^{\frac{s}{4}} d^{\frac{3}{2}} N^{\frac{s}{4}+\frac{s\tau}{2}+\frac{(s-1)h}{2}+\varepsilon}\right), \text{ если } 4c=A^{-1}[b] \\ \qquad\qquad (\text{т.е.поверхность } \mathcal{P} - \text{конус}) \end{array}\right\} \tag{I.8}$$

Постоянные, входящие в знаки $<<$ и O, зависят только от s и ε.

В случае, когда матрицы A и G диагональные, из этой теоремы, как частный случай, следует теорема I работы [3]. Заметим, что в остаточном члене асимптотической формулы, доказываемой в [3] (§ 4, формула (5)), имеется небольшая неточность. Вместо множителя $d^{\frac{s}{4}+\frac{1}{2}}$ должно стоять $d^{\frac{s}{4}+\frac{3}{2}}$. Эта неточность явилась результатом неправильного применения обобщенной леммы Клостермана (См. [2], гл.II, теорема 3).

Доказательство теоремы I будет проведено в § 2. Сделаем несколько замечаний относительно оценок комплексного интеграла $W(N)$ и особого ряда $H(p)$.

Оценка снизу для комплексного интеграла $W(N)$ в некоторых частных случаях, наиболее важных для арифметических приложений, была получена в работе [3] § 3. Относительно оценки сверху для $W(N)$ имеет место следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть выполнены условия (I.7) теоремы I. Тогда

$$W(N) << \|A\|^{-\frac{s}{2}} N^{\tau+\varepsilon},$$

где постоянные, входящие в знак $<<$ зависят только от s и ε.

Доказательство предложения I будет проведено в § 3. Для оценок особого ряда $H(p)$ справедливы утверждения, аналогичные замечаниям 4, 5 работы [3]. В частности, имеет место следующая оценка сверху для $H(p)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть

$$s \geq 4, \quad d \neq 0, \quad 4c \neq A^{-1}[b], \quad \|b\| << N^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \quad c << N.$$

Тогда

$$0 \leqslant H(p) << d N^{\varepsilon}.$$

Доказательство предложения 2, проводимое аналогично доказательству замечания 4 работы [3], мы опускаем.

Пусть (s_1, s_2) - сигнатура квадратичной формы $A[x]$; $x^{(1)} = (x_1, \ldots, x_{s_1})$, $x^{(2)} = (x_{s_1+1}, \ldots, x_s)$. В пространствах векторов $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ введем, следуя [4], сферические координаты $(\theta^{(1)}, r_1)$ и $(\theta^{(2)}, r_2)$, $(\theta^{(j)} = (\theta_1^{(j)}, \ldots, \theta_{s_j-1}^{(j)})$, $j = 1, 2)$. Как известно, существует преобразование переменных над полем $\mathbb{R}$ $x \xrightarrow{f} z$, приводящее уравнение (I.I) к виду

$$|z^{(1)}|^2 - |z^{(2)}|^2 = m. \tag{I.9}$$

Обозначим

$$M(X) = \{x : |f(x)| \leqslant \sqrt{X}\},$$

где X - положительное вещественное число. На поверхности $\mathcal{P}$ введем сферические координаты (r, θ) по формулам

$$r(x) = |f(x)|, \quad \theta(x) = (\theta_1^{(1)}(f(x)), \ldots, \theta_{s_1-1}^{(1)}(f(x)), \theta_1^{(2)}(f(x)), \ldots, \theta_{s_2-1}^{(2)}(f(x))).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{U} \subset \mathcal{P} \cap M(X)$, где

$$\mathcal{U} = \{x \in \mathcal{P} \cap M(X) : g_1(\theta(x)) < r(x) < g_2(\theta(x))\},$$

функции $g_1(\theta)$ и $g_2(\theta)$ удовлетворяют условию Липшица

$$|g_j(\theta + \Delta) - g_j(\theta)| \leqslant R|\Delta|, \qquad R = O(X^{\frac{1}{2}+\varepsilon});$$

$N(\mathcal{U})$ - количество целых точек в области $\mathcal{U}$. Тогда

$$N(\mathcal{U}) = \mu(\mathcal{U})\, c(p) + O(X^{\frac{s}{2}-1+\varepsilon-\varkappa_s}), \tag{I.IO}$$

где

$$c(p) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}\, \Gamma(\frac{s}{2}-1)\, \Gamma(\frac{s}{2})\, H(p)}{2^{\frac{s}{2}-1}\, \Gamma(\frac{s_1}{2})\, \Gamma(\frac{s_2}{2}) \sqrt{d}},$$

$H(p)$ - особый ряд (I.6), $\varkappa_s > 0$ - постоянная, зависящая только от s и ν *) ($\nu = 0$, если поверхность $\mathcal{P}$ - конус и

*) В качестве $\varkappa_s$ можно взять: $\varkappa_s = \dfrac{s-4+4\nu}{32\, s^{2,5}(s+2)}$.

$\nu=\frac{1}{4}$ в противном случае). Предполагается, что коэффициенты многочлена ограничены и постоянные, входящие в знаки $\ll$ и O зависят от коэффициентов $\rho(x)$, S и ε.

В работе [4] доказывается асимптотическая формула (I.IO) в предположении, что матрица A диагональная. В нашей статье это ограничение снимается. Доказательство теоремы 2 будет проведено в § 4.

§ 2. Доказательство теоремы I.

Доказательство мы будем вести, следуя в общих чертах доказательству теоремы I статьи [3]. Поэтому часть рассуждений мы будем опускать, отсылая за подробностями к работе [3]. Рассмотрим только случай, когда поверхность $\mathcal{P}$ не конус, так как случай конуса доказывается аналогично.

I. Пусть $W\in\mathbb{C}$ и $|W|=exp\left\{-\frac{1}{N}\right\}$. Рассмотрим ряд

$$\vartheta(W)=\sum_{x\in\mathbb{Z}^s}W^{\rho(x)}exp\left\{-\frac{\omega(x)}{N}\right\}. \tag{2.I}$$

Из условия $A+G'>0$ следует его абсолютная сходимость. Расположив ряд (2.I) по степеням W, по теореме Коши, находим

$$R(N)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\vartheta(W)W^{-1}dW, \tag{2.2}$$

где $\Gamma: |W|=exp\left\{-\frac{1}{N}\right\}$.

2. Положим $M=[\sqrt{N}]$. Как и в [3], рассматривая дроби Фарея со знаменателями не больше M, равенство (2.2) можно записать так

$$R(N)=\sum_{q=1}^{M}\sum_{h(\mathrm{mod}\, q)}{}' \int_{-\frac{1}{q(q+q_1)}}^{\frac{1}{q(q+q_1)}}\vartheta\left(exp\left\{-\frac{1}{N}+2\pi i\left(\frac{h}{q}+\theta\right)\right\}\right)d\theta, \tag{2.3}$$

где q_1 и q_2 – знаменатели соседних дробей Фарея; $q_j\leqslant M$, $j=1,2$.

3. Аналогично п.3 § 4 [3]

$$\vartheta\left(exp\left\{-\frac{1}{N}+2\pi i\left(\frac{h}{q}+\theta\right)\right\}\right)=\pi^{\frac{s}{2}}q^{-s}exp\left\{-\frac{c+\gamma}{N}+2\pi i\left(\frac{h}{q}+\theta\right)c\right\}\times$$
$$\times\left(det\left(A+G-2\pi i\theta NA\right)\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{y\in\mathbb{Z}^s}S(hA,hb+y;q)\times$$
$$\times exp\left\{-\frac{\pi^2 N}{q^2}\left(A+G-2\pi i\theta NA\right)^{-1}\left[y-\frac{q}{2\pi N}(2\pi\theta Nb+ib+i\beta)\right]\right\}, \tag{2.4}$$

где
$$S(hA, hB+y; q) = \sum_{x\in Z^s_{q-1}} \exp\left\{ \frac{2\pi i}{q}\left(hA[x] + (hB+y, x)\right)\right\},$$

причем предполагается, что $\operatorname{Re}\sqrt{Z} > 0$.

4 . Обозначим
$$B = A + G', \quad C = G'' - 2\pi\theta NA, \quad T + iQ = (B+iC)^{-1}. \qquad (2.5)$$

Тогда, учитывая (2.4) и равенство
$$S(hA, hB+y; q)\exp\left\{\frac{2\pi i h c}{q}\right\} = S(hp, q)$$

(2.3) можно записать так
$$R(N) = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2, \qquad (2.6)$$

где
$$\mathfrak{J}_1 = (\pi N)^{\frac{s}{2}} \exp\left\{-\frac{c+\gamma}{N}\right\} \sum_{q=1}^{M} q^{-s} \sum_{h(\mathrm{mod}\, q)}{}' S(hp,q) \int_{-\frac{1}{q(q+q_2)}}^{\frac{1}{q(q+q_1)}} \left(\det(B+iC)\right)^{-\frac{1}{2}} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{4N}(T+iQ)\left[2\pi\theta NB - \beta'' + i(B+\beta')\right] + 2\pi i c\theta\right\} d\theta,$$

$$\mathfrak{J}_2 = (\pi N)^{\frac{s}{2}} \exp\left\{-\frac{c+\gamma}{N}\right\} \sum_{q=1}^{M} q^{-s} \sum_{h(\mathrm{mod}\, q)}{}' \int_{-\frac{1}{q(q+q_2)}}^{\frac{1}{q(q+q_1)}} \left(\det(B+iC)\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\{2\pi i c\theta\} \times$$
$$\times \sum_{\substack{y\in \mathbb{Z}^s \\ y\neq 0}} \exp\left\{\frac{2\pi i h c}{q}\right\} S(hA, hB+y; q) \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{\pi^2 N}{q^2}(T+iQ)\left[y - \frac{q}{2\pi N}\left(2\pi\theta NB - \beta'' + i(B+\beta')\right)\right]\right\} d\theta.$$

5 . Оценим сверху $\mathfrak{J}_2$. Докажем, что
$$\mathfrak{J}_2 \ll \|A\|^{\frac{s}{4}} d^{\frac{3}{2}} N^{\frac{s}{4} - \frac{1}{4} + \frac{s\tau}{2} + \frac{(s-1)\eta}{2} + \varepsilon}. \qquad (2.7)$$

I) Действуя, как и в работе [3] , мы получим оценку

$$J_2 \ll d^{\frac{3}{2}} \sum_{q=1}^{M} q^{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon} \sqrt{\text{н.о.д.}(\Omega, q)} \int_{-\frac{1}{qM}}^{\frac{1}{qM}} \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^s \\ y \neq 0}} \left| F_1(\theta, q, y) \right| d\theta, \quad (2.8)$$

где Ω – целое число, зависящее от коэффициентов многочлена $p(x)$

$$F_1(\theta,q,y) = (\pi N)^{\frac{s}{2}} \exp\left\{-\frac{c+\gamma}{N}\right\} q^{-s} (\det(B+iC))^{-\frac{1}{2}} \exp\{2\pi i c\theta\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{\pi^2 N}{q^2}(T+iQ)\left[y - \frac{q}{2\pi N}\left(2\pi\theta N b - \beta'' + i(b+\beta')\right)\right]\right\}. \quad (2.9)$$

Заметим, что при выводе формулы (2.8) мы воспользовались обобщенной леммой Клостермана (См. [2] , гл.II, теорема 3).

2) Покажем, что имеет место равенство

$$\left|F_1(\theta,q,y)\right| = (\pi N)^{\frac{s}{2}} \exp\left\{-\frac{c+\gamma}{N}\right\} q^{-s} \left(\left|\det(B+iC)\right|\right)^{-\frac{1}{2}} \times \quad (2.10)$$
$$\times \exp\left\{\frac{1}{4N} B^{-1}[b+\beta] - \frac{\pi^2 N}{q^2} T\,[y - h]\right\},$$

где

$$h = q\left\{\left(G' B^{-1} b - A B^{-1} \beta'\right)\theta + \frac{1}{2\pi N} G'' B^{-1}(b+\beta') - \frac{1}{2\pi N}\beta''\right\}. \quad (2.11)$$

Введем для этого обозначения

$$z = y + \frac{q}{2\pi N}\left(\beta'' - 2\pi\theta N b\right), \qquad \mu = -\frac{q}{2\pi N}(b+\beta') \quad (2.12)$$

Покажем, что

$$\operatorname{Re}(T+iQ)[z+i\mu] = T\,[z + CB^{-1}\mu] - B^{-1}[\mu]. \quad (2.13)$$

Действительно, так как по (2.5) $(T+iQ)(B+iC) = E$ – единичная матрица, то

$$T = (B + CB^{-1}C)^{-1}, \quad Q = -(C + BC^{-1}B)^{-1} = -B^{-1}CT,$$
$$\operatorname{Re}(T+iQ)[z+i\mu] = T[z] - T[\mu] + 2(z, TCB^{-1}\mu) = T[z + CB^{-1}\mu] -$$
$$- T[\mu] - T[CB^{-1}\mu] = T[z + CB^{-1}\mu] - T[\mu] - B^{-1}CTCB^{-1}[\mu].$$

Легко показать, что $T + B^{-1}CTCB^{-1} = B^{-1}$. Отсюда следует (2.13). Теперь преобразуем вектор $z + CB^{-1}\mu$, учитывая обозначения (2.5) и (2.12)

$$Z+CB^{-1}\mu = y+\frac{q}{2\pi N}(\beta''-2\pi\theta N b)+(G''-2\pi\theta N A)B^{-1}(b+\beta)\left(-\frac{q}{2\pi N}\right)=$$

$$=y+q\left\{\frac{\beta''}{2\pi N}-\frac{1}{2\pi N}G''B^{-1}(b+\beta')+\theta\left(AB^{-1}\beta'+AB^{-1}b-b\right)\right\}.$$

Замечая, что $AB^{-1}b-b=(AB^{-1}-BB^{-1})b=-G'B^{-1}b$, получаем с учетом (2.II): $z+CB^{-1}\mu=y-h$. Подставляя в (2.I3), получаем

$$\mathrm{Re}(T+iQ)[z+i\mu]=T[y-h]-\frac{q^2}{4\pi^2N^2}B^{-1}[b+\beta'].$$

Отсюда, учитывая (2.9), следует (2.I0).

3) Обозначим для краткости

$$F_2(\theta,q,y)=\left|\det(B+iC)\right|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{\pi^2N}{q^2}T[y-h]\right\}. \qquad (2.I4)$$

Тогда (2.8) можно переписать так

$$J_2\ll d^{\frac{3}{2}}N^{\frac{s}{2}}\exp\left\{-\frac{c+\gamma'}{N}+\frac{1}{4N}B^{-1}[b+\beta']\right\}\sum_{q=1}^{M}q^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon}\sqrt{\text{н.о.д.}(\Omega,q)}\,\mathcal{J}(q), \qquad (2.I5)$$

где

$$\mathcal{J}(q)=\int_{-\frac{1}{qM}}^{\frac{1}{qM}}\sum_{\substack{y\in\mathbb{Z}^s\\ y\neq 0}}F_2(\theta,q,y)\,d\theta. \qquad (2.I6)$$

Оценим $\mathcal{J}(q)$. Покажем, что

$$\mathcal{J}(q)\ll q^{-1}N^{-\frac{1}{2}+\frac{s\tau}{2}+\varepsilon}, \qquad (2.I7)$$

а в случае $q\leqslant q_0=N^{\frac{1}{2}-h}$

$$\mathcal{J}(q)\ll\|A\|^{\frac{s}{4}}q^{\frac{s}{2}-1}N^{-\frac{s}{4}-\frac{1}{2}+\frac{s\tau}{2}+\varepsilon}. \qquad (2.I8)$$

а) Покажем сначала, что

$$\sum_{\substack{y\in\mathbb{Z}^s\\ y\neq 0}}F_2(\theta,q,y)<(\det B)^{-\frac{1}{2}}s+(\det B)^{-\frac{1}{4}}(\pi N)^{-\frac{s}{2}}q^s\left(\det(B+CB^{-1}C)\right)^{\frac{1}{4}}. \qquad (2.I9)$$

Так как B и C – действительные, симметрические матрицы и $B>0$, то $T=(B+CB^{-1}C)^{-1}>0$. Отсюда

$$\sum_{\substack{y\in\mathbb{Z}^s\\ y\neq 0}}\exp\left\{-\frac{\pi^2N}{q^2}T[y-h]\right\}<\sum_{y\in\mathbb{Z}^s}\exp\left\{-\frac{\pi^2N}{q^2}T[y-h]\right\}.$$

Воспользуемся формулой (см., например, [I] , стр.93)

$$\int_{\mathbb{R}^s}\exp\{-A[x]\}\,dx=\pi^{\frac{s}{2}}(\det A)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (2.20)$$

где $A>0$. Получаем

$$\sum_{y\in\mathbb{Z}^s} exp\left\{-\frac{\pi^2 N}{q^2} T[y-b]\right\} < s + \int_{\mathbb{R}^s} exp\left\{-\frac{\pi^2 N}{q^2} T[y-b]\right\} dy =$$

$$= s+(\pi N)^{-\frac{s}{2}} q^s (\det T)^{-\frac{1}{2}}.$$ Отсюда следует, что

$$\sum_{\substack{y\in\mathbb{Z}^s\\ y\neq 0}} F_2(\theta,q,y) < \left|\det(B+iC)\right|^{-\frac{1}{2}}\left(s+(\pi N)^{-\frac{s}{2}} q^s (\det T)^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (2.21)$$

Заметим, что нетрудно показать справедливость следующих формул

$$\left.\begin{aligned} &\left|\det(B+iC)\right|^2 = \det B\cdot\det(B+CB^{-1}C), \ \left|\det(B+iC)\right| > \det B \\ &\left|\det(B+iC)\right|^2 \geqslant (\det B)^2+(\det C)^2 \end{aligned}\right\} \quad (2.22)$$

Тогда (2.19) следует из (2.21) и (2.22).

б) Покажем, что

$$\left.\begin{aligned} &(\pi N)^{-\frac{s}{2}} q^s (\det(B+CB^{-1}C))^{\frac{1}{4}} << \|A\|^{\frac{s}{4}} N^{\frac{s\tau}{2}+\frac{3}{4}\varepsilon} \\ &\det B >> \|A\|^s N^{-\varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad (2.23)$$

Отсюда, учитывая (2.16) и (2.19) будет следовать (2.17).

Воспользуемся следующими двумя неравенствами. Если B – вещественная, симметрическая, положительно определенная $s\times s$ матрица, то

$$\lambda_s^s(B) \leqslant \det B \leqslant \lambda_1^s(B), \quad \frac{1}{s}\|B\| \leqslant \lambda_1(B) \leqslant s\|B\|. \quad (2.24)$$

Можем записать, учитывая обозначения (2.5) и условия теоремы (1.7)

$$\det(B+CB^{-1}C) \leqslant (s\|B+CB^{-1}C\|)^s \leqslant (s\|B\|+s\|B^{-1}\|\cdot\|C\|^2)^s,$$

$$\|B\| << \|A\| N^{\frac{\varepsilon}{s}}, \ \|B^{-1}\| \leqslant s\lambda_1(B^{-1}) = s\lambda_s^{-1}(B) << \|A\|^{-1} N^{\frac{\varepsilon}{s}}, \quad (2.25)$$

$$\|C^2\| \leqslant (\|G''\|+2\pi|\theta|N\|A\|)^2 \leqslant 2(\|G''\|^2+4\pi^2\theta^2N^2\|A\|^2) <<$$

$$<< \|A\|^2(N^{2\tau+\frac{2\varepsilon}{s}}+4\pi^2\theta^2N^2),$$

$$\det(B+CB^{-1}C) << \|A\|^s\left\{N^{\frac{\varepsilon}{s}}+N^{2\tau+\frac{3\varepsilon}{s}}+\theta^2 N^{2+\frac{\varepsilon}{s}}\right\}^s.$$

Так как $|\theta| \leqslant \frac{1}{qM}$ и $M=[\sqrt{N}]$, то $q|\theta| << N^{-\frac{1}{2}}$. Отсюда

$$(\pi N)^{-\frac{s}{2}} q^s (\det(B+CB^{-1}C))^{\frac{1}{4}} << \|A\|^{\frac{s}{4}}(N^{\frac{\varepsilon}{s}}+N^{2\tau+\frac{3\varepsilon}{s}}+N^{\frac{\varepsilon}{s}})^{\frac{s}{4}} << \|A\|^{\frac{s}{4}} N^{\frac{s\tau}{2}+\frac{3}{4}\varepsilon}.$$

Вторая оценка в (2.23) следует из (2.24) и (1.7).

в) Пусть теперь $q \leqslant q_0 = N^{\frac{1}{2}-\eta}$. Пользуясь (I.7) и (2.25), можно показать, что $\|\eta\| << N^{\tau-2\eta+\frac{2\varepsilon}{s}-\varepsilon} + \frac{1}{2\pi}$, откуда для достаточно большого N справедливо неравенство $\|\eta\| \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда для $y \neq 0$, $|y-\eta|^2 \geqslant \left(\max\limits_{1\leqslant k \leqslant s} |y_k - \eta_k|\right)^2 \geqslant \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}\frac{\pi^2 N}{q^2} T[y-\eta] =$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi^2 N}{q^2}|y-\eta|^2 T[y-\eta]\left\{(y-\eta, y-\eta)\right\}^{-1} \geqslant \frac{\pi^2 N}{8q^2} \min_{x \in \mathbb{R}^s} \frac{T[x]}{(x,x)} .$$

Воспользуемся равенством (См., [I], стр.I07)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^s} \frac{T[x]}{(x,x)} = \lambda_s(T) .$$

Обозначим

$$L = \frac{\pi^2 N}{8 q^2} \lambda_s(T) . \qquad (2.26)$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \frac{\pi^2 N}{q^2} T[y-\eta] \geqslant L . \qquad (2.27)$$

Запишем (2.I4) в виде

$$\sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^s \\ y\neq 0}} F_2(\theta,q,y) = \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^s \\ y\neq 0}} \left|\det(B+iC)\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{\pi^2 N}{q^2} T[y-\eta]\right\} =$$
$$= \left\{L^{-\frac{s}{4}} \left|\det(B+iC)\right|^{-\frac{1}{2}}\right\} \left\{L^{\frac{s}{4}} \exp(-L)\right\} \left\{(\exp L) \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^s \\ y\neq 0}} \exp\left(-\frac{\pi^2 N}{q^2} T[y-\eta]\right)\right\} . \qquad (2.28)$$

Покажем, что

$$\left.\begin{aligned} &(\exp L) \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^s \\ y\neq 0}} \exp\left\{-\frac{\pi^2 N}{q^2} T[y-\eta]\right\} << \|A\|^{\frac{s}{2}} N^{2\varepsilon}, \quad L^{\frac{s}{4}} \exp(-L) << 1 \\ &L^{-\frac{s}{4}} \left|\det(B+iC)\right|^{-\frac{1}{2}} << \|A\|^{-\frac{s}{4}} q^{\frac{s}{2}} N^{-\frac{s}{4}+\frac{s\tau}{2}+2\varepsilon} . \end{aligned}\right\} \qquad (2.29)$$

Подставляя в (2.28) и учитывая (2.I6), получим (2.I8).

Докажем (2.29). В силу (2.27) и используя (2.20), получаем

$$(\exp L) \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^s \\ y\neq 0}} \exp\left\{-\frac{\pi^2 N}{q^2} T[y-\eta]\right\} \leqslant \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^s \\ y\neq 0}} \exp\left\{-\frac{\pi^2 N}{2q^2} T[y-\eta]\right\} <$$
$$< s + 2^{\frac{s}{2}} \pi^{-\frac{s}{2}} q^s N^{-\frac{s}{2}} (\det T)^{-\frac{1}{2}} .$$

Оценивая далее как и в пункте б) и учитывая, что $q \leqslant N^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, получаем требуемую оценку. Доказательство последней оценки в (2.29) проводим в два этапа. Рассмотрим сначала случай, когда

$$|\theta| \leqslant N^{-1+\tau+\frac{2\varepsilon}{s}},$$

$$L^{-\frac{s}{4}}\left|\det(B+iC)\right|^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi^2 N}{8q^2}\lambda_s(T)\right)^{-\frac{s}{4}}\left|\det(B+iC)\right|^{-\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant \left|\det(B+iC)\right|^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{s}{2}} N^{-\frac{s}{4}} \lambda_1^{\frac{s}{4}}\left(T^{-1}\right), \tag{2.30}$$

$$\lambda_1(T^{-1}) \leqslant s\|T^{-1}\| \leqslant s\left(\|B\| + \|B^{-1}\|\cdot\|C\|^2\right).$$

Отсюда, действуя как и в пункте б), получаем

$$\lambda_1(T^{-1}) << \|A\| N^{2\tau+\frac{5\varepsilon}{s}}$$

По (2.22) и (2.23) имеем

$$\left|\det(B+iC)\right|^{-\frac{1}{2}} < (\det B)^{-\frac{1}{2}} << \|A\|^{-\frac{s}{2}} N^{\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{2.31}$$

Подставляя в (2.30), получаем

$$\left|\det(B+iC)\right|^{-\frac{1}{2}} \lambda_1^{\frac{s}{4}}(T^{-1}) << \|A\|^{-\frac{s}{4}} N^{\frac{s\tau}{2}+2\varepsilon} \tag{2.32}$$

Пусть теперь

$$|\theta| > N^{-1+\tau+\frac{2\varepsilon}{s}}. \tag{2.33}$$

Покажем, что

$$\lambda_1(T^{-1}) << \|A\| N^{\frac{\varepsilon}{s}}\left(N^{2\tau+\frac{2\varepsilon}{s}} + 4\pi^2\theta^2N^2\right)^{\frac{s}{4}}, \tag{2.34}$$

$$\left|\det(B+iC)\right|^{-\frac{1}{2}} << \|A\|^{-\frac{s}{2}}\left(|\theta|N\right)^{-\frac{s}{2}} N^{\frac{\varepsilon}{4}}. \tag{2.35}$$

Оценка (2.34) получается как и выше. Для доказательства оценки (2.35) воспользуемся (2.22)

$$\left|\det(B+iC)\right|^{\frac{1}{2}} > \left|(\det B)^2 + (\det C)^2\right|^{\frac{1}{4}} > \left|\det C^2\right|^{\frac{1}{4}} \geqslant \lambda_s^{\frac{s}{4}}(c^2) \tag{2.36}$$

Последнее неравенство справедливо, так как $c^2 = c^T \cdot c > 0$. Далее

$$\lambda_s(C^2)=\lambda_s\left(G''^2-2\pi\theta N\left(G''A+AG''\right)+4\pi^2\theta^2N^2A^2\right).$$

Воспользуемся неравенствами (См. [1], стр.107)

$$\lambda_s(A+B)\geqslant\lambda_s(A)+\lambda_s(B),\quad \lambda_s(A)\leqslant s\,\|A\|,$$

справедливыми для любых вещественных симметрических матриц A и B. Имеем

$$\lambda_s(C^2)\geqslant\lambda_s(G''^2)-2\pi|\theta|N|\lambda_s(G''A+AG'')|+4\pi^2\theta^2N^2\lambda_s(A^2)\geqslant$$

$$\geqslant\lambda_s(G''^2)-4\pi s|\theta|N\|A\|\,\|G''\|+4\pi^2\theta^2N^2\lambda_s(A^2).$$

Из условий теоремы (I.7) и (2.33) следует

$$\|G''\|<<N^{\tau+\frac{\varepsilon}{s}}\|A\|,\quad N^{\tau+\frac{\varepsilon}{s}}<|\theta|N^{1-\frac{\varepsilon}{s}}.$$

Откуда $\|G''\|<<\|A\|\cdot|\theta|N^{1-\frac{\varepsilon}{s}}$. Учитывая, что $\lambda_s(A^2)>>\|A\|^2N^{-\frac{\varepsilon}{s}}$, получаем $\lambda_s(C^2)>>\|A\|^2(|\theta|N)^2N^{-\frac{\varepsilon}{s}}$. Подставляя в (2.36), получаем (2.35). Учитывая (2.33) - (2.35), получаем

$$|\det(B+iC)|^{-\frac{1}{2}}\lambda_1^{s/4}(T^{-1})<<$$

$$<<\|A\|^{-\frac{s}{4}}N^{\frac{\varepsilon}{2}}\left(N^{2\tau+\frac{2\varepsilon}{s}}(|\theta|N)^{-2}+4\pi^2\right)^{\frac{s}{4}}<<\|A\|^{-\frac{s}{4}}N^{\frac{\varepsilon}{2}}. \qquad (2.37)$$

Сравнивая (2.32) и (2.37) и подставляя в (2.30), получаем оценку (2.29). Оценки (2.29) доказаны, а вместе с ними доказана и оценка (2.18).

4) Перепишем (2.15) следующим образом

$$J_2<<d^{\frac{3}{2}}N^{\frac{s}{2}}\exp\left\{-\frac{c+\gamma'}{N}+\frac{1}{4N}B^{-1}\left[b+\beta'\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{\sum_{q\leqslant q_0}q^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon}\sqrt{\text{н.о.д.}(\Omega,q)}\,\gamma(q)+\sum_{q_0\leqslant q\leqslant M}q^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon}\sqrt{\text{н.о.д.}(\Omega,q)}\,\gamma(q)\right\}.$$

Воспользовавшись неравенствами $|(x,y)|\leqslant|x|\cdot|y|\leqslant s\|x\|\cdot\|y\|$ и учитывая (2.25), можно показать, что

$$B^{-1}\left[b+\beta'\right]<<N^{1-2\nu-\varepsilon},$$

откуда следует

$$\exp\left\{-\frac{c+\gamma'}{N}+\frac{1}{4N}B^{-1}\left[b+\beta'\right]\right\}<<1. \qquad (2.38)$$

Тогда для $\mathfrak{J}_2$, используя (2.I7) и (2.I8) получаем оценку

$$\mathfrak{J}_2 << d^{\frac{3}{2}} \|A\|^{\frac{s}{4}} N^{\frac{s}{4}-\frac{1}{2}+\frac{s\tau}{2}+5\varepsilon} \sum_{q\leq N^{\frac{1}{2}}} q^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\text{н.о.д}(\Omega,q)} +$$

$$+ d^{\frac{3}{2}} N^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}+\frac{s\tau}{2}+3\varepsilon} \sum_{q>q_0} q^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \sqrt{\text{н.о.д.}(\Omega,q)}.$$

Оставшиеся две суммы оцениваем как в работе [3]

$$\sum_{q\leq N^{\frac{1}{2}}} q^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\text{н.о.д.}(\Omega,q)} << N^{\frac{1}{4}+\varepsilon}, \sum_{q>q_0} q^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \sqrt{\text{н.о.д.}(\Omega,q)} << N^{-\frac{s}{4}+\frac{1}{4}+\frac{(s-1)\tau}{2}+\varepsilon},$$

откуда следует (2.7).

6 . Разобьем интеграл $\mathfrak{J}_1$ на три слагаемых

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_{11} - \mathfrak{J}_{12} - \mathfrak{J}_{13}, \tag{2.39}$$

где

$$\mathfrak{J}_{11} = (\pi N)^{\frac{s}{2}} exp\left\{-\frac{c+\gamma}{N}\right\} \sum_{q=1}^{M} q^{-s} \sum_{h (mod\, q)}' S(hp,q) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} (det(B+iC))^{-\frac{1}{2}} exp\left\{-\frac{1}{4N}(T+iQ)[2\pi\theta N b + i(b+\beta)] + 2\pi i c\theta\right\} d\theta,$$

$\mathfrak{J}_{12}$ и $\mathfrak{J}_{13}$ отличаются от $\mathfrak{J}_{11}$ и друг от друга лишь пределами интегрирования. В $\mathfrak{J}_{12}$ $\theta \in \left(\frac{1}{q(q+q_1)}, \infty\right)$, в $\mathfrak{J}_{13}$ $\theta \in \left(-\infty, -\frac{1}{q(q+q_2)}\right)$.

7 . Докажем, что

$$\mathfrak{J}_{12} << N^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\frac{(s-1)\tau}{2}+\varepsilon}, \mathfrak{J}_{13} << N^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\frac{(s-1)\tau}{2}+\varepsilon}. \tag{2.40}$$

Обе оценки доказываются аналогично, поэтому рассмотрим только $\mathfrak{J}_{12}$. Аналогично [3], § 4, п.7 мы получаем для $\mathfrak{J}_{12}$ оценку

$$\mathfrak{J}_{12} << d^{\frac{3}{2}} \sum_{q=1}^{M} q^{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon} \sqrt{\text{н.о.д.}(\Omega,q)} \int_{\frac{1}{2qM}}^{\infty} |F_3(\theta,q)|\, d\theta,$$

где

$$|F_3(\theta,q)| = |F_1(\theta,q,0)| = (\pi N)^{\frac{s}{2}} exp\left\{-\frac{c+\gamma'}{N}\right\} q^{-s} |det(B+iC)|^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{1}{4N} B^{-1}\left[b+\beta'\right] - \frac{\pi^2 N}{q^2} T\left[h\right]\right\}.$$

Воспользуемся оценкой (2.38) и тем, что $T>0$. Получаем

$$|F_3(\theta,q)| \ll q^{-s} N^{\frac{s}{2}} |\det(B+iC)|^{-\frac{1}{2}}.$$

Учитывая (2.31) и (2.35), получаем оценки

$$|F_3(\theta,q)| \ll \begin{cases} \|A\|^{-\frac{s}{2}} q^{-s} N^{\frac{s}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}, & \text{при } |\theta| \leqslant N^{-1+\tau+\frac{2\varepsilon}{s}} \\ \|A\|^{-\frac{s}{2}} q^{-s} |\theta|^{-\frac{s}{2}} N^{\frac{\varepsilon}{4}}, & \text{при } |\theta| > N^{-1+\tau+\frac{2\varepsilon}{s}}. \end{cases}$$

Используя эти оценки и действуя аналогично [3] § 4 п.7, мы получим оценки (2.40).

8 . Равенство (2.6), учитывая (2.39) и оценки (2.7) и (2.40) можно записать следующим образом

$$R(N) = \mathfrak{I}_{11} + O\left(\|A\|^{\frac{s}{4}} d^{\frac{3}{2}} N^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\frac{s\tau}{2}+\frac{(s-1)}{2}\ell+\varepsilon}\right). \qquad (2.41)$$

Имеем

$$\mathfrak{I}_{11} = \mathfrak{I}_{11}' - \mathfrak{I}_{11}'',$$

где

$$\mathfrak{I}_{11}' = (\pi N)^{\frac{s}{2}} \exp\left\{-\frac{c+\gamma}{N}\right\} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-s} \sum_{h (\mathrm{mod}\, q)}' S(hp,q) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} (\det(B+iC))^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{4N}(T+iQ)\left[2\pi\theta N b + i(b+\beta)\right] + 2\pi i c\theta\right\} d\theta.$$

$\mathfrak{I}_{11}''$ отличается от $\mathfrak{I}_{11}'$ только пределами суммирования по q. В $\mathfrak{I}_{11}''$ $q > N^{\frac{1}{2}}$. Оценивая $\mathfrak{I}_{11}''$ так же, как в предыдущем пункте мы оценили $\mathfrak{I}_{12}$, получим

$$\mathfrak{I}_{11}'' \ll d^{\frac{3}{2}} N^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\tau+\varepsilon}.$$

Тогда (2.41) можно записать так

$$R(N) = \mathfrak{I}_{11}' + O\left(\|A\|^{\frac{s}{4}} d^{\frac{3}{2}} N^{\frac{s}{4}-\frac{1}{4}+\frac{s\tau}{2}+\frac{(s-1)}{2}\ell+\varepsilon}\right) \qquad (2.42)$$

9 . Сделаем замену переменной в интеграле $\mathfrak{I}_{11}'$.

$$1 - 2\pi i \theta N = z.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\det(B+iC))^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{4N}(T+iQ)\left[2\pi\theta N b + i(b+\beta)\right] + 2\pi i c\theta\right\} d\theta =$$

$$= N^{-1} \exp\left(\frac{c}{N}\right) W(N), \tag{2.43}$$

где $W(N)$ определено формулой (I.5). Подставляя (2.43) в J'_{11}, а J'_{11} в (2.42) и учитывая (I.6), получаем асимптотическую формулу для $R(N)$ (I.8).

Теорема доказана.

§ 3. Доказательство предложения I.

Сделаем в интеграле $W(N)$ замену переменной

$$\theta = \frac{1}{2\pi i N}(1-z).$$

$$W(N) = N \cdot \exp\left(-\frac{c}{N}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left\{-\frac{1}{4N}(T+iQ)\left[2\pi\theta N b + i(b+\beta)\right] + 2\pi i c\theta\right\}}{\sqrt{\det(B+iC)}} d\theta.$$

Воспользуемся оценками, полученными в ходе доказательства теоремы I. Согласно § 2, п.5 , 2) имеем

$$\operatorname{Re}\left\{-\frac{1}{4N}(T+iQ)\left[2\pi\theta N b + i(b+\beta)\right]\right\} = \frac{1}{4N} B^{-1}\left[b+\beta'\right] - \pi^2 N T\left[\frac{h}{q}\right].$$

Учитывая оценку (2.38) и то, что $T > 0$, получаем

$$W(N) << N \int_{-\infty}^{\infty} \left|\det(B+iC)\right|^{-\frac{1}{2}} d\theta <<$$

$$<< N\left\{\int_0^{N^{-1+\tau+\frac{2\varepsilon}{s}}} \left|\det(B+iC)\right|^{-\frac{1}{2}} d\theta + \int_{N^{-1+\tau+\frac{2\varepsilon}{s}}}^{\infty} \left|\det(B+iC)\right|^{-\frac{1}{2}} d\theta\right\}.$$

Используя оценки (2.3I) и (2.35), получаем

$$W(N) << N \int_0^{N^{-1+\tau+\frac{2\varepsilon}{s}}} \|A\|^{-\frac{s}{2}} N^{\frac{\varepsilon}{2}} d\theta + N \int_{N^{-1+\tau+\frac{2\varepsilon}{s}}}^{\infty} \|A\|^{-\frac{s}{2}} (\theta N)^{-\frac{s}{2}} N^{\frac{\varepsilon}{4}} d\theta.$$

Вычисляя, получим

$$W(N) << \|A\|^{-\frac{s}{2}} N^{\tau+\varepsilon}.$$

Предложение I доказано.

§ 4. О доказательстве теоремы 2.

Мы не будем приводить доказательство теоремы 2, так как оно аналогично доказательству соответствующей теоремы работы [4] . Отметим лишь некоторые различия. Для этого нам понадобится три вспомогательных утверждения.

Введем обозначения.

$[\alpha_1,\dots,\alpha_s]$ – диагональная матрица размера $s\times s$;

S – квадратная матрица порядка s над полем $\mathbb{Q}$, унимодулярная, такая, что

$$S^T A S = \mathfrak{D} = [a_1,\dots,a_s] \;, \tag{4.I}$$

причем будем считать, что

$$\left.\begin{aligned}
& a_1>0,\dots,a_{s_1}>0,\ a_{s_1+1}<0,\dots,a_s<0;\\
& \mathfrak{D}_0=[|a_1|,\dots,|a_s|];\ \mathfrak{D}_0^{\frac12}=[\sqrt{|a_1|},\dots,\sqrt{|a_s|}];\ \mathfrak{D}_1=[a_1,\dots,a_{s_1}];\\
& \mathfrak{D}_2=[|a_{s_1+1}|,\dots,|a_s|];\ F=[\underbrace{1,\dots,1}_{s_1},\ \underbrace{-1,\dots,-1}_{s_2}];\quad \ell=S^T b\\
& b_0=(S^{-1})^T F\ell;\ A_0=(S^{-1})^T\mathfrak{D}_0 S^{-1};\ \gamma=\tfrac14\mathfrak{D}_0^{-1}[\ell];\ m=\tfrac14 A^{-1}[b]-c
\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

h – ступень матрицы S, т.е. наименьшее натуральное число, такое что матрица $T=hS^{-1}$ целочисленная; $u=Tx$ – s-мерный вектор;

$$\left.\begin{aligned}
& p_1(u)=h^{2s-2}\mathfrak{D}_1\,[u^{(1)}]+h^{2s-1}(\ell^{(1)},u^{(1)})\\
& p_2(u)=h^{2s-2}\mathfrak{D}_2\,[u^{(2)}]-h^{2s-1}(\ell^{(2)},u^{(2)})\\
& p_0(u)=h^{2s-2}\mathfrak{D}[u]+h^{2s-1}(\ell,u)+h^{2s}c\\
& \mathcal{P}_0=\{u:\ p_0(u)=0\}
\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Функция f , задаваемая формулой

$$z=f(x)=\mathfrak{D}_0^{\frac12}S^{-1}\left(x+\tfrac12 A^{-1}b\right) \tag{4.4}$$

преобразует уравнение (I.I) в уравнение (I.9) и $|f(x)|^2 = A_0[x]+(b_0,x)+\gamma$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Преобразование переменных по формулам $u=Tx$, $W=f_0(u)$, где

$$f_0(u)=h^{s-1}\mathcal{D}_0^{\frac{1}{2}}\left(u+h\mathcal{D}^{-1}\ell\right), \tag{4.5}$$

обладает следующими свойствами:

I) каждому целому вектору $x\in\mathcal{P}$ ставится в соответствие точно один целый вектор $u\in\mathcal{P}_0$ и это отображение инъективно;

2) $f_0(u)=h^s f(x)$;

3) функция f_0 приводит уравнение $p_0(u)=0$ к виду

$$|W^{(1)}|^2-|W^{(2)}|^2=h^{2s}m,$$

4) $|f_0(u)|^2=p_1(u)+p_2(u)+h^{-2s+2}\gamma$.

5) Многочлены $p_1(u), p_2(u)$ и $p_0(u)$ имеют целые рациональные коэффициенты.

Доказательство предложений 3, 4 мы опускаем, так как оно сводится к проверке сформулированных утверждений на основе обозначений (4.I) - (4.3). Укажем теперь на некоторые отличия доказательства теоремы 2 от доказательства теоремы работы [4].

I. При доказательстве теоремы 2 требуется получить оценку числа целых точек, лежащих на поверхности $\mathcal{P}$ и принадлежащих некоторому множеству (См. [4] § 6 лемма 3 и стр.95). Следующее замечание доказывает справедливость этих оценок в нашем случае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Справедливы следующие оценки

$$\sum_{\substack{p(x)=0\\ \rho(x)\leqslant X}} = O\left(X^{\frac{s}{2}-1+\varepsilon}\right) \tag{4.6}$$

$$N_\delta^{(j)}=\sum_{\substack{p(x)=0\\ \frac{1}{\sqrt{X}}f(x)\in\mathcal{F}_j}} 1 = O\left(\delta X^{\frac{s}{2}-1+\varepsilon}\right),\quad j=1,2; \tag{4.7}$$

где точное определение множеств $\mathcal{F}_j$ см. [4], стр.I00;

$$\rho(x)=|f(x)|^2;\quad \rho_0(u)=|f_0(u)|^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $|f(x)|^2$ в статье [4] обозначается через $\omega(x)$. Покажем, что доказательство оценок (4.6) и (4.7) сводится к случаю, описанному в работе [4]. Действительно, из предложения 4 следует, что

$$\sum_{\substack{p(x)=0\\ \rho(x)\leqslant X}} 1 \leqslant \sum_{\substack{p_0(u)=0\\ \rho_0(u)\leqslant h^{2s}X}} 1,$$

где многочлены ρ_0 и ϱ_0 соответствуют многочленам ρ и ω работы [4] . Поэтому оценивая последнюю сумму, как в [4] и вынося h в O , получим оценку (4.6). Аналогично доказывается оценка (4.7).

Предложение 5 доказано.

2 . Второе различие встречается при доказательстве и формулировке леммы 4 работы [4] . В формулировке леммы 4 ([4] , стр. 104) встречается комплексный интеграл, который в нашем случае имеет вид

$$V_t(X,m)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty}\frac{\exp\left\{\frac{m}{X}z-\pi^2\left(\frac{|t^{(1)}|^2}{1+z}+\frac{|t^{(2)}|^2}{1-z}\right)\right\}}{\sqrt{(1+z)^{s_1}(1-z)^{s_2}}}\,dz,$$

где вектор t обозначается в [4] через ℓ .

Доказательство леммы 4 статьи [4] в нашем случае проводится совершенно аналогично, только в соответствующем месте необходимо применить не теорему I [3] , а теорему I § 2 данной статьи.

Литература

1. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М., "Мир", 1965.
2. Малышев А.В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами. - Труды Мат. ин-та АН СССР, 1962, т.65, 212 с.
3. Малышев А.В. О взвешенном количестве целых точек, лежащих на поверхности второго порядка. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1966, т.I, с.6-83.
4. Мороз Б.З. Распределение целых точек на многомерных гиперболоидах и конусах. - Зап.научн.семинаров ЛОМИ, 1966, т.I, с.84-113.