Ю. Т. Антохин, Аналитический подход к проблеме уравнений первого рода, *Докл. АН СССР*, 1966, том 167, номер 4, 727–730

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 167, № 4

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Ю. Т. АНТОХИН

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 30 VI 1965)

В работе изучается уравнение 1-го рода

$$Ax = f, \tag{1}$$

где x, f — элементы некоторого гильбертова пространства H; A — положительный самосопряженный оператор со всюду плотной областью определения $D(A)$, для которого нуль является точкой спектра, но не является собственным значением. Доказано, что если x — решение (1) и $\| A \| \leqslant 1$, то $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (E - A)^n f$, где E — единичный оператор. Если A — неограниченный оператор и уравнение (1) разрешимо, то его решение можно найти по формуле

$$x = f + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} (A - E) \ldots (A - (n-1)E) f. \tag{2}$$

Формула (2) доказана в предположении, что $f \in D(A^n)$, $\| A^n f \| \leqslant C$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, C не зависит от n. Формула (2) равносильна методу последовательных приближений по схеме

$$x_n = \frac{1}{n} f + x_{n-1} - \frac{1}{n} A x_{n-1}, \quad n \geqslant 2, \quad x_1 = f. \tag{3}$$

Общий прием получения различных формул для решения уравнения (1) состоит в следующем. Предполагая, что $f \in D(A^n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, строим аналитическую в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ функцию $A^z x$, зная ее значения $A^n x = A^{n-1} f$ в точках $z = n$, $n \geqslant 1$. В качестве решения уравнения (1) берем $\lim\limits_{z \to +0} A^z x$. Функция $A^z x$ определяется однозначно и зависит только от f. Если для конструктивного определения $A^z x$ использовать, например, формулы работы ([3]), стр. 149, то мы получим

$$x = \lim_{z \to +0} x_z, \tag{4}$$

где $z x_z + A x_z = f$, $z > 0$. Формулы (2) — (4) получены только на основании факта существования решения. Если заранее предположить, что искомое решение «истокообразно представимо», т. е. $x = Ay$, $y \in H$, то, например, в формуле (4) можно получить оценку скорости приближения вида $\| x - x_z \| \leqslant z \| y \|$.

Представляется полезным отнесение некоторых вопросов общей теории уравнений 2-го рода к теории уравнений 1-го рода.

Например, рассмотрим уравнение

$$x - \varepsilon A x = f, \tag{5}$$

где $A = A^*$, $A > 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + i\delta$, $\delta > 0$, δ мало. Доказывается, что если $f \in D(A^n)$, $\| A^n f \| \leqslant C$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, C не зависит от n, то решение уравнения (5) находится по формуле

$$x = f + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(\varepsilon)\, \varphi_n(A) f + r_N, \tag{6}$$

где $\varphi_n(A) = A(A - iE) \ldots (A - i(n-1)E)$, $\rho_n(\varepsilon) = \varepsilon^n / (1 - i\varepsilon) \ldots \ldots (1 - in\varepsilon)$, $\| r_N \| \leqslant K(\alpha) / \alpha^3 N^\alpha$, $\alpha = \delta / (\varepsilon_0^2 + \delta^2)$, $K(\alpha)$ — некоторая постоянная, $K(0) > 0$, N произвольно.

Поведение решения уравнения (5) при $\varepsilon \to 0$ связывается с исследованием уравнения (1) с помощью формул (4), если существует A^{-1}. Рассмотрим вопрос об асимптотике решения уравнения (5) при $\varepsilon \to 0$. Пусть для некоторых $\alpha > 0$, $\beta > 0$, целого $m \geqslant 1$ и $|\varepsilon| \leqslant 1$ выполнены условия: $\delta \to 0$, $\alpha |\varepsilon_0|^{m+1} < \delta < \beta |\varepsilon_0|$. Если при этом $f \in D(A^n)$, $\| A^n f \| \leqslant C$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то для любого N и некоторого $\gamma = \gamma(\alpha, \beta, m)$ имеем

$$\left\| x - \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n A^n f \right\| \leqslant \gamma C |\varepsilon|^{N+1}. \tag{7}$$

Оценка (7) получается из тождества

$$x = \sum_{n=0}^{N} \varepsilon^n A^n f + \varepsilon^{N+1} \left\{ A^{N+1} \left(\sum_{n=0}^{m-1} \varepsilon^n A^n f \right) + \varepsilon^m (E - \varepsilon A)^{-1} A^{m+N+1} f \right\}$$

и известной оценки

$$\| \varepsilon (E - \varepsilon A)^{-1} g \| \leqslant \| g \| / \left| \operatorname{Im} \frac{1}{\varepsilon} \right|, \quad g \in H.$$

Из неравенства (7) следует, что $x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A^n f$.

Рассмотрим вопрос об асимптотике решения уравнения (5), полученного по «принципу предельного поглощения». Пусть существует элемент $x(\varepsilon_0) \in D(A)$ такой, что $x(\varepsilon_0) - x \to 0$ при $\delta \to 0$, где x удовлетворяет (5). Пусть, помимо этого, $f \in D(A^n)$, $\| A^n f \| \leqslant C$ и $\| (E - \varepsilon A)^{-1} A^n f \| \leqslant C \varepsilon_0^{-m}$, где m — некоторое целое число, $m \geqslant 0$, C не зависит от n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Тогда $x(\varepsilon_0) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_0^n A^n f$.

Метод, примененный для вывода оценки (7), использован для получения асимптотики решения уравнения $\varepsilon \Delta u - B(u) = f$, возникающего в теории дифракции волн на неограниченных поверхностях в трехмерном пространстве, где $B(u) = 2i(\nabla \mu, \nabla u) + iu \Delta \mu$, $(\nabla \mu)^2 = 1$, $\varepsilon = \varepsilon_0 - i \varepsilon_0^m$, $m \geqslant 1$, $\varepsilon_0 \to 0$.

Рассмотрим некоторые уравнения 1-го рода, возникающие в математической физике. Показано, что решение многих таких уравнений сводится к решению некорректной задачи о построении аналитической при $\operatorname{Re} z > 0$ и непрерывной при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ функции $F(z)$ по известным числам $F(n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Эта задача имеет единственное решение, если для некоторых $M > 0$, $B > 0$, $0 < \varepsilon < \pi$ выполнены условия $|F| \leqslant M \exp(B|z|)$, $|F(i|z|)| \leqslant M \exp((\pi - \varepsilon)|z|)$. (См. ([3]), стр. 144.) Доказано, что в этих предположениях для всех z из любой ограниченной области правой полуплоскости справедлива оценка $|F(z)| \leqslant K = K(M, B, \varepsilon, m)$, где $m = \max_n |F(n)|$, $K \to 0$ при $m \to 0$ и фиксированных M, B, ε. В этом смысле задача о построении $F(z)$ корректна, если заданы числа $F(n)$, M, B, ε, $n = 0, 1, \ldots$ С помощью формул из ([3]), стр. 152 доказано, что при естественных ограничениях на $F(n)$ предыдущая задача приводит к сингулярному уравнению

$$g(t) - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi)\, d\xi}{\xi - t} = H(t),$$

где

$$g(t)=\pi tF(it)/\operatorname{sh}\pi t,\quad H(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}nF(n)}{n-it}.$$

Рассмотрим некоторые уравнения 1-го рода, возникающие в теории потенциала. Рассмотрим обратную задачу логарифмического потенциала, которая сводится к определению границы L области D, если при больших $|z|$ известна функция $U(z)$ (внешний комплексный потенциал)

$$U(z)=\iint\limits_{D}\frac{d\xi\,d\eta}{z-\zeta},\tag{8}$$

где $z=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta$. Интеграл (8) при $z\in D$ называется внутренним комплексным потенциалом. Пусть граница L в полярных координатах (r,θ) дается уравнением $r=\varphi(\theta)$, $|\theta|\leqslant\pi$. Покажем, что если $\varphi(\theta)$ известна при $\pi-|\theta|\leqslant\varepsilon$, то нелинейное уравнение (8) для $\varphi(\theta)$ решается методами аналитического продолжения. Поясним сказанное. Пусть $|\theta|\leqslant\pi$, $m=\min\varphi(\theta)$, $M=\max\varphi(\theta)$. Тогда при $|z|<m$

$$U(z)=\pi\bar{z}-\sum_{n=0}^{\infty}a_{-n}z^{n}$$

и при $|z|>M$

$$U(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}z^{-n-1},$$

где $a_{-n}=f(-n-1)$ для $n=0,2,3,\ldots$; $a_{-1}=f(-2)+\pi$; $a_n=f(n)$, $n=0,1,2,\ldots$; $f(\pm n)=f(z)$ при $z=\pm n$;

$$f(z)=\frac{1}{z+2}\int\limits_{|\theta|\leqslant\pi}\varphi^{2+z}(\theta)\,e^{iz\theta}d\theta.\tag{9}$$

Так как a_n и $\varphi(\theta)$ при $\pi-|\theta|\leqslant\varepsilon$ даны, то можно построить целую функцию $F(z)=\int\limits_{|\theta|\leqslant\pi-\varepsilon}\varphi^{2+\varepsilon}(\theta)e^{iz\theta}d\theta$, определив предварительно $F(n)$, $n=1,2,\ldots$, и по $F(z)$ определить $f(z)$ и числа $a_{\pm n}$, т. е. можно построить внутренний и внешний комплексные потенциалы области D. Граница L определится затем как множество тех точек z, где оба потенциала совпадают. Аналогичным образом и в пространственном случае обратной задачи потенциала знание части границы позволяет определить остальную часть границы методами интерполяции целых функций.

Рассмотрена и решена задача о нахождении вещественной функции $\rho(\theta)$, если заданы числа

$$\int\limits_{|\theta|\leqslant\pi}\rho(\theta)\,\Phi^{n}(\theta)\,d\theta=c_n,\quad n=0,1,2,\ldots,\tag{10}$$

где $\Phi(\theta)=e^{i\theta}\varphi(\theta)$ — заданная функция; $\varphi(\theta)>0$; φ, φ', φ'' — 2π-периодические функции; $\sqrt[n]{|c_n|}<\min\varphi(\theta)$. Изучен пространственный аналог задачи (10) — задача о нахождении функции $\rho(\lambda,\theta)$ из системы уравнений

$$\int\limits_{\omega}\rho\Phi^{n+3}P_n(\cos\gamma)\,d\omega=A_n,\quad n=0,1,2,\ldots,\tag{11}$$

где ω — единичная сфера; P_n — многочлен Лежандра; $\Phi=\Phi(\lambda,\theta)$; γ — угол между точкой сферы (λ,θ) и вектором $(\Phi(\lambda',\theta'),\lambda',\theta')$; λ', θ' — переменные долгота и широта на сфере; $d\omega=\sin\theta' d\lambda' d\theta'$; $A_n=A_n(\lambda,\theta)$ —

заданные сферические функции; $\sqrt[n]{|A_n|} < \min_{\omega} \Phi(\lambda, \theta)$; $|\lambda| \leqslant \pi$; $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; Φ — заданная на ω достаточно гладкая функция.

На основе задачи (11) получены новые уравнения для решения обратной задачи ньютоновского потенциала в пространстве.

Рассмотрим одну задачу из теории разностных схем, приводящую к обратной задаче логарифмического потенциала. Пусть $u(s, n)$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, удовлетворяют разностному уравнению:

$$u(s, n+1) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_r u(s+r, n). \qquad (12)$$

Поставим задачу о нахождении чисел c_r. Пусть $c_r = c_{-r}$ и $\varphi(\theta) = c_r e^{ir\theta}$ — непрерывная функция, $\varphi(\theta) > 0$, $|\theta| \leqslant \pi$. Пусть $u^{(m)}(s, n)$ — семейство решений уравнения (12), причем $u^{(m)}(s, 0) = 0$ при $s \neq m$ и $u^{(m)}(m, 0) = 1$. Пусть даны числа $b_m = u^{(m)}(2, m)$, $m = 2, 3, \ldots$ Тогда для нахождения $\varphi(\theta)$ имеем уравнения

$$\int\limits_{|\theta| \leqslant \pi} \varphi^m(\theta) e^{i(m-2)\theta} d\theta = 2\pi \bar{b}_m, \quad m = 2, 3, \ldots \qquad (13)$$

Нетрудно видеть, что, зная $\bar{b}_m$, мы знаем внешний комплексный потенциал области $D = \{z\colon |z| \leqslant \varphi(\arg z)\}$. Формула (13) получается из равенства

$$u(s, n) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} u(m, 0) \int\limits_{|\theta| \leqslant \pi} \varphi^n(\theta) e^{i(s-m)\theta} d\theta$$

(см. ([1]), стр. 133). Дифференциальные аналоги задачи (12)—(13) изучались в работе ([2]).

Рассмотрен вопрос о корректности задачи Коши для **эллиптических по** Петровскому систем любого порядка, у которых коэффициенты при старших производных постоянны, а коэффициенты при младших производных являются целыми функциями. Исследование основано на формуле, которая, в частности, выглядит следующим образом.

Если функция $u(x, y, z)$ гармонична в ограниченной области D 3-мерного пространства и на части Γ_1 границы Γ известна $u|_{\Gamma_1} = \varphi$ и нормальная производная $u_n|_{\Gamma_1} = \psi$, то при $P = (x, y, z) \in D$

$$u = v - v^*, \qquad (14)$$

где

$$v = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|P-Q|} d\sigma_Q - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma_1} \psi \frac{1}{|P-Q|} d\sigma_Q,$$

а v^* — гармоническое продолжение v внутрь D через Γ_1. Формула (14) обобщается и на уравнения параболического типа.

Поступило
26 VI 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Вазов, Дж. Форсайт, Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, М., 1963. [2] М. М. Лаврентьев, ДАН, 160, № 1, 32 (1965). [3] М. А. Евграфов, Асимптотические оценки и целые функции, М., 1962.