В. Т. Борухов, Разрешающий многогранник диссипативного неравенства для релаксационных односвязных систем,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 2, 158–166

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 2, с. 158–166

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.938

РАЗРЕШАЮЩИЙ МНОГОГРАННИК ДИССИПАТИВНОГО НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ

© 2005 г. В. Т. Борухов

ВВЕДЕНИЕ

Диссипативные неравенства для различных классов динамических систем играют важную роль в теории автоматического управления, теории цепей, неравновесной термодинамике (см., например, [1–4]). Множество решений (далее разрешающее множество) диссипативного неравенства для линейных пассивных систем определяет так называемые функции запаса [2], имеющие тот или иной физический смысл. Например, для термодинамических систем с памятью эти функции, представляющие собой квадратичные функции Ляпунова, непосредственно связаны с термодинамическими потенциалами [3].

Для релаксационных односвязных (SISO) систем размерности n разрешающее множество Ω является полуалгебраическим и выпуклым в пространстве S_n вещественных симметрических $n \times n$-матриц. Его дифференциально-геометрическая структура изучалась в [5–7]. В настоящей работе для указанного класса релаксационных систем рассматриваются элементы комбинаторно-геометрической структуры Ω. При этом основное внимание уделяется разрешающему многограннику, который определяется как выпуклая оболочка $\operatorname{conv} P_n$ совокупности P_n особых точек максимальной кратности полуалгебраического множества Ω *). Многогранник $\operatorname{conv} P_n$ может служить хорошим приближением для множества Ω. Кроме того, заслуживает внимания тот факт, что разрешающий многогранник $\operatorname{conv} P_n$ имеет ряд свойств, подобных геометрическим свойствам корреляционного многогранника $\mathrm{CO}\, R_n^{\square}$, и, возможно, комбинаторно эквивалентен $\mathrm{CO}\, R_n^{\square}$. Геометрия многогранника $\mathrm{CO}\, R_n^{\square}$ и аффинно эквивалентного ему разрезного многогранника рассмотрена в монографии [9]. Там же отмечены применения корреляционного и разрезного многогранников в дискретной математике, анализе, математической физике и теории вероятностей. В ряде работ по комбинаторной оптимизации (см. библиографию в [9]) $\mathrm{CO}\, R_n^{\square}$ называется булевым квадратичным многогранником.

Статья организована следующим образом. В первом разделе приведены сведения о дифференциально-геометрической структуре множества Ω, указано явное описание множества P_n, основанное на точном решении [7] специального класса алгебраических уравнений Риккати (АУР). Определены два вида индексации элементов P_n, которые используются во втором и третьем разделах при описании аффинно независимых и аффинно зависимых систем точек из P_n. Это описание опирается на аффинно эквивалентное представление множества P_n в векторном пространстве $sp_{n,2}$ вещественных симметрических полиномов от двух переменных степени не больше n по каждой переменной. Следствия результатов второго раздела для разрешающего и корреляционного многогранников приведены в третьем разделе.

Часть представленных в настоящей работе результатов анонсирована в [10].

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1.1. Дифференциально-геометрическая структура множества Ω. Рассмотрим линейную управляемую и наблюдаемую релаксационную систему

$$\Sigma = (A, b, c, d): \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad y(t) = cx(t) + du(t), \quad t \geq 0,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t), y(t) \in \mathbb{R}$. Напомним, что система Σ называется релаксационной [2], если $d \geq 0$ и функция $V(t) = ce^{At}b$ удовлетворяет условиям полной монотонности: $(-1)^k V^{(k)}(t) \geq 0$

*) Другой разрешающий многогранник для релаксационных систем определен в работе [8].

$\forall t \geq 0$, $k = \overline{0, \infty}$. Поскольку передаточная функция $G(\mu) = c(\mu - A)^{-1}b$ системы Σ скалярная, то Σ относится к классу односвязных систем.

В матричной форме диссипативное неравенство для системы Σ имеет вид [2]

$$-W(Q) \geq 0, \quad W(Q) := \begin{pmatrix} A'Q + QA & Qb - c' \\ b'Q - c & -2d \end{pmatrix}.$$

Здесь $Q \in S_n$; штрих обозначает транспонирование; неравенство $-W(Q) \geq 0$ означает, что квадратичная форма $-z'W(Q)z$ $(z \in \mathbb{R}^{n+1})$ неотрицательно определена.

Без ограничения общности будем считать, что релаксационная система Σ приведена к канонической форме Фурье [5] и выполняются условия $\det A \neq 0$, $d > 0$. Тогда

$$A = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n], \quad c = b' = [b_1, \ldots, b_n],$$

где $\lambda_n < \ldots < \lambda_1 < 0$, $b_i > 0$ $\forall i = \overline{1, n}$.

Из условий Сильвестра неположительности квадратичных форм следует, что разрешающее множество $\Omega := \{Q > 0 | \ W(Q) \leq 0\}$ задается системой алгебраических неравенств, т.е. оно полуалгебраическое в пространстве S_n. Кроме того, согласно [2, 5], Ω – ограниченное замкнутое выпуклое множество полной размерности $n(n+1)/2$, т.е. аффинная оболочка $\operatorname{aff}\Omega$ совпадает с S_n. В работе [5] показано, что Ω допускает стратификацию $\Omega = (\Omega_0 \setminus \Omega_1) \cup \cup (\Omega_1 \setminus \Omega_2) \cup \ldots \cup (\Omega_n \setminus \Omega_{n+1})$ $(\Omega_{n+1} := \emptyset)$, где $\Omega_i \setminus \Omega_{i+1}$ $(i = \overline{0, n})$ – гладкие многообразия размерности $(n-i)(n+i+1)/2$, $\Omega_0 = \Omega$, $\Omega_1 = \partial\Omega$, Ω_i $(i = \overline{2, n})$ – полуалгебраические множества расположенных на $\partial\Omega$ особых точек кратности не меньше i алгебраического множества $P = \{Q | \ \det W(Q) = 0\}$. Согласно [5], множество Ω_i $(\forall i = \overline{1, n})$ имеет вид $\Omega_i = P_i \cap \partial\Omega$, где $P_i = \{Q | \ \operatorname{rank} W(Q) \leq n + 1 - i\}$. Граница $\partial\Omega$ множества Ω является частью гиперповерхности P в S_n, а само множество Ω совпадает с замыканием ограниченной компоненты области гиперболичности гиперболического полинома $\det W(Q)$.

Далее гиперповерхность P будем называть базовым многообразием системы Σ (вместо названия "диссипативное многообразие" [5]). Из работы [7] следует, что множество P_n особых точек максимальной кратности базового многообразия совпадает как с $\Omega_n = P_n \cap \partial\Omega$, так и со множеством симметрических вещественных решений АУР

$$R(Q) := A'Q + QA + (2d)^{-1}(Qb - c')(b'Q - c) = 0 \tag{1.1}$$

и имеет мощность, равную 2^n.

Таким образом, разрешающий многогранник $\operatorname{conv} P_n$ представляет собой выпуклую оболочку в S_n решений АУР (1.1), при этом $\operatorname{conv} P_n \subsetneq \Omega$, $P_n \subsetneq \partial\Omega$.

1.2. Явное описание множества P_n. Далее в зависимости от контекста символ $\hat{x}$ означает множество $\hat{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ или n-набор $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ с попарно неравными элементами: $x_i \neq x_j$ $\forall ij \in E_n$, где E_n – множество пар целых чисел ij, $1 \leq i < j \leq n$. В частности, $\hat{n} := \{1, \ldots, n\}$ (либо $\hat{n} = (1, \ldots, n)$), $n = |\hat{x}| := \operatorname{card}\hat{x}$ – мощность множества $\hat{x}$. В объединении $\hat{n} \cup E_n$ множество $\hat{n}$ отождествляется со множеством пар $\hat{n} := \{11, \ldots, nn\}$. В этом случае компоненты вектора $p \in \mathbb{R}^{\hat{n} \cup E_n} \sim \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ удобно индексировать парами $ij \in \hat{n} \cup E_n$ (см., например, [9]).

Согласно [6, 7], множество P_n вещественных симметрических решений АУР (1.1) параметризуется допустимыми наборами нулей рациональной функции

$$\Theta(\mu) := G(\mu) + G(-\mu) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2 \lambda_i}{\mu^2 - \lambda_i^2} + d.$$

При этом набор $\hat{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ нулей функции $\Theta(\mu)$ называется допустимым, если $|\mu_i| < |\mu_j|$ $\forall ij \in E_n$. Следует напомнить, что множество нулей функции $\Theta(\mu)$ состоит из $2n$ различных вещественных чисел $\pm\mu_i$, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяющих неравенствам $\lambda_{i+1} < -|\mu_i| < \lambda_i$ $\forall i \in \hat{n}$ $(\lambda_{n+1} := -\infty)$. Поэтому множество M допустимых наборов имеет вид

$$M = \{(|\mu_1|, \ldots, |\mu_n|), (-|\mu_1|, |\mu_2|, \ldots, |\mu_n|), \ldots, (-|\mu_1|, \ldots, -|\mu_n|)\}, \quad |M| = 2^n.$$

Представим числитель рациональной дрсби $\Theta(\mu)$ в виде произведения $dp_{\hat\mu}(\mu)p_{\hat\mu}(-\mu)$ так, чтобы допустимый набор $\hat\mu$ совпадал со множеством нулей полинома $p_{\hat\mu}(\mu)$, т.е. $p_{\hat\mu}(\mu) = \prod_{i\in\hat n}(\mu-\mu_i)$. Функция $p_{\hat\mu}(\mu)$ совпадает с аналогичной функцией из [7] с точностью до множителя $(-1)^n$. Отметим [7], что полином

$$g(\mu) := p_{\hat\mu}(\mu)p_{\hat\mu}(-\mu) \quad \forall\hat\mu\in M \tag{1.2}$$

является одновременно характеристическим полиномом гамильтоновой матрицы

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -A+(2d)^{-1}bc & -(2d)^{-1}bb' \\ (2d)^{-1}c'c & A'-(2d)^{-1}c'b \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\varphi(\lambda) = \det(A-\lambda)$ характеристический полином матрицы A и положим $\varphi_i(\lambda) := (\lambda_i-\lambda)^{-1}\varphi(\lambda)$. В работе [7] показано, что произвольное решение $Q(\hat\mu) = \|q_{ij}(\hat\mu)\|_{i,j=\overline{1,n}}$ АУР (1.1) можно записать в явной форме с помощью полиномов $p_{\hat\mu}(\mu)$, $\varphi_i(\mu)$, а именно

$$q_{ij}(\hat\mu) = m_{ij}\frac{\varphi_i(-\lambda_j)p_{\hat\mu}(-\lambda_i)}{\varphi_i(\lambda_i)p_{\hat\mu}(\lambda_j)}, \quad m_{ij} = b_jb_i^{-1} \quad \forall\mu \hat\in M. \tag{1.3}$$

Умножая числитель и знаменатель дроби (1.3) на $p_{\hat\mu}(-\lambda_j)$ и учитывая (1.2), получаем

Утверждение 1.1. *Множество P_n допускает следующее представление $P_n = \{Q(\hat\mu) = \|q_{ij}(\hat\mu)\|_{i,j=\overline{1,n}} |\ \hat\mu\in M\}$, где*

$$q_{ij}(\hat\mu) = [m_{ij}\varphi_i(-\lambda_j)/(\varphi_i(\lambda_i)g(\lambda_j))]p_{\hat\mu}(-\lambda_i)p_{\hat\mu}(-\lambda_j). \tag{1.4}$$

Замечание 1.1. Явные представления симметрических вещественных решений АУР (1.1) рассматривались в [6, 7], где применялось известное соответствие между множеством решений АУР и классом подходящих инвариантных подпространств матрицы $\mathcal{H}$. В частности, в [6] приведено представление решений АУР (1.1) в терминах эллиптических координат Якоби для системы Σ.

При $d\to 0$ из (1.3) следует явное представление [6] множества вещественных симметрических решений рангового неравенства

$$\operatorname{rank} W(Q) \le 1 \tag{1.5}$$

для случая $d=0$. В случае $d>0$ неравенство (1.5) эквивалентно АУР (1.1). Из проведенных в работе [11] вычислений максимальной восстанавливаемой работы деформации вязкоупругого твердого тела следует один из вариантов явного представления экстремального решения $Q^-\in P_n$ для неравенства (1.5). При этом в работе [11] использован метод интегральных уравнений Винера–Хопфа. Развитие подхода [11] в полной мере осуществлено в [4].

1.3. Индексация множеств M, P_n. Выберем какой-либо элемент $\hat\mu = (\mu_1,\dots,\mu_n)\in M$ и назовем его отмеченным набором нулей полинома (1.2). Отталкиваясь от отмеченного набора $\hat\mu$, можно тем или иным способом занумеровать элементы множества M. Нам понадобится линейный порядок на M, который определим с помощью следующего рекуррентного описания M.

Положим $M_1(\hat\mu) = \{\hat\mu_{11},\hat\mu_{12}\}$, где $\hat\mu_{11} = \mu_1$, $\hat\mu_{12} = -\mu_1$,

$$M_2(\hat\mu) = \{(\hat\mu_{11},\mu_2),(\hat\mu_{12},\mu_2),(\hat\mu_{11},-\mu_2),(\hat\mu_{12},-\mu_2)\} =: \{\hat\mu_{21},\hat\mu_{22},\hat\mu_{23},\hat\mu_{24}\}.$$

Далее по индукции. Пусть $M_{i-1}(\hat\mu) = \{\hat\mu_{i-11},\dots,\hat\mu_{i-12^{i-1}}\}$, тогда

$$M_i(\hat\mu) = \{(\hat\mu_{i-11},\mu_i),\dots,(\hat\mu_{i-12^{i-1}},\mu_i),(\hat\mu_{i-11},-\mu_i),\dots,(\hat\mu_{i-12^{i-1}},-\mu_i)\} =: \{\hat\mu_{i1},\dots,\hat\mu_{i2^i}\}. \tag{1.6}$$

Таким образом, имеем $M_n(\hat\mu) = \{\hat\mu_{n1},\dots,\hat\mu_{n2^n}\} =: \{\hat\mu_i|\ i=\overline{1,2^n}\}$, где $\hat\mu_i = \hat\mu_{ni}(\hat\mu) = ((-1)^{\tau_{i1}}\mu_1,\dots,(-1)^{\tau_{ij}}\mu_j,\dots,(-1)^{\tau_{in}}\mu_n)$, $\tau_{ij} = [(i-1)/2^{j-1}]$ $\forall i\in\hat{2^n}$ ($[a]$ – целая часть числа a), в частности, $\hat\mu_1 = \hat\mu$, $\hat\mu_{2^n} = -\hat\mu$. Указанная нумерация элементов M естественным образом переносится на P_n, $P_n(\hat{\mu}) = \{Q_i := Q_{ni} = Q(\hat{\mu}_i) | \ i = \overline{1, 2^n}\}$, и в общем случае на любое биективно связанное с M множество.

Следующая важная для наших целей индексация множества M основана на сравнении знаков компонент отмеченного набора $\hat{\mu}$ и неотмеченных наборов, а именно: пусть $S \subseteq \hat{n}$ – подмножество $\hat{n}$. Положим $\hat{\mu}_S = \hat{\mu}_S(\hat{\mu}) = (\mu_{S1}, \ldots, \mu_{Sn})$, где $\mu_{Si} = -\mu_i$ при $i \in S$ и $\mu_{Si} = \mu_i$ при $i \in \bar{S} := \hat{n} \setminus S$ (в частности, $\hat{\mu}_\emptyset = \hat{\mu}$, $\hat{\mu}_{\hat{n}} = -\hat{\mu}$), тогда $M = M(\hat{\mu}) = \{\hat{\mu}_S | \ S \subseteq \hat{n}\}$, $P_n = P_{\hat{n}}(\hat{\mu}) := \{Q(\hat{\mu}_S) | \ S \subseteq \hat{n}\}$. Для удобства дальнейших ссылок данную индексацию назовем sign-индексацией множества M (множества P_n и других биективно связанных с M множеств).

2. ПРОСТРАНСТВО СИММЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ И АФФИННО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Рассмотрим векторное над полем $\mathbb{R}$ пространство $sp_n := sp_{n,2}$ симметрических вещественных полиномов $f = f(v, w)$ от двух переменных степени не большее n по каждой из переменных. Поскольку sp_n имеет базис, состоящий из мономиальных симметрических полиномов $\{(vw)^{i-1}(v+w)^{j-i} | \ ij \in n \hat{+} 1 \cup E_{n+1}\}$, то $\dim sp_n = (n+1)(n+2)/2$.

Далее понадобится утверждение, касающееся свойства единственности полинома из sp_{n-1} с предписанными значениями на дискретном множестве $\Delta(\hat{x}) = \{(x_i, x_j) | \ ij \in \hat{n} \cup E_n\}$. Напомним, что $\hat{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_i \neq x_j \ \ \forall ij \in E_n$.

Лемма 2.1. *Если полином $f \in sp_{n-1}$ и обращается в нуль на $\Delta(\hat{x})$, то $f \equiv 0$.*

Доказательство. Пусть полином $f|_{\Delta(\hat{x})} = 0$, тогда в силу симметричности он обращается в нуль на дискретном квадрате $\{(x_i, x_j) | \ i, j = \overline{1, n}\}$. Поэтому каждый из полиномов от одной переменной $f(x_i, w)$, $i = \overline{1, n}$, имеет n различных нулей x_j, $j = \overline{1, n}$. Так как степень полинома $f(x_i, w)$ меньше n, то $f(x_i, w) \equiv 0$. Последнее тождество означает, что $f(v, w)$ как полином от v при любом фиксированном w имеет n корней x_i, $i = \overline{1, n}$. Следовательно, по основной теореме алгебры $f(v, w) \equiv 0$. Лемма доказана.

Мы воспользуемся леммой 2.1 при доказательстве аффинной эквивалентности множеств

$$G_n = \{g_{\hat{\mu}} = p_{\hat{\mu}}(v) p_{\hat{\mu}}(w) | \ \hat{\mu} \in M\} \subset sp_n, \quad R_n(\hat{x}) = \{Z_{\hat{\mu}}(\hat{x}) = \|g_{\hat{\mu}}(x_i, x_j)\|_{i,j=\overline{1,n}} | \ \hat{\mu} \in M\} \subset S_n.$$

При этом под линейной и аффинной эквивалентностью конечных множеств понимаем следующее.

Пусть заданы векторные над полем $\mathbb{R}$ пространства X_1, X_2 и множества

$$K_1 = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_l\} \subset X_1, \quad K_2 = \{\beta_0, \ldots, \beta_l\} \subset X_2,$$

$\{K_i\}_{\mathbb{R}}$ – линейная оболочка множества K_i.

Определение 2.1. Множества K_1, K_2 линейно эквивалентны, если соответствие $\alpha_i \to \beta_i$ $\forall i \in \overline{0, l}$ можно продолжить до линейного изоморфизма пространств $\{K_1\}_{\mathbb{R}}$, $\{K_2\}_{\mathbb{R}}$. Множества K_1, K_2 аффинно эквивалентны, если линейно эквивалентны множества $K_1^a = \{\alpha_i - \alpha_0 | \ i \in \hat{l}\}$, $K_2^a = \{\beta_i - \beta_0 | \ i \in \hat{l}\}$.

Отметим, что из аффинной эквивалентности K_1, K_2 следует аффинная эквивалентность многогранников $\operatorname{conv} K_1$, $\operatorname{conv} K_2$.

Утверждение 2.1. *1) Множества K_1, K_2 линейно эквивалентны тогда и только тогда, когда из совокупности всех возможных равенств вида*

$$c_0 \alpha_0 + \ldots + c_l \alpha_l = 0 \quad (c_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = \overline{0, l}) \tag{2.1}$$

следуют равенства вида

$$c_0 \beta_0 + \ldots + c_l \beta_l = 0 \tag{2.2}$$

и, наоборот, из (2.2) следует (2.1);

2) множества K_1, K_2 аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда рассматриваемая при дополнительном условии $c_0+\ldots+c_l=0$ совокупность равенств (2.1) равносильна совокупности (2.2).

Доказательство. Пусть множества K_1, K_2 линейно эквивалентны и R – соответствующий линейный изоморфизм. Тогда в силу линейности и обратимости R равенства (2.1), (2.2) выполняются одновременно. Обратно, пусть (2.1) эквивалентно (2.2) для любых допустимых значений c_i, $i=\overline{0,l}$. Тогда если $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_m}$ – базис пространства $\{K_1\}_{\mathbb{R}}$, то $\beta_{i_1},\ldots,\beta_{i_m}$ – базис пространства $\{K_2\}_{\mathbb{R}}$ и соответствие $\alpha_{i_1}\to\beta_{i_1},\ldots,\alpha_{i_m}\to\beta_{i_m}$ продолжается до линейного изоморфизма пространств $\{K_1\}_{\mathbb{R}}$, $\{K_2\}_{\mathbb{R}}$, поскольку для любого α_i из равенства $\alpha_i-(c_{ii_1}\alpha_{i_1}+\ldots+c_{ii_m}\alpha_{i_m})=0$ следует, что $0=\beta_i-(c_{ii_1}\beta_{i_1}+\ldots+c_{ii_m}\beta_{i_m})=\beta_i-R\alpha_i$. Тем самым установлена первая часть утверждения 2.1. Поскольку его вторая часть – следствие первой, то утверждение доказано.

Теорема 2.1. *Пусть набор $\hat{x}=\{x_1,\ldots,x_n\}$ точек $\mathbb{R}$ удовлетворяет условию $x_i^2\neq x_j^2$ $\forall ij\in E_n$, тогда множества G_n, $R_n(\hat{x})$ аффинно эквивалентны.*

Доказательство. Воспользуемся утверждением 2.1 и рассмотрим равенства

$$F(v,w):=\sum_{\hat{\mu}\in M}c_{\hat{\mu}}g_{\hat{\mu}}=0,\qquad \sum_{\hat{\mu}\in M}c_{\hat{\mu}}Z_{\hat{\mu}}(\hat{x})=0 \tag{2.3}$$

при условии $\sum_{\hat{\mu}\in M}c_{\hat{\mu}}=0$. Полагая в первом равенстве (2.3) $v=x_i$, $w=x_j$ $\forall ij\in\hat{n}\cup E_n$, получаем второе равенство (2.3). Покажем теперь, что из второго равенства (2.3) следует первое. Для этого заметим, что $F(v,-v)=g(v)\sum_{\hat{\mu}\in M}c_{\hat{\mu}}=0$, так как $g_{\hat{\mu}}(v,-v)=p_{\hat{\mu}}(v)p_{\hat{\mu}}(-v)=g(v)$ согласно (1.2). Следовательно, многочлен $F(v,w)$ делится на моном $v+w$, т.е. $F(v,w)=$ $=(v+w)H(v,w)$, где $H\in sp_{n-1}$. Поскольку $x_i+x_j\neq 0$, то из второго равенства в (2.3) следует, что $H(x_i,x_j)=0$ $\forall ij\in\hat{n}\cup E_n$. Отсюда в силу леммы 2.1 имеем $H(v,w)\equiv 0$, т.е. $F(v,w)\equiv 0$. Теорема доказана.

В следующей теореме указаны классы линейно независимых (а следовательно, и аффинно независимых) точек из G_n. Пусть $\hat{\mu}\in M$ – отмеченный набор нулей полинома $g(\mu)$. Воспользуемся sign-индексацией множества G_n, тогда $g_S:=g_{\hat{\mu}_S}$ и $G_n=G_{n,\hat{\mu}}:=\{g_S|\ \ S\subseteq\hat{n}\}$. Рассмотрим множество $G_{n,\hat{\mu}}^{(2)}:=\{g_S|\ \ S\subseteq\hat{n},|S|\le 2\}$. Отметим, что $|G_{n,\hat{\mu}}^{(2)}|=1+n(n+1)/2$.

Теорема 2.2. *Для любого набора $\hat{\mu}\in M$ точки множества $G_{n,\hat{\mu}}^{(2)}$ образуют линейно независимую систему.*

Доказательство. Рассмотрим нетривиальную линейную комбинацию

$$F(v,w,c)=\sum_{|S|\le 2}c_Sg_S(v,w)\quad\left(\sum_{|S|\le 2}c_S^2\neq 0\right) \tag{2.4}$$

и предположим, что $F(v,w,c)=0$ $\forall v,w\in\mathbb{R}$. Пусть $S=\{i,j\}$. Тогда, как нетрудно заметить, $g_S(\mu_i,\mu_j)\neq 0$, $g_T(\mu_i,\mu_j)=0$ $\forall T\neq S$, $|T|\le 2$. Отсюда и из предположения $F(v,w,c)=0$ получаем, что $c_S=0$ при $|S|=2$. Полагая теперь в (2.4) $v=w=\mu_i$ и учитывая равенства $c_S=0$ для $|S|=2$, получаем $c_S=0$ при $|S|=1$. Следовательно, $F(v,w,c)=c_\emptyset g_\emptyset(v,w)=0$, т.е. $c_\emptyset=0$. Окончательно имеем $c_S=0$ при $|S|\le 2$. Получили противоречие с предположением о линейной зависимости точек $G_{n,\hat{\mu}}$. Теорема доказана.

Отметим следствия теорем 2.1, 2.2, характеризующие пространство $\{G_n\}_{\mathbb{R}}$ как подпространство в sp_n.

Следствие 2.1. *Подпространство $\{G_n\}_{\mathbb{R}}$ раскладывается в прямую сумму $\{G_n\}_{\mathbb{R}}=$ $=\{g_{\hat{\mu}}\}_{\mathbb{R}}\oplus(v+w)sp_{n-1}$ $\forall\hat{\mu}\in M$.*

Простое доказательство следствия 2.1 опирается на

Замечание 2.1. Поскольку $g_S(v,-v)-g_\emptyset(v,-v)=g(v)-g(v)=0$, то для любого $S\subseteq\hat{n}$ полином $f_S:=g_S-g_\emptyset$ допускает факторизацию $f_S(v,w)=(v+w)h_S(v,w)$, где $h_S(v,w):=$ $:=h_{\hat{\mu}_S}(v,w)\in sp_{n-1}$.

Следствие 2.2. *Справедливо равенство* $\dim\{G_n\}_{\mathbb{R}}=1+n(n+1)/2$.

Воспользовавшись замечанием 2.1, нетрудно доказать также справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.2. *Множества*

$$G_n \subset sp_n, \quad \{h_S|\ S \subseteq \hat{n}\} \subset sp_{n-1}, \quad H_{n\hat{\mu}}(\hat{x}) := \{\|h_S(x_i, x_j)\|_{i,j=\overline{1,n}}|\ S \subseteq \hat{n}\} \subset S_n$$

аффинно эквивалентны.

Еще один важный класс линейно независимых точек в G_n представлен в следующей теореме.

Теорема 2.3. *Точки произвольного подмножества* G_n *мощности, не большей семи, образуют линейно независимую систему.*

Доказательство. Для $n \leq 3$ утверждение теоремы следует из теоремы 2.2. Например, при $n = 3$ множество $G^{(2)}_{3,\hat{\mu}}$ состоит из семи линейно независимых точек и любое подмножество G_3 мощности семь совпадает с $G^{(2)}_{3,\hat{\mu}}$ для подходящего отмеченного набора $\hat{\mu}$.

Далее применим индукцию по n. Предположим, что теорема справедлива при $n = k - 1$. Положим $n = k \geq 4$ и рассмотрим линейную комбинацию

$$F_k := \sum_{i=1}^{7} c_{l_i} g_{kl_i} \quad \left(\sum_{i=1}^{7} c^2_{l_i} \neq 0\right)$$

произвольных семи точек $g_{kl_i} \in G_k$, упорядоченных в соответствии с указанным в разд. 1.3 линейным порядком на M_k. Таким образом, $l_1 < l_2 < \ldots < l_7$ и

$$F_k = (v - \mu_k)(w - \mu_k) \sum_{l_i \in S} c_{l_i} g_{k-1l_i} + (v + \mu_k)(w + \mu_k) \sum_{l_i \in T} c_{l_i} g_{k-1l_i}, \tag{2.5}$$

где $S \subseteq \{1, \ldots, 2^{k-1}\}$, $T \subseteq \{2^{k-1} + 1, \ldots, 2^k\}$, $|S| + |T| = 7$ и либо $|S| \leq 3$, $|T| \geq 4$, либо $|S| \geq 4$, $|T| \leq 3$. Пусть для определенности $|S| \leq 3$, $|T| \geq 4$. Предположим, что указанные точки образуют линейно зависимую систему, т.е. $F_k = 0$. Если $|S| = 3$, то, последовательно полагая $j = k - 1, k - 2, \ldots$, найдем индекс $j \leq k - 1$, для которого выполняется по крайней мере одно из следующих шести условий:

$$1)_\pm \quad g_{k-1l_1}(\pm\mu_j, -\mu_k) \neq 0, \quad g_{k-1l_2}(\pm\mu_j, -\mu_k) = g_{k-1l_3}(\pm\mu_j, -\mu_k) = 0;$$

$$2)_\pm \quad g_{k-1l_2}(\pm\mu_j, -\mu_k) \neq 0, \quad g_{k-1l_1}(\pm\mu_j, -\mu_k) = g_{k-1l_3}(\pm\mu_j, -\mu_k) = 0;$$

$$3)_\pm \quad g_{k-1l_3}(\pm\mu_j, -\mu_k) \neq 0, \quad g_{k-1l_2}(\pm\mu_j, -\mu_k) = g_{k-1l_1}(\pm\mu_j, -\mu_k) = 0.$$

В противном случае должны выполняться равенства $\hat{\mu}_{k-1l_1} = \hat{\mu}_{k-1l_2} = \hat{\mu}_{k-1l_3}$, несовместимые с линейным порядком (1.6) на M_{k-1}.

Пусть, например, выполняется условие $1)_+$. Полагая в (2.5) $v = \mu_j$, $w = -\mu_k$, получаем $F_k(\mu_j, -\mu_k) = -2\mu_k(\mu_j - \mu_k) g_{k-1l_1}(\mu_j, -\mu_k) c_{l_1} = 0$, поэтому $c_{l_1} = 0$. Учитывая равенство $c_{l_1} = 0$, точно так же получаем $c_{l_2} = 0$ и $c_{l_3} = 0$. Следовательно, $F_k = (v+\mu_k)(w+\mu_k)F_{k-1} = 0$, т.е. $F_{k-1} = 0$, что противоречит предположению индукции. Таким образом, линейная независимость семи точек установлена в случае $|S| = 3$. Случай $|S| < 3$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Следствие 2.3. *Произвольные семь точек множества* G_n $(n \geq 3)$ *аффинно независимы.*

Результат следствия 2.3 является наилучшим из возможных, так как при $n \geq 4$ в G_n присутствуют наборы из восьми аффинно зависимых точек. Действительно, пусть $k \in \{3, 4, \ldots \ldots, n - 1\}$, $n \geq 4$. Рассмотрим тройку $\gamma(n, k) = (\hat{\mu}, T, S_0)$, где $\hat{\mu}$ – какой-либо отмеченный набор из M, T и S_0 – подмножества $\hat{n}$, причем $|T| = k$, $S_0 \subseteq T$, $|S_0| \geq 3$. Положим

$$g_\gamma = \prod_{i \in \hat{n} \setminus T} (v - \mu_i)(w - \mu_k), \quad g_{\gamma S} = \prod_{i \in S \subseteq T} (v - \mu_i)(w - \mu_i) \prod_{i \in T \setminus S} (v + \mu_i)(w + \mu_i) \quad \forall i \in S \subseteq T$$

и определим множество $G_{\gamma(n,k)} \subseteq G_n$ формулой

$$G_{\gamma(n,k)} = \{g_\gamma g_{\gamma S} |\ S \subseteq T,\ |S| \leq 2\} \cup \{g_\gamma g_{\gamma S_0}\}. \tag{2.6}$$

Поскольку $\{G_{\gamma(n,k)}\}_{\mathbb{R}} = g_\gamma\{g_{\gamma S}, g_{\gamma S_0} |\ S \subseteq T,\ |S| \leq 2\}_{\mathbb{R}}$, то, применяя следствие 2.2, получаем равенства $\dim\{G_\gamma\}_{\mathbb{R}} = 1 + k(k+1)/2$, $\dim \operatorname{aff}\{G_\gamma\} = k(k+1)/2$. Кроме того, ясно, что $|G_\gamma| = 2 + k(k+1)/2$. Следовательно, имеет место

Утверждение 2.3. *Точки множества $G_{\gamma(n,k)} \subseteq G_n$ мощности $2 + k(k+1)/2$ аффинно зависимы, причем $\dim \operatorname{aff} G_{\gamma(n,k)} = k(k+1)/2$. В частности, перебирая тройки $\gamma(n,k)$ при $n = 4$, $k = 3$, можно получить все наборы из восьми аффинно зависимых точек.*

3. СЛЕДСТВИЯ ДЛЯ РАЗРЕШАЮЩЕГО И КОРРЕЛЯЦИОННОГО МНОГОГРАННИКОВ

3.1. Разрешающий многогранник. Применение результатов разд. 2 для многогранника $\operatorname{conv} P_n$ опирается на следующее

Утверждение 3.1. *Многогранники $\operatorname{conv} P_n$, $\operatorname{conv} G_n$, $\operatorname{conv} R_n(\hat{x})$ $(\hat{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_i^2 \neq x_j^2$ $\forall ij \in E_n)$ аффинно эквивалентны.*

Доказательство. Поскольку аффинная эквивалентность многогранников $\operatorname{conv} G_n$, $\operatorname{conv} R_n(\hat{x})$ фактически уже установлена (см. теорему 2.1), то в доказательстве нуждается только утверждение о том, что аффинно эквивалентны многогранники $\operatorname{conv} P_n$, $\operatorname{conv} R_n(\hat{x})$. В свою очередь это утверждение будет доказано, если мы убедимся в линейной эквивалентности множеств P_n, $R_n(-\hat{\lambda})$, где $\hat{\lambda} = \sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_1 > \ldots > \lambda_n$, – множество собственных значений матрицы A. Иначе говоря, утверждение 3.1 вытекает из теоремы 2.1 и следующей леммы.

Лемма 3.1. *Множества P_n, $R_n(-\hat{\lambda})$ линейно эквивалентны.*

Доказательство. Определим матрицу

$$F = \|f_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} = \left\| \frac{g(\lambda_j)\varphi_i(\lambda_i)}{m_{ij}\varphi_i(-\lambda_j)} \right\|_{i,j=\overline{1,n}}$$

и рассмотрим адамарово произведение $F \odot Q(\hat{\mu}) := \|f_{ij} q_{ij}(\hat{\mu})\|_{i,j=\overline{1,n}}$. Из (1.4) следует, что

$$F \odot Q(\hat{\mu}) = \|p_{\hat{\mu}}(-\lambda_i) p_{\hat{\mu}}(-\lambda_j)\|_{i,j=\overline{1,n}} = Z_{\hat{\mu}}(-\hat{\lambda}) \quad \forall \hat{\mu} \in M. \tag{3.1}$$

На основании (3.1) заключаем, что невырожденное линейное отображение $\hat{F} : S_n \to S_n$, $\hat{F}Q = F \odot Q$ устанавливает линейную эквивалентность множеств P_n, $R_n(-\hat{\lambda})$. Лемма 3.1 и утверждение 3.1 доказаны.

Отметим следствие утверждения 3.1, касающееся многогранников $\operatorname{conv} R_n(\hat{x})$, $\operatorname{conv} G_n$. Поскольку, согласно [7], P_n – множество вершин многогранника $\operatorname{conv} P_n$, то на основании утверждения 3.1 имеем

Следствие 3.1. *G_n – множество вершин многогранника $\operatorname{conv} G_n$, а $R_n(\hat{x})$ – множество вершин многогранника $\operatorname{conv} R_n(\hat{x})$ $(x_i^2 \neq x_j^2$ $\forall ij \in E_n)$.*

Напомним, что выпуклая оболочка аффинно независимых точек называется симплексом. Многогранник симплициальный, если все его собственные грани – симплексы. Многогранник в n-мерном пространстве является многогранником общего положения, если каждое его $(n+1)$-подмножество вершин состоит из аффинно независимых точек [12, с. 23].

Из теорем 2.1–2.3 и утверждения 3.1 вытекает

Утверждение 3.2. *1) Многогранник $\operatorname{conv} P_n$ телесный, т.е. $\operatorname{intconv} P_n \neq \emptyset$. При $n = 1$ $\operatorname{conv} P_1 = \Omega$ – отрезок, при $n = 2$ $\operatorname{conv} P_2$ является симплексом (тетраэдром), при $n = 3$ $\operatorname{conv} P_3$ – многогранник общего положения и поэтому симплициальный;*

2) произвольные семь вершин многогранника $\operatorname{conv} P_n$ $(n \geq 3)$ аффинно независимы;

3) для $n \geq 3$ каждая грань размерности $l \leq 5$ многогранника $\operatorname{conv} P_n$ является симплексом;

4) для любого набора $\hat{\mu} \in M$ вершины $\{Q_{\hat{\mu},S} | \ S \subseteq \hat{n}, \ |S| \leq 2\}$ аффинно независимы;

5) при $n \geq 4$ вершины многогранника $\operatorname{conv} P_n$ уже не находятся в общем положении, а именно вершины $\{Q(\hat{\mu}_i) | \ i, j = \overline{1,8}\}$ для наборов $\hat{\mu}_i$, $i = \overline{1,8}$, удовлетворяющих условиям $\mu_i \in \hat{\mu}_k$ $\forall i \in \hat{n} \setminus S$, $k = \overline{1,8}$ $(S \subseteq \hat{n}, \ |S| = 3)$, аффинно зависимы;

6) обозначим через $P_{\gamma(n,k)}$ множество вершин многогранника $\operatorname{conv} P_n$, аффинно эквивалентное множеству $G_{\gamma(n,k)}$. Тогда $|P_{\gamma(n,k)}| = 2 + k(k+1)/2$, $\dim \operatorname{aff} P_{\gamma(n,k)} = k(k+1)/2$.

Замечание 3.1. Множество стационарных точек матричного дифференциального уравнения Риккати $\dot{Q}(t) = R(Q)$, где оператор $R : S_n \to S_n$ задается соотношением (1.1), совпадает со множеством P_n. Поэтому результаты утверждения 3.2 могут быть полезными для качественной теории указанного дифференциального уравнения.

3.2. Корреляционный многогранник. Рассмотрим некоторые связи между геометрическими характеристиками разрешающего многогранника $\operatorname{conv} P_n$ и корреляционного многогранника $\mathrm{CO}\, R_n^{\square}$.

Напомним [9, гл. 5], что корреляционный вектор $\pi(S) \in \mathbb{R}^{\hat{n} \cup E_n}$ задается формулой $\pi(S) = (\pi(S)_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$, где $S \subseteq \hat{n}$, $\pi(S)_{ij} = 1$ для $i, j \in S$ и $\pi(S) = 0$ в противном случае. Корреляционным многогранником $\mathrm{CO}\, R_n^{\square}$ называется выпуклая оболочка множества $\{\pi(S) |$ $S \subseteq \hat{n}\}$. Это множество является множеством вершин $\mathrm{CO}\, R_n^{\square}$ [9, гл. 1].

Для описания соответствия между $\operatorname{conv} P_n$ и $\mathrm{CO}\, R_n^{\square}$ рассмотрим многогранник $\operatorname{conv} R_n(\hat{\mu}_0)$, $\hat{\mu}_0 = (\mu_{01}, \ldots, \mu_{0n}) \in M$. Согласно утверждению 3.1, многогранники $\operatorname{conv} R_n(\hat{\mu}_0)$, $\operatorname{conv} P_n$ аффинно эквивалентны. Естественная биекция $I : S_n \to \mathbb{R}^{\hat{n} \cup E_n}$ задает линейную эквивалентность множеств $R_n(\hat{\mu}_0)$, $IR_n(\hat{\mu}_0) = \{\tau_{\hat{\mu}}(\hat{\mu}_0) = (\tau_{\hat{\mu} ij})_{1 \leq i \leq j \leq n} | \ \tau_{\hat{\mu} ij} = p_{\hat{\mu}}(\mu_{0i}) p_{\hat{\mu}}(\mu_{0j})$, $\hat{\mu} \in M\} \subseteq \mathbb{R}^{\hat{n} \cup E_n}$. Следовательно, для любого набора $\hat{\mu}_0 \in M$ многогранники $\operatorname{conv} P_n$, $\operatorname{conv} IR_n(\hat{\mu}_0)$ аффинно эквивалентны, что позволяет вместо $\operatorname{conv} P_n$ рассматривать многогранник $\operatorname{conv} IR_n(\hat{\mu}_0)$.

Далее понадобится характеристический вектор $\mathcal{X}(\tau_{\hat{\mu}})$ вектора $\tau_{\hat{\mu}}$, $\mathcal{X}(\tau_{\hat{\mu}}) = (\mathcal{X}(\tau_{\hat{\mu}})_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$, где $(\mathcal{X}(\tau_{\hat{\mu}}))_{ij} = 1$ для $\tau_{\hat{\mu} ij} \neq 0$, $(\mathcal{X}(\tau_{\hat{\mu}}))_{ij} = 0$ для $\tau_{\hat{\mu} ij} = 0$.

Теорема 3.1. *Многогранник $\mathrm{CO}\, R_{n,\hat{\mu}_0}^{\square} = \operatorname{conv} \mathcal{X}(IR_n(\hat{\mu}_0)) := \operatorname{conv} \{\mathcal{X}(\tau_{\hat{\mu}}(\hat{\mu}_0)) | \ \hat{\mu} \in M\}$ является корреляционным.*

Доказательство. Воспользуемся sign-индексацией множества $R_n(\hat{\mu}_0)$ с отмеченным набором $\hat{\mu}_0$. Тогда $R_n(\hat{\mu}_0) = R_{n\hat{\mu}_0}(\hat{\mu}_0) := \{Z_S(\hat{\mu}_0) | \ S \subseteq \hat{n}\}$, где

$$Z_S(\hat{\mu}_0) = (z_S(\hat{\mu}_0))' z_S(\hat{\mu}_0), \quad z_S(\hat{\mu}_0) = (p_S(\mu_{01}), \ldots, p_S(\mu_{0n})). \tag{3.2}$$

Поскольку $p_S(\mu_{0i}) = \prod_{k \in \hat{n}} (\mu_{0i} - (-1)^{j(k)} \mu_{0k})$, где $j(k) = 1$ для $k \in S$ и $j(k) = 0$ для $k \in \hat{n} \setminus S$, то из (3.2) следует равенство

$$\mathcal{X}(\tau_S) = \pi(S) \quad \forall S \subseteq \hat{n}. \tag{3.3}$$

Таким образом, $\mathrm{CO}\, R_{n,\hat{\mu}_0}^{\square} = \operatorname{conv} \{\mathcal{X}(\tau_S) | \ S \subseteq \hat{n}\} = \mathrm{CO}\, R_n^{\square}$. Теорема доказана.

Следствие 3.2. *Композиция трех отображений, заданных равенством (3.3), естественной биекцией между S_n и $\mathbb{R}^{\hat{n} \cup E_n}$, а также F^{-1} (см. доказательство леммы 3.1), определяет взаимно однозначное соответствие между множествами вершин многогранников $\operatorname{conv} P_n$, $\mathrm{CO}\, R_n^{\square}$.*

Кроме указанной связи между вершинами, соответствие существует и между некоторыми другими характеристиками многогранников $\mathrm{CO}\, R_n^{\square}$, $\operatorname{conv} P_n$. Действительно, имеет место

Утверждение 3.3. *1) [9] Многогранник $\mathrm{CO}\, R_n^{\square}$ телесный, $\mathrm{CO}\, R_1^{\square} = \operatorname{conv} \{\pi(\emptyset), \ \pi(\hat{1})\}$ – отрезок, $\mathrm{CO}\, R_2^{\square}$ – симплекс (тетраэдр), $\mathrm{CO}\, R_3^{\square}$ – многогранник общего положения;*

2) произвольные семь вершин $\mathrm{CO}\, R_n^{\square}$ $(n \geq 3)$ аффинно независимы;

3) [9] для $n \geq 3$ каждая грань размерности $l \leq 5$ $\mathrm{CO}\, R_n^{\square}$ является симплексом;

4) вершины $\{\pi(S) | \ S \leq \hat{n}, \ |S| \leq 2\}$ $\mathrm{CO}\, R_n^{\square}$ аффинно независимы;

5) [9] при $n \geq 4$ вершины $\mathrm{CO}\, R_n^{\square}$ уже не находятся в общем положении;

6) обозначим через $IR_{\gamma(n,k)}(\hat{\mu}_0)$ *множество вершин многогранника* $\operatorname{conv} IR_n(\hat{\mu}_0)$, *аффинно эквивалентное множеству* $G_{\gamma(n,k)}$, *тогда* $\mathcal{X}(IR_\gamma(\hat{\mu}_0))$ *– множество аффинно зависимых вершин* $\mathrm{CO}\, R^{\square}_{n,\hat{\mu}_0}$, $|\mathcal{X}(IR_\gamma(\hat{\mu}_0))| = (1/2)k(k+1)+2$, $\dim \operatorname{aff}\{\mathcal{X}(IR_\gamma(\hat{\mu}_0))\} = (1/2)k(k+1)$.

Доказательства утверждений 2), 4), 6) вполне аналогичны доказательствам утверждения 2.2 и теорем 2.2, 2.3. Например, для проверки утверждения 4) достаточно заметить, что из равенства $\sum_{|S|\le 2} c_S\pi(S) = 0$ следует $c_S(\pi(S))_{ij} = 0$ для $S = \{i,j\}$. Отсюда получаем $c_S = 0$, если $|S| = 2$, и далее последовательно $c_S = 0$ для $|S| = 1$, $c_S = 0$ для $S = \emptyset$.

Для доказательства утверждения 6) рассмотрим определенную в разд. 2 тройку $\gamma(n,k) = (\hat{\mu}, T, S_0)$. Без ограничения общности будем считать, что $T = \{1, 2, \ldots, k\}$. Тогда

$$g_\gamma(\mu_i, \mu_j) g_{\gamma S}(\mu_i, \mu_j) = 0 \quad \text{для} \quad 1 \le i \le k, \quad j \ge i.$$

Отсюда с помощью рассуждений, аналогичных доказательству утверждения 4), получим $\dim \operatorname{aff} \mathcal{X}(IR_\gamma(\hat{\mu}_0)) = k(k+1)/2$ и $|\mathcal{X}(IR_\gamma(\hat{\mu}_0))| = 2 + k(k+1)/2$. Утверждение 3.3 доказано.

Результат следствия 3.2, сравнение утверждений 3.2, 3.3, а также предварительный анализ некоторых классов граней $\mathrm{CO}\, R_n^{\square}$ и $\operatorname{conv} P_n$ позволяют нам сформулировать следующую гипотезу: многогранники $\mathrm{CO}\, R_n^{\square}$, $\operatorname{conv} P_n$ комбинаторно эквивалентны.

Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь (проект Ф03-150).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полушин И.Г., Фрадков А.Л, Хилл* // Автоматика и телемеханика. 2000. № 3. С. 3–37.
2. *Willems J.C.* // Arch. Rational Mesh. and Anal. 1972. V. 45. P. 352–393.
3. *Борухов В.Т., Колпащиков В.П., Шнип А.И.* // ИФЖ. 1996. Т. 69. № 5. С. 707–715.
4. *Fabrizio M., Golden J.M.* // Quarterly of Appl. Math. 2002. V. 60. № 2. P. 341–381.
5. *Борухов В.Т., Зеленяк Д.М.* // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С. 3–14.
6. *Борухов В.Т., Зеленяк Д.М.* // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46. № 4. С. 35–37.
7. *Борухов В.Т., Зеленяк Д.М.* // Автоматика и телемеханика. 2003. № 4. С. 18–29.
8. *Борухов В.Т.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 15–23.
9. *Деза М., Лоран М.* Геометрия разрезов и метрик. М., 2001.
10. *Борухов В.Т., Зеленяк Д.М.* // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47. № 6. С. 21–23.
11. *Breuer S., Onat E.* // Z. Angew. Math. Phys. 1964. V. 15. P. 12–21.
12. *Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников). М., 1981.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию
07.10.2003 г.