

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Пухов, Неравенства между колмогоровскими и бернштейновскими поперечниками в гильбертовом пространстве,
Матем. заметки, 1979, том 25, выпуск 4, 619–628

<https://www.mathnet.ru/mzm10037>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

29 апреля 2025 г., 21:20:31



НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ КОЛМОГОРОВСКИМИ И БЕРНШТЕЙНОВСКИМИ ПОПЕРЕЧНИКАМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. В. Пухов

1. Пусть X — банахово пространство над полем \mathbf{R} с единичным шаром $B = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$; через L_m обозначаем подпространство в X размерности m . Для множества $M \subset X$ величины

$$d_n(M, X) = \inf_{(L_n, x)} \{d \geq 0 \mid M \subset x + dB + L_n\}, \quad n \geq 0, \quad (1)$$

$$b_n(M, X) = \sup_{(L_{n+1}, x)} \{b \geq 0 \mid M \supset x + bB \cap L_{n+1}\}, \quad n \geq 0, \quad (2)$$

называют n -поперечниками по Колмогорову и Бернштейну соответственно (см. [1, стр. 15, 17]).

В частности, если X — N -мерное пространство, а M — выпуклый компакт в X , то $d_0(M, X)$ — это радиус описанного около M шара, $2b_0(M, X)$ — диаметр множества M , $b_{N-1}(M, X)$ — радиус вписанного в M шара, а $d_{N-1}(M, X)$ — половина ширины множества M .

Соотношения между величинами (1) и (2) давно интересуют геометров. Например, если $X = \mathbf{R}^N$ — N -мерное евклидово пространство, то широко известны неравенства, имеющие место для любого выпуклого тела $M \subset X$

$$1 \leq d_0(M, X)/b_0(M, X) \leq \sqrt{2N/(N+1)}, \quad (3)$$

$$1 \leq \frac{d_{N-1}(M, X)}{b_{N-1}(M, X)} \leq \begin{cases} (N+1)/\sqrt{N+2} & N \text{ — четное,} \\ \sqrt{N}, & N \text{ — нечетное.} \end{cases} \quad (4)$$

Неравенство $b_n^*(M, X) \leq d_n(M, X)$, где X — произвольное банахово пространство, а M — алгебраическая сумма компакта и конечномерного подпространства, принадлежит В. М. Тихомирову (см., например, [1, стр. 220]). Правое неравенство в (3) называется неравенством Юнга (см. [2, стр. 28]), правое неравенство в (4) — неравенством Бляшке (см. [2, стр. 84]).

Все неравенства в (3) и (4) являются точными: левая часть достигается для шара, а правая — для правильного N -мерного симплекса.

2. Пусть X — произвольное банахово пространство. Обозначим через \mathcal{M}_X совокупность всех ограниченных выпуклых множеств в X , а через $\tilde{\mathcal{M}}_X$ — тех множеств из \mathcal{M}_X , которые к тому же центрально-симметричны.

Следуя В. М. Тихомирову, определим для X следующие характеристики:

$$T_n(X) = \sup \left\{ \frac{d_n(M, X)}{b_n(M, X)} \mid M \in \mathcal{M}_X, b_n(M, X) \neq 0 \right\},$$

$$\tilde{T}_n(X) = \sup \left\{ \frac{d_n(M, X)}{b_n(M, X)} \mid M \in \tilde{\mathcal{M}}_X, b_n(M, X) \neq 0 \right\}.$$

Очевидно, что $T_n(X) \geq \tilde{T}_n(X)$. Используя лемму 7 из работы [3] и рассуждая так же, как при доказательстве леммы 1 настоящей заметки, легко получить, что $T_n(X) \leq (n+1)(n+2)$. Поэтому $T_n(X)$ и $\tilde{T}_n(X)$ конечны при каждом $n = 0, 1, 2, \dots$. Ясно, что $T_n(X)$ и $\tilde{T}_n(X)$ суть наилучшие постоянные в неравенствах вида

$$d_n(M, X) \leq c_n b_n(M, X), \quad M \in \mathcal{M}_X (M \in \tilde{\mathcal{M}}_X).$$

Автору не известно ни одного точного значения величин $T_n(X)$ и $\tilde{T}_n(X)$, кроме случаев, перечисленных в (3) и (4), т. е. при $X = \mathbf{R}^n$ и $n = 0, N-1$ (легко понять, что $\tilde{T}_0(\mathbf{R}^N) = \tilde{T}_{N-1}(\mathbf{R}^N) = 1$, однако для $n, 1 \leq n \leq N-2$, уже $\tilde{T}^n(\mathbf{R}^N) > 1$). Интересно знать хотя бы $T_1(\mathbf{R}^3)$ и $\tilde{T}_1(\mathbf{R}^3)$; по-видимому, это самый простой случай.

В этой заметке доказана следующая

ТЕОРЕМА. Пусть X — гильбертово пространство, тогда

$$а) \quad n+1 \leq T_n(X) \leq n+2, \quad (5)$$

$$б) \quad \sqrt{n+1} \leq \tilde{T}_n(X) < \sqrt{e} \sqrt{n+1}, \quad (6)$$

где e — основание натуральных логарифмов.

З а м е ч а н и е. В работе [3] было получено неравенство $\bar{T}_n(X) \leq n + 1$ и выдвигалась гипотеза о том, что $\bar{T}_n(X) = \sqrt{n + 1}$. Эта гипотеза нашла у нас частичное подтверждение в (6).

Из доказательства леммы 2 вытекают следующие неравенства для бернштейновского поперечника правильного N -мерного симплекса σ^N с ребром $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} ((n + 1)(n + 2))^{-1/2} &\leq b_n(\sigma^N, X) \leq \\ &\leq (1/(n + 1))\sqrt{N/(N + 1)}. \end{aligned}$$

Правдоподобно, что

$$b_n(\sigma^N, X) = b_n(\sigma^{n+1}, X) = ((n + 1)(n + 2))^{-1/2}.$$


Это делает вероятной гипотезу о том, что

$$T_n(X) = ((n + 1)(n + 2))^{1/2}.$$

3. Несколько слов об обозначениях. Для множества $M \subset X$ обозначим, соответственно, через $\text{lin } M$, $\text{aff } M$, $\text{conv } M$ линейную, аффинную, выпуклую оболочку множества M , т. е., соответственно, пересечение всех линейных подпространств, линейных многообразий, выпуклых множеств в X , содержащих M ; в аффинной оболочке $\text{aff } M$, если ее рассматривать как топологическое пространство с топологией, наследуемой из X , можно определить внутренность множества M , это множество называют относительной внутренностью множества M и пишут $\text{ri } M$. Через $r(x, M)$ будем обозначать расстояние от точки x до множества M , $x \in M$.

Прежде чем доказывать теорему, напомним, что в гильбертовом пространстве X на классе

$$\mathcal{M}_X^m = \{M \in \mathcal{M}_X, \dim \text{aff } M \leq m\}$$

можно однозначным способом определить положительно однородную инвариантную относительно движений функцию $V_m(\cdot)$, нормированную условием $V_m(B \cap L_m) = 1$, где L_m — произвольное m -мерное подпространство в X . Эта функция называется m -объемом. 

4. Доказательство пункта а) теоремы. Оценка для $T_n(X)$ с в е р х у.

ЛЕММА 1. Для $M \in \mathcal{M}_X$, $n = 0, 1, 2, \dots$ выполнено неравенство

$$d_n(M, X) \leq (n + 2)b_n(M, X).$$

Доказательство. Фиксируем n . Поскольку M ограничено, то

$$V(M) = \sup \{V_{n+1}(\text{conv} \{x_1, \dots, x_{n+2}\}) \mid x_1, \dots, x_{n+2} \in M\} < \infty. \quad (7)$$

Естественно считать, что M содержит не менее чем $n + 2$ аффинно независимых точек, так как в противном случае $d_n(M, X) = b_n(M, X) = 0$; поэтому $V(M) > 0$.

Выберем точки $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n+2}$ из M так, чтобы для фиксированного ε , $0 < \varepsilon < 1$, выполнялось неравенство

$$V_{n+1}(\text{conv} \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n+2}\}) > (1 - \varepsilon)V(M).$$

Пусть d — наименьшая высота симплекса $\text{conv} \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n+2}\}$, $n \geq 1$, при $n = 0$ $d = \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$. Можно считать, что $d = r(\bar{x}_{n+2}, \text{aff} \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n+1}\})$.

Покажем, что для любого x из M

$$r(x, \text{aff} \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n+1}\}) \leq d/(1 - \varepsilon)$$

и, значит, $d_n(M, X) \leq d/(1 - \varepsilon)$.

Действительно, если это не так для некоторого \bar{x} из M , то из-за выпуклости M симплекс $\text{conv} \{\bar{x}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n+1}\}$ лежит в M , а его $(n + 1)$ -объем строго больше $V(M)$, что противоречит выбору величины $V(M)$, см. (7).

Далее, так как d — наименьшая высота симплекса $\text{conv} \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n+2}\}$, $n \geq 1$ (при $n = 0$ $d = \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$), то для b — радиуса вписанного в этот симплекс $(n + 1)$ -мерного шара — имеет место неравенство

$$\begin{aligned} d/(n + 2) &= \\ &= r((\bar{x}_1 + \dots + \bar{x}_{n+2})/(n + 2), \text{aff} \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n+1}\}) \leq b. \end{aligned}$$

При $n = 0$ последнее неравенство обращается в равенство. Итак, для произвольного ε , $0 < \varepsilon < 1$, имеем цепочку неравенств

$$d_n(M, X) \leq \frac{d}{1 - \varepsilon} = \frac{n + 2}{1 - \varepsilon} \cdot \frac{d}{n + 2} \leq \frac{n + 2}{1 - \varepsilon} b \leq \frac{n + 2}{1 - \varepsilon} b_n(M, X),$$

в результате чего лемма 1 доказана.

Следствием этой леммы является оценка сверху: $T_n(X) \leq n + 2$.

Оценка для $T_n(X)$ снизу. Пусть X — сепарабельное гильбертово пространство с ортонормиро-

ванным базисом e_1, e_2, \dots , через $(\cdot | \cdot)$ обозначим скалярное произведение в X .

Примем следующую реализацию правильного N -мерного симплекса σ^N с ребром $\sqrt{2}$:

$$\sigma^N = \text{conv} \{e_1, \dots, e_{N+1}\}.$$

ЛЕММА 2. При $0 \leq n \leq N - 1$

$$b_n(\sigma^N, X) \leq (1/(n+1))\sqrt{N/(N+1)}.$$

Основная идея доказательства этой леммы принадлежит В. М. Тихомирову.

Доказательство. Пусть $\mathbf{R}^{N+1} = \text{lin} \{e_1, \dots, e_{N+1}\}$, тогда

$$b_n(\sigma^N, X) = b_n(\sigma^N, \mathbf{R}^{N+1}).$$

Предположим, что выполнено включение

$$\sigma^N \supset x + bB \cap L_{n+1}, \quad (8)$$

где L_{n+1} — $(n+1)$ -мерное подпространство в \mathbf{R}^{N+1} , параллельное $\text{aff } \sigma^N$, $0 \leq n \leq N - 1$; b -число, $b > 0$.

Обозначим через $\Gamma_i = \{x \in \sigma^N \mid (x | e_i) = 0\}$ i -ю $(N - 1)$ -мерную грань симплекса σ^N , а через

$$S_i(L_{n+1}, b) = \text{aff } \Gamma_i + bB \cap L_{n+1}$$

— соответствующий «слой», т. е. часть $\text{aff } \sigma^N$, лежащую между двумя параллельными $(N - 1)$ -мерными линейными многообразиями, и пусть s_i — ширина этого «слоя», т. е. расстояние между упомянутыми параллельными многообразиями.

Легко подсчитать, что

$$s_i(L_{n+1}, b) = 2b \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} (g_i | f_j)^2},$$

здесь g_i — единичная внутренняя нормаль к Γ_i , лежащая в $\text{aff } \sigma^N$ (точное выражение для g_i приводится далее), а $\{f_j\}_{j=1}^{n+1}$ — ортонормированный базис в L_{n+1} .

Очевидно, что включение (8) выполнено тогда и только тогда, когда при всех i , $1 \leq i \leq N + 1$,

$$r(x, \Gamma_i) \geq (1/2)s_i(L_{n+1}, b).$$

Далее, хорошо известно, что сумма расстояний от точки правильного симплекса до его граней равна высоте

$$\sum_{i=1}^{N+1} r(x, \Gamma_i) = h_N,$$

где h_N — высота симплекса σ^N , равная $\sqrt{1 + 1/N}$, и наоборот, если сумма неотрицательных чисел r_1, \dots, r_{N+1} равна h_N , то существует точка x симплекса σ^N такая, что $r(x, \Gamma_i) = r_i$, $1 \leq i \leq N + 1$. Поэтому следующие предложения эквивалентны:

а) существует x , $x \in \sigma^N$, такое, что при всех i , $1 \leq i \leq N + 1$,

$$r(x, \Gamma_i) \geq (1/2)s_i(L_{n+1}, b),$$

$$\text{б) } \sum_{i=1}^{N+1} (1/2)s_i(L_{n+1}, b) = b \sum_{i=1}^{N+1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} (g_i | f_j)^2} \leq h_N. \quad (9)$$

Итак, мы получили, что при некотором x включение (8) выполнено тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (9).

Подводя итог сказанному, видим, что $b_n(\sigma^N, \mathbf{R}^{N+1})$ — это значение следующей экстремальной задачи — максимизировать b при следующих ограничениях на b и систему векторов $\{f_j\}_{j=1}^{n+1}$ из \mathbf{R}^{N+1} : выполнено неравенство (9) и система $\{f_j\}_{j=1}^{n+1}$ ортонормирована и ее линейная оболочка параллельна $\text{aff } \sigma^N$.

Эту экстремальную задачу можно заменить такой эквивалентной задачей:

$$\sum_{i=1}^{N+1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} (g_i | f_j)^2} \rightarrow \inf \quad (10)$$

при ограничениях

$$\text{а) } (f_k | f_j) = \delta_{kj}, \quad 1 \leq k, j \leq n + 1; \quad (10a)$$

δ_{kj} — символ Кронекера,

$$\text{б) } \text{lin } \{f_1, \dots, f_{n+1}\} \text{ параллельна } \text{aff } \sigma^N. \quad (10б)$$

Из (9), (10), (10a), (10б) вытекает, что $b_n(\sigma^N, \mathbf{R}^{N+1}) = h_N/\zeta_N$, где ζ_N — значение задачи (10), (10a), (10б).

Для ζ_N мы можем указать следующую оценку. Поскольку для $i = 1, \dots, N + 1$ выполнено неравенство Бесселя

$$1 = (g_i | g_i) \geq \sum_{j=1}^{n+1} (g_i | f_j)^2,$$

а для α , $0 \leq \alpha \leq 1$, имеем, что $\sqrt{\alpha} \geq \alpha$, то

$$\sum_{i=1}^{N+1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} (g_i | f_j)^2} \geq \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{n+1} (g_i | f_j)^2.$$

Теперь выразим g_i , $1 \leq i \leq N+1$, через e_1, \dots, e_{N+1} (например, $g_1 = \sqrt{N/(N+1)}(e_1 - (1/N)(e_2 + \dots + e_{N+1}))$) и используем условие (106), из которого, в частности, следует, что при всех j , $1 \leq j \leq n+1$, $(e_1 + \dots + e_{N+1} | f_j) = 0$, в результате будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{n+1} (g_i | f_j)^2 &= ((N+1)/N) \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{n+1} (e_i | f_j)^2 = \\ &= ((N+1)/N) \sum_{j=1}^{n+1} (f_j | f_j) = ((N+1)/N)(n+1), \end{aligned}$$

отому справедливо неравенство

$$\zeta_N \geq ((N+1)/N)(n+1).$$

Окончательно

$$b_n(\sigma^N, \mathbf{R}^{N+1}) = h_N/\zeta_N \leq (1/(n+1))\sqrt{N/(N+1)}.$$

Лемма 2 доказана.

Если обозначим через $\mathcal{O}^N = \text{conv}\{\pm e_1, \dots, \pm e_N\}$ правильный N -мерный октаэдр, то при $n > 1$ имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned} d_n(\sigma^{[kn]}, X) &\geq d_{n+1}(\mathcal{O}^{[kn]+1}, X) = d_{n+1}(\mathcal{O}^{[kn]+1}, \mathbf{R}^{[kn]+1}) = \\ &= \sqrt{1 - (n+1)/([kn] + 1)}, \end{aligned}$$

где $[\alpha]$ — целая часть числа α .

Здесь мы воспользовались теоремой В. М. Тихомирова (см. [4]) о неизменности n -поперечника по Колмогорову при расширении гильбертова пространства и формулой С. Б. Стечкина (см. [5] или [1, стр. 237]):

$$d_n(\mathcal{O}^N, \mathbf{R}^N) = \sqrt{1 - n/N}.$$

Тогда

$$T_n(X) \geq \frac{d_n(\sigma^{[kn]}, X)}{b_n(\sigma^{[kn]}, X)} > (n+1) \sqrt{1 - \frac{n+1}{[kn] + 1}},$$

и так как последнее выполнено при всех $n \geq 1 + 1/n$, $n \geq 1$, то $T_n(X) \geq n+1$, $n \geq 1$. Неравенство $T_0(X) \geq 1$ очевидно: для любого множества $M \subset X$ $d_0(M, X) \geq b_0(M, X)$, т. е. диаметр описанного около M шара

не меньше диаметра множества M . Пункт а) теоремы доказан.

5. Доказательство пункта б) теоремы. Оценка для $T_n(X)$ сверху.

Пусть x_1, \dots, x_m — набор линейно независимых векторов из X . Множество

$$\mathcal{E}(x_1, \dots, x_m) = \left\{ x = \sum_{i=1}^m \xi_i x_i \mid \sum_{i=1}^m \xi_i^2 \leq 1 \right\}$$

назовем m -мерным эллипсоидом.

ЛЕММА 3. Если x_1, \dots, x_{n+1} — набор линейно независимых векторов из X , а $x \in X$ такой, что

$$r(x, L_n) \geq r(x_{n+1}, L_n),$$

где $L_n = \text{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$, тогда во множество

$$\text{conv}\{\pm(1+1/n)^{n/2}\sqrt{n+1}x, \mathcal{E}(x_1, \dots, x_n)\}$$

можно поместить $(n+1)$ -мерный эллипсоид с $(n+1)$ -объемом не меньшим, чем $V_{n+1}(\mathcal{E}(x_1, \dots, x_{n+1}))$.

Доказательство. Действительно, имеет место включение

$$\begin{aligned} \text{conv}\{\pm(1+1/n)^{n/2}\sqrt{n+1}x_{n+1}, \mathcal{E}(x_1, \dots, x_n)\} \supset \\ \supset (1+1/n)^{-1/2}\mathcal{E}(x_1, \dots, x_n, (1+1/n)^{(n+1)/2}x_{n+1}). \end{aligned}$$

Оно проверяется несложным прямым подсчетом, когда x_1, \dots, x_{n+1} — ортонормированный набор. Общий случай сводится к этому с помощью любого линейного отображения $\lambda: X \rightarrow X$, которое переводит ортонормированный набор x'_1, \dots, x'_{n+1} в x_1, \dots, x_{n+1} : $\lambda x'_i = x_i$, $1 \leq i \leq n+1$.

Далее, для любого линейного отображения $\lambda: X \rightarrow X$ такого, что λ действует на элементы подпространства L_n тождественно и $\lambda x_{n+1} = x$, имеем

$$\begin{aligned} \text{conv}\{\pm(1+1/n)^{n/2}\sqrt{n+1}x, \mathcal{E}(x_1, \dots, x_n)\} = \\ = \lambda \text{conv}\{\pm(1+1/n)^{n/2}\sqrt{n+1}x_{n+1}, \mathcal{E}(x_1, \dots, x_n)\}, \\ \mathcal{E}(x_1, \dots, x_n, (1+1/n)^{(n+1)/2}x) = \\ = \lambda \mathcal{E}(x_1, \dots, x_n, (1+1/n)^{(n+1)/2}x_{n+1}), \\ V_{n+1}(\mathcal{E}(x_1, \dots, x_n, (1+1/n)^{(n+1)/2}x)) \geq \\ \geq V_{n+1}(\mathcal{E}(x_1, \dots, x_n, (1+1/n)^{(n+1)/2}x_{n+1})). \end{aligned}$$

Отсюда получаем утверждение леммы 3.

ЛЕММА 4. Для $M \in \tilde{\mathcal{M}}_X$, $n = 0, 1, 2, \dots$ выполнено неравенство

$$d_n(M, X) \leq \sqrt{e} \sqrt{n+1} b_n(M, X),$$

где e — основание натуральных логарифмов.

Доказательство. Можно считать, что центр симметрии множества M является нулем пространства X , и тогда в определениях (1) и (2) n -поперечников вектор x можно считать равным нулю.

Случай $n = 0$ тривиален, так как $d_0(M, X)$ — радиус описанного около M шара, а $b_0(M, X)$ — половина диаметра множества M . Но в силу центральной симметрии диаметр множества M равен диаметру описанного шара.

Пусть целое $n \geq 1$. Естественно считать, что множество M содержит не менее чем $n + 1$ линейно независимых векторов, так как в противном случае $d_n(M, X) = b_n(M, X) = 0$.

Поскольку M ограничено, то

$$V(M) = \sup \{V_{n+1}(\mathcal{E}_{n+1}) \mid \mathcal{E}_{n+1} \subset M\} < \infty, \quad (11)$$

где \mathcal{E}_{n+1} — произвольный $(n + 1)$ -мерный эллипсоид.

Фиксируем ε , $0 < \varepsilon < 1$, выберем $\mathcal{E}_{n+1} \subset M$ так, что

$$V_{n+1}(\mathcal{E}_{n+1}) > (1 - \varepsilon)V(M).$$

Для некоторого набора x_1, \dots, x_{n+1} попарно ортогональных векторов имеем

$$\mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{E}(x_1, \dots, x_{n+1}).$$

Пусть $\|x_{n+1}\| \leq \|x_i\|$, $1 \leq i \leq n$, значит,

$$b_n(M, X) \geq \|x_{n+1}\|. \quad (12)$$

Тогда для любого $x \in M$

$$r(x, L_n) \leq (1 + 1/n)^{n/2} \sqrt{n+1} (\|x_{n+1}\|/(1 - \varepsilon)), \quad (13)$$

где $L_n = \text{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Действительно, в противном случае множество

$$\text{conv}\{\pm x, \mathcal{E}(x_1, \dots, x_n)\}$$

по лемме 3 содержит $(n + 1)$ -мерный эллипсоид $(n + 1)$ -объема $(1/(1 - \varepsilon))V_{n+1}(\mathcal{E}_{n+1})$, что строго больше $V(M)$, а это противоречит определению постоянной $V(M)$, см. (11).

Из неравенств (12) и (13) получаем, что при любом ε , $0 < \varepsilon < 1$, справедливо неравенство

$$d_n(M, X) \leq (1 + 1/n)^{n/2} \sqrt{n+1} (1/(1-\varepsilon)) b_n(M, X),$$

которое доказывает лемму 4, так как для $n = 1, 2, \dots$

$$(1 + 1/n)^n < e.$$

Следствием этой леммы является оценка для $\bar{T}_n(X)$ сверху: $\bar{T}_n(X) < \sqrt{e} \sqrt{n+1}$.

Оценка для $\bar{T}_n(X)$ снизу. Как и выше, пусть e_1, \dots, e_N — ортонормированный базис в N -мерном евклидовом пространстве \mathbf{R}^N , пусть также $\mathcal{O}^N = \text{conv} \{\pm e_1, \dots, \pm e_N\}$ — N -мерный правильный октаэдр в \mathbf{R}^N . По формуле С. Б. Стечкина (см. [5] или [1, стр. 237]) при $0 \leq n \leq N$

$$d_n(\mathcal{O}^N, \mathbf{R}^N) = \sqrt{1 - n/N},$$

а в работе [6] доказано, что

$$b_n(\mathcal{O}^N, \mathbf{R}^N) = 1/\sqrt{n+1}.$$

Отсюда имеем оценку для $\bar{T}_n(X)$ снизу: $\bar{T}_n(X) \geq \sqrt{n+1}$. Пункт б) теоремы доказан.

В заключение автор благодарит своего научного руководителя В. М. Тихомирова за полезные обсуждения задачи и постоянное внимание.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
13.IV.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, М., Изд-во МГУ, 1976.
- [2] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В., Теорема Хелли, М., «Мир», 1968.
- [3] Митягин Ф. С., Хенкин Г. М., Неравенства между n -поперечниками, Тр. семинара по функциональному анализу, 7, Воронеж, 1963, 97—103.
- [4] Тихомиров В. М., Некоторые вопросы теории приближений, Докл. АН СССР, 160, № 4 (1965), 774—777.
- [5] Стечкин С. Б., О наилучшем приближении заданных классов любыми полиномами, Успехи матем. наук, 9, № 1 (1954), 133—134.
- [6] Стесин М. И., О поперечниках по Александрову конечномерных октаэдров, Вестник МГУ, Сер. матем., механ., № 3 (1973), 30—35.