Е. И. Хухро, Конечные p-группы, допускающие автоморфизм порядка p с малым числом неподвижных точек,
Матем. заметки, 1985, том 38, выпуск 5, 652–657

https://www.mathnet.ru/mzm5576

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 38, № 5 (1985)

КОНЕЧНЫЕ p-ГРУППЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ АВТОМОРФИЗМ ПОРЯДКА p С МАЛЫМ ЧИСЛОМ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Е. И. Хухро

1. Введение. Пусть конечная p-группа G допускает автоморфизм простого порядка p, имеющий ровно p^m неподвижных точек. Цель настоящей работы — во-первых, доказать, что в этом случае группа G обладает подгруппой ступени нильпотентности, зависящей только от p, индекс которой ограничен некоторой функцией от p и m. Во-вторых, привести примеры, показывающие, что даже для метабелевых групп в этом утверждении функцию, ограничивающую ступень нильпотентности, нельзя заменить на константу, не зависящую от p. Это дает, в частности, отрицательный ответ на вопрос Хартли 8.81 а) из «Коуровской тетради» [1].

Изучение свойств группы G в зависимости от значений p и m было начато в работе Блэкберна [2] — в силу того, что конечная p-группа является p-группой максимального класса тогда и только тогда, когда она обладает внутренним автоморфизмом порядка p, имеющим ровно p^2 неподвижных точек. В работах Лидхэм — Грина и Маккэй [3] и Шеферда [4] были получены новые результаты о p-группах максимального класса. В частности, было доказано, что ступень нильпотентности коммутанта p-группы максимального класса ограничена некоторой функцией от p. В настоящей заметке на основе теоремы автора [5] приводится очень короткое доказательство этого утверждения (хотя и с гораздо худшей оценкой ступени нильпотентности).

Другим источником является теорема Хигмэна [6] о том, что ступень нильпотентности нильпотентной группы, допускающей регулярный автоморфизм простого порядка p, не превосходит некоторого числа $h(p)$, зависящего только от p. На основе этой теоремы Альперин [7] доказал, что ступень разрешимости группы G ограничена некоторой функцией от p и m.

В случае $p = 2$ Майкснер и Хартли [8] доказали, что группа G содержит абелеву подгруппу индекса, зависящего от p и m.

Сформулируем теперь результаты настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. *Любая конечная p-группа, допускающая автоморфизм простого порядка p, имеющий ровно p^m неподвижных точек, содержит подгруппу индекса $p^{m(mp(h(p)+m+1)+1)}$, ступень нильпотентности которой $\leqslant h(p)+1$, где $h(p)$ — функция Хигмэна.*

Следствие. *Если локально конечная p-группа содержит элемент простого порядка с конечным централизатором, то она почти нильпотентна.*

Функция Хигмэна $h(p)$ оценена сверху явно В. А. Крекниным и А. И. Кострикиным [9] и В. А. Крекниным [10]. При дополнительном условии s-ступенной разрешимости группы G оценки можно улучшить.

ТЕОРЕМА 2. *Любая s-ступенно разрешимая p-группа, допускающая автоморфизм порядка p, имеющий ровно p^m неподвижных точек, обладает подгруппой индекса $p^{m(mp(((p-1)^s-1)/(p-2)+m+1)+1)}$, ступень нильпотентности которой $\leqslant ((p-1)^s-1)/(p-2)+1$.*

Теоремы 1 и 2 неулучшаемы в том смысле, что справедлива

ТЕОРЕМА 3. *Не существует такой функции $k(p, m)$ и такого числа c (не зависящего от p), что любая конечная метабелева p-группа, допускающая автоморфизм порядка p, имеющий ровно p^m неподвижных точек, обладает подгруппой индекса $k(p, m)$, ступень нильпотентности которой $\leqslant c$.*

Члены нижнего центрального ряда будут обозначаться через γ_i. Напомним, что если φ — автоморфизм конечной группы G, а N — φ-инвариантная нормальная подгруппа, то $|C_{G/N}(\varphi)| \leqslant |C_G(\varphi)|$.

2. Доказательство теорем 1 и 2. Пусть P — конечная p-группа, φ — ее автоморфизм порядка p и $|C_P(\varphi)| = p^m$.

Как показано в [7], справедливо неравенство

$$|\gamma_{h(p)+1}(P)/\gamma_{h(p)+2}(P)| \leqslant p^{mp(h(p)+m+1)}.$$

Эта оценка получается при рассмотрении присоединенного кольца Ли L группы P. Именно, если $\widetilde{L} = L \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[\omega]$ — расширение кольца L с помощью примитивного корня p-й степени из 1, то $pZ \subseteq L_0 + L_1 + L_2 + \ldots + L_{p-1}$, где $L_i = \{u \in \widetilde{L} \mid u\varphi = \omega^i u\}$. К алгебре Ли $L_0 + L_1 + L_2 + \ldots + L_{p-1}$ можно применить те же рассуждения, которые обычно проводятся в случае регулярного автоморфизма (см., например, § 10 главы VIII [11]). Поэтому идеал, порожденный L_0, содержит $\gamma_{h(p)+1}(p\widetilde{L})$ по теореме Хигмэна [6] и содержит $\gamma_{((p-1)^s-1)/(p-2)+1}(p\widetilde{L})$, где s — ступень разрешимости группы P, по теореме В. А. Крекнина и А. И. Кострикина [9]. Аддитивная группа этого идеала, как легко понять, имеет период, делящий $|C_P(\varphi)| = p^m$. Следовательно, $p^m p^{h(p)+1} \cdot \gamma_{h(p)+1}(\widetilde{L}) = 0$, а значит, период группы $\gamma_{h(p)+1}(P)/\gamma_{h(p)+2}(P)$ делит $p^{m+h(p)+1}$. Рассмотрение жордановой формы φ на фактор-группе по подгруппе Фраттини показывает, что число порождающих не превосходит pm. Так получается приведенная выше оценка.

Аналогичным образом если группа P s-ступенно разрешима, то справедливо неравенство

$$|\gamma_{((p-1)^s-1)/(p-2)+1}(P)/\gamma_{((p-1)^s-1)/(p-2)+2}(P)| \leqslant$$
$$\leqslant p^{mp\left(\frac{(p-1)^s-1}{p-2}+m+1\right)}.$$

Пусть теперь G — конечная p-группа, а φ — ее автоморфизм, удовлетворяющие условиям теоремы 1 (или 2). Положим $P = \gamma_n(G_1)$, где G_1 — полупрямое произведение $G_1 = G\langle\varphi\rangle$. По теореме Ф. Холла [11, теорема VIII.10.18] все нетривиальные факторы нижнего центрального ряда группы $\gamma_n(G_1)$, кроме последнего, имеют порядок $\geqslant p^n$. Сопоставляя этот факт с полученными выше оценками, заключаем, что при $n = mp(h(p) + m + 1) + 1$ (или $n = m \cdot p \cdot (((p-1)^s - 1)/(p-2) + m + 1) + 1$ группа P нильпотентна ступени $\leqslant h(p) + 1$ (или $\leqslant ((p-1)^s - 1)/(p-2) + 1$). Но φ централизует каждый из факторов $\gamma_i(G_1)/\gamma_{i+1}(G)$, и потому их порядки не превосходят $|C_G(\varphi)| = p^m$. Следовательно, индекс подгруппы P

не превосходит

$$p^{m(mp(h(p)+m+1)+1)} \ \left(\text{или } p^{m(mp(((p-1)^s-1)/(p-2)+m+1)+1)}\right).$$

Теоремы 1 и 2 доказаны.

Докажем следствие. Пусть в условиях следствия p^m — порядок централизатора элемента простого порядка. Свойство группы обладать d-ступенно нильпотентной подгруппой индекса k для данных d и k записывается предметно универсальной формулой исчисления предикатов. В группе, удовлетворяющей условиям следствия, можно выбрать локальное покрытие из конечных p-подгрупп, в каждой из которых есть элемент порядка p с централизатором порядка $\leqslant p^m$. Этот элемент индуцирует внутренний автоморфизм, имеющий $\leqslant p^m$ неподвижных точек. Поэтому, в силу локальной теоремы А. И. Мальцева, следствие вытекает из теоремы 1 (см., например, [12, теорема 27.3]).

3. Доказательство теоремы 3. Пусть ω обозначает примитивный корень p-й степени из 1 над полем характеристики 0, где $p > 2$. Обозначим через $\mathbf{Z}_{p^s}[\omega]$ фактор-кольцо кольца $\mathbf{Z}[\omega]$ по модулю p^s, а через U — свободный $(p-1)$-мерный $\mathbf{Z}_{p^s}[\omega]$-модуль. Группа матриц

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{p-2} \\ & 1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & a_2 \\ & 0 & & \ddots & a_1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a_i \in \mathbf{Z}_{p^s}[\omega] \right\}$$

коммутативна и естественным образом действует на U. Элемент $\varphi = \operatorname{diag}(\omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1})$ также действует на U и сопряжением — на A. Поэтому его можно считать автоморфизмом полупрямого произведения $P = UA$.

Легко подсчитать, что если $k \not\equiv 0 \pmod p$, то

$$|\{b \in \mathbf{Z}_{p^s}[\omega] \mid (\omega^k - 1)\, b = 0\}| = p.$$

Следовательно,

$$|C_P(\varphi)| = |C_U(\varphi)| \cdot |C_A(\varphi)| = p^{p-1} \cdot p^{p-2} = p^{2p-3}.$$

Это число не зависит от s. В то же время наименьший индекс $(p-1)$-ступенно нильпотентной подгруппы группы P неограниченно растет с ростом s. Отсюда и вытекает справедливость теоремы 3.

4. Конечные p-группы максимального класса. Короткое доказательство того, что ступень нильпотентности коммутанта p-группы максимального класса ограничена функцией от p, использует следующую теорему автора.

ТЕОРЕМА [5, теорема 2]. *Если s-ступенно разрешимая p-группа P допускает автоморфизм φ простого порядка p такой, что*

$$xx^{\varphi}x^{\varphi^2} \cdot \ldots \cdot x^{\varphi^{p-1}} = 1$$

для всех x из P, то группа P нильпотентна ступени $\leqslant (p^s - 1)/(p - 1)$.

Пусть f — такой элемент p-группы максимального класса G, что $|C_G(f)| = p^2$. Тогда $|\{[g, f] \mid g \in G\}| = |G|/|C_G(f)| = |G|/p^2$. Но $G' \supseteq \{[g, f] \mid g \in G\}$ и $|G/G'| = p^2$. Следовательно, $G' = \{[g, f] \mid g \in G\}$. Теперь для любого $a \in G'$ найдется такой элемент b, что $a = b^{-1}b^f$, откуда

$$aa^fa^{f^2} \cdot \ldots \cdot a^{f^{p-1}} = (b^{-1}b^f)(b^{-1}b^f)^f(b^{-1}b^f)^{f^2} \cdot \ldots \cdot (b^{-1}b^f)^{f^{p-1}} = 1.$$

Кроме того, легко понять, что автоморфизм группы G', индуцированный элементом f, имеет порядок p. Ступень разрешимости группы G' ограничена функцией от p по теореме Альперина [7]. Остается применить приведенную выше теорему 2 [5].

5. Замечания. Представляется вероятным, что оценку ступени нильпотентности в формулировке теоремы 1 можно уменьшить на единицу. В то же время возникает следующая интересная гипотеза: если $h(p)$ — наименьшая функция Хигмэна, то оценка ступени нильпотентности в формулировке теоремы 1 не может быть сделана меньше $h(p)$ при любых возможных оценках индекса $f(p, m)$.

В примерах, доказывающих теорему 3, значение m (где p^m — число неподвижных точек автоморфизма) зависит от p. Остается открытым вопрос, можно ли ограничить ступень нильпотентности подгруппы ограниченного индекса некоторой функцией, зависящей только от m. В пользу положительного ответа говорят результаты о p-группах максимального класса [3, 4]. Другие подобные вопросы поставлены также в [13].

Отметим, что недавно Б. А. Панферовым [14] были построены примеры p-групп максимального класса произвольной ступени разрешимости.

Институт математики
СО АН СССР

Поступило
16.04.85

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп).— Изд. 8-е.— Новосибирск, 1982.

[2] Blackburn N. On a special class of p-groups.— Acta Math., 1958, v. 100, p. 45—92.

[3] Leedham-Green C. R., McKay S. On p-groups of maximal class, I.— Quart. J. Math., 1976, v. 27, № 107, p. 297—311.

[4] Shepherd R. Ph. D. Thesis.— University of Chicago, 1971.

[5] Хухро Е. И. Нильпотентность разрешимых групп, допускающих расщепляющий автоморфизм простого порядка.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 1, с. 118—129.

[6] Higman-Green G. Groups and rings which have automorphisms without nontrivial fixed elements.— J. London Math. Soc., 1957, v. 32, p. 321—334.

[7] Alperin J. Automorphisms of solvable groups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1962, v. 13, № 2, p. 175—180.

[8] Hartley B., Maixner T. Periodic groups in which the centralizer of an involution has bounded order.— J. Algebra, 1980, v. 64, N 1, p. 285—291.

[9] Крекнин В. А., Кострикин А. И. Об алгебрах Ли с регулярным автоморфизмом.— Докл. АН СССР, 1963, т. 149, № 2, с. 249—251.

[10] Крекнин В. А. О разрешимости алгебр Ли с регулярным автоморфизмом конечного периода.— Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 3, с. 467—469.

[11] Huppert B., Blackburn N. Finite Groups, II.— Berlin — Heidelberg — N. Y.: Springer, 1982.

[12] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп.— М.: Наука, 1982.

[13] Leedham-Green C. R., Newman M. F. Space groups and groups of prime-power-order.— Arch. Math., 1980, v. 35, № 3, p. 193—202.

[14] Панферов Б. А. О нильпотентных группах с нижними центральными факторами минимальных рангов.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 6, с. 701—706.