

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Бармин, О. Э. Мельник, Моделирование нестационарных процессов при вулканическом извержении сильновязких газонасыщенных магм,

Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 1996, номер 4, 91–98

<https://www.mathnet.ru/vmumm2041>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

18 апреля 2025 г., 10:07:33



УДК 532.529

А. А. Бармин, О. Э. Мельник

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ
ВУЛКАНИЧЕСКОМ ИЗВЕРЖЕНИИ СИЛЬНОВЯЗКИХ
ГАЗОНАСЫЩЕННЫХ МАГМ**

Извержения сильновязких газонасыщенных магм, характерные для вулканов Везувий, Тамбора, Кракатау, Безымянный, Толбачик и ряда других, часто носят катастрофический характер. Их исследование является важным для объяснения механизма перехода извержения в катастрофическую стадию, для выявления группы наиболее опасных вулканов, для прогноза характера протекания конкретных извержений. Представляет интерес рассмотрение процесса с механической точки зрения в силу ряда особенностей магматического расплава как жидкости. Прежде всего, это большой перепад давления, так что по мере подъема магмы из очага извержения структура потока изменяется от гомогенной до газозвеси вследствие выделения газов из расплава. Во-вторых, это аномально большая вязкость, сильно зависящая от концентрации растворенного газа, препятствующая слиянию пузырьков и образованию при этом газовых снарядов, характерных для пароводяных и нефтегазовых смесей. В [1] построена стационарная модель такого процесса. Выделены три зоны течения: гомогенная, пузырьковая и газозвесь, в каждой из которых течение описывается своей системой уравнений, а длины переходных областей считаются пренебрежимо малыми. Решена стационарная краевая задача определения расхода магмы в трехмерном параметрическом пространстве: давление в очаге, глубина его залегания и проводимость канала. Выявлены области неединственности решения, в которых количество различных режимов доходит до пяти и расходы различаются на несколько порядков. Переход от одного режима к другому в рамках стационарной модели осуществляется скачкообразно, при монотонном изменении определяющих параметров и сопровождается коренной перестройкой течения в канале.

В данной работе строится нестационарная модель извержения и исследуется реакция системы на различные возмущения начального стационарного решения.

1. Постановка задачи. В [1] рассматривалось стационарное истечение сильно загазованной магмы из очага, находящегося на заданной глубине H . Очаг связан с поверхностью каналом, стенки которого предполагаются жесткими, так что давление в любой его точке определяется гидродинамикой течения магмы. При подъеме магмы по каналу давление в ней падает от величины порядка нескольких $K\bar{p}$ до атмосферного. Пока давление в поднимающейся магме больше давления насыщения растворенного газа $p_0 = c_0^2/k$ (c_0 — начальная массовая концентрация газа, $k = \text{const}$), в канале движется гомогенная жидкость. Когда давление достигает значения p_0 , начинается нуклеация. Предполагается, что зона нуклеации достаточно короткая, так что при дальнейшем падении давления число пузырьков в единице объема сохраняется и происходит лишь их рост. Вследствие увеличения вязкости магмы из-за отделения газа из расплава и скорости смеси давление в пузырьке изменяется медленнее, чем давление в жидкости. Когда избыточное давление в пузырьке достигнет критического значения, меж-

пузырьковые перегородки разрушатся и высвободится газ, находящийся в пузырьках. В результате дробления пузырьковой жидкости среда переходит в состояние газозвеси. Переходная зона ввиду ее узости [1] рассматривается как разрыв. Будем называть ее волной дробления.

Основываясь на расчетах стационарного решения уравнений [1], обобщим модель на нестационарный случай, учитывая только наиболее существенные процессы. Не будем рассматривать давления, превосходящие давление насыщения, так как наиболее интересные явления происходят при сравнительно малых давлениях в очаге, когда однородная зона отсутствует.

Относительно пузырьковой жидкости будем предполагать, что массообмен между пузырьком и жидкостью происходит равновесно, а течение смеси — изотермическое. В этом случае система (1.3) — (1.7) из [1] примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 V}{\partial x} &= 0; \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 V}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n V}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial \rho V}{\partial t} + \frac{\partial \rho V^2 + E u p_s}{\partial x} &= -(\rho + F_c); \quad p_s = \alpha p_2 + (1 - \alpha) p_1; \\ \frac{\partial a}{\partial t} + V \frac{\partial a}{\partial x} &= C_a \frac{a}{4\mu} (p_2 - p_1); \quad c = c_0 \sqrt{p_2}; \quad \alpha = \alpha_* a^3 n; \\ \rho_1 &= (1 - \alpha)(1 - c); \quad \rho_2 = \delta \rho_2^0 \alpha + (1 - \alpha) c; \quad p_2 = p_2^0; \\ Ar &= \frac{\mu_0 V_0}{\rho_0 g d^2}; \quad Eu = \frac{p_0}{\rho_0 V_0^2}; \quad \delta = \frac{p_0}{\rho_0 R T_0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ_1, ρ_2 — приведенные плотности жидкости и газа; символы с верхним индексом «0» — их истинные значения; V — скорость смеси; α, n — объемная и числовая концентрации пузырьков; c — массовая доля растворенного газа; p_1 и p_2 — давление в пузырьке и жидкости. Система (1) состоит из уравнений неразрывности для компонент смеси, уравнения импульса для смеси в целом с учетом сил тяжести и сопротивления канала F_c , а также уравнения Релея—Ламба без учета инерции жидкости вокруг растущего пузырька.

Так как скорости пузырьков и жидкости равны, из первых трех уравнений можно получить интегралы

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}, \quad \frac{n}{\rho_1} = \frac{n_0}{\rho_{10}}. \quad (2)$$

Поскольку избыточное давление в пузырьке нарастает экспоненциально быстро, пренебрежем вкладом разности давлений в давление смеси p_s , что существенно только в узкой зоне около волны дробления. Уравнение для роста пузырька, таким образом, отщепляется от системы (1) и служит для определения избыточного давления. С учетом соотношений (2) и определения для объемной концентрации пузырьков оно может быть приведено к виду

$$\Delta p = -C_a \frac{4\mu}{a} \frac{\partial a}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \Delta p = p_2 - p_1. \quad (3)$$

Если не интересоваться величиной Δp во всем течении, то (3) служит для определения положения волны дробления (условие $\Delta p = \Delta p_*$). В сделанных выше предположениях система (1) приводится к системе

уравнений изотермической газовой динамики со сложным уравнением состояния.

При написании системы уравнений газозвеси примем следующие упрощающие положения по сравнению со стационарным случаем (1.13) из [1]. Во-первых, температуру частиц считаем постоянной. Это оправдывается большой теплоемкостью и размерами частиц ($\approx 1 \text{ мм} \div 1 \text{ см}$) и подтверждается стационарными расчетами. Во-вторых, пренебрежем изменением температуры газа, так как существует интенсивный теплообмен между газом и частицами. При этом на выходе из канала вулкана, где концентрация частиц мала, а скорость расширения газа значительна, истинная температура газа может уменьшиться на $3 \div 5\%$. Газозвесь считаем монодисперсной.

В этом случае динамика газозвеси описывается уравнениями неразрывности и импульса для каждой из компонент с учетом силы взаимодействия F_{12} и уравнением состояния для газовой фазы. Используя приведенные плотности частиц ρ_1 и газа ρ_2 , запишем систему уравнений газозвеси в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 V_1}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 V_2}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho_1 V_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 V_1^2}{\partial x} &= Eu (F_{12} - \rho_1), \\ \frac{\partial \rho_2 V_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 V_2^2 + Eur}{\partial x} &= -Eu F_{12}, \\ p &= \frac{\rho_2}{\delta (1 - \rho_1)}, \quad F_{12} = C_\mu (\rho_1, \rho_2, Fr_p) \frac{(V_2 - V_1)^2}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

В качестве естественного граничного условия на входе в канал следует задать закон изменения давления в очаге, например, в виде конечной зависимости $p_0 = p_0(t)$ или связи между скоростью изменения давления и количеством вещества в очаге:

$$\frac{dp_0}{dt} = \lambda (Q - Q_0). \quad (5)$$

Здесь Q , Q_0 — расходы магмы, вытекающей из очага и втекающей в него из питающей системы, коэффициент λ , зависящий от многих параметров вулканической системы, таких как: сжимаемость магмы, размеры очага и других, в данной модели будет считаться постоянным.

Если течение дозвуковое, на выходе из канала задается давление, равное атмосферному. В противном случае скорость газа на выходе принимается равной местной скорости звука. Сверхзвуковые режимы не рассматриваются.

Система соотношений на волне дробления для стационарного случая выписана в [1]. В сделанных выше предположениях она приобретает вид

$$\begin{aligned} [\rho]_s S &= [\rho V]_s, \quad [\rho]_g S = [\rho V]_g, \\ [\rho V]_{s+g} S &= [Eur + \rho V^2]_{s+g}, \\ F_{12} &= \rho_1, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = f(\rho, \Delta p_*). \end{aligned} \quad (6)$$

Первые два соотношения — законы сохранения массы для жидкой и газовой фаз (индексы s и g соответственно), третье — закон сохранения импульса для смеси в целом, четвертое — условие псевдооживления частиц на выходе из зоны дробления и пятое — условие начала дробления (разность давлений в пузырьке и жидкости достигает критического значения, следствие (3)). Поскольку движение в пузырьковой жидкости и газовой взвеси дозвуковое, с разрыва уходят четыре характеристики, следовательно, разрыв эволюционен.

2. Разностная схема и численная реализация модели. Построенная модель извержения предъявляет жесткие требования к разностной схеме. Во-первых, наличие двух зон течения с принципиально разными уравнениями не позволяет использовать метод сквозного счета. Во-вторых, положение границы в каждый момент времени заранее неизвестно и находится из расчета всего течения. Кроме того, оно определяется первой производной от скорости, поэтому схема должна быть высокого порядка точности. Вместе с тем расчет на каждом временном слое должен строиться как итерационный процесс с подгонкой положения разрыва. На каждой итерации необходимо рассчитать течение в каждой из зон.

В итоге выбрана следующая разностная схема: в каждой из зон на равномерной сетке по чисто неявной компактной разностной схеме, предложенной в [2], системы (1) и (4) на трехточечном шаблоне записываются относительно приращений переменных. Полученные системы линейных уравнений с блочно-диагональными матрицами решаются методом матричной прогонки. При этом сначала по направлениям от границ к волне определяются коэффициенты прогонки, а затем на четырех точках в окрестности волны по законам сохранения (6) находим значения переменных в соседних от разрыва точках и скорость самого разрыва. По известным параметрам на волне и коэффициентам прогонки определяем значения переменных во всей расчетной области. Далее производится переразбиение сетки с сохранением фиксированного числа точек в каждой из расчетных областей и пересчет полученных значений на новую сетку. Точность расчетов для чисто неявной схемы имеет порядок $[\tau, h^3]$, при этом схема абсолютно устойчива.

Точность расчетов контролируется в норме $\|\delta\| = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \delta y_{ij}^2$, где δy — приращение величины y на каждой итерации, k — порядок системы уравнений, n — число расчетных ячеек. Также проверяется точность выполнения законов сохранения на волне дробления. Итерации заканчивались, когда $\|\delta\| < 10^{-12}$, при этом достигается точность выполнения законов сохранения порядка $10^{-7} \div 10^{-10}$.

3. Расчеты нестационарных процессов при вулканическом извержении. В качестве начальных условий во всех расчетах используется стационарное решение. Начальная скорость волны равна нулю. Исследовались различные законы изменения давления в очаге.

Пусть в момент $t=0$ давление в очаге p_0 изменяется мгновенно на величину Δp и затем остается постоянным. В реальной ситуации к такому скачку давления могут приводить сейсмические движения стенок очага. При неизменных граничных условиях устанавливается новое стационарное решение.

На рис. 1 приведены графики зависимости скорости волны и расхода магмы на входе в канал вулкана и на выходе из него (жирная кривая) для $\Delta p=0,02$. Выход на новый стационарный режим сопровождается интенсивным колебательным движением волны за счет инер-

ционности системы. Скачок расхода на волне пропорционален ее скорости, поэтому изменение скорости волны приводит к аналогичному по форме изменению расхода. Это возмущение сносится вниз по потоку, вызывая мощные колебания расхода на выходе.

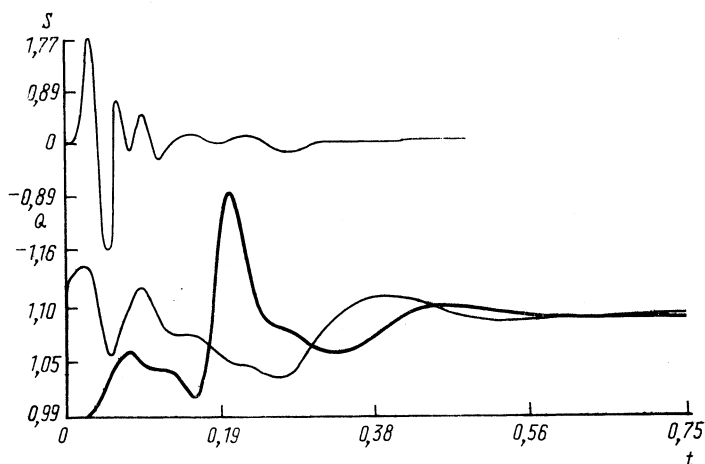


Рис. 1. Скорость волны и расход магмы на входе в канал и в жерле

Рассмотрим процессы, протекающие при этом в канале вулкана. На рис. 2—5 изображены зависимости расхода смеси от вертикальной координаты в различные моменты времени. На начальном этапе (рис. 2) возмущение распространяется по пузырьковой жидкости, скорость волны — нулевая, параметры газозвеси не меняются. Посколь-

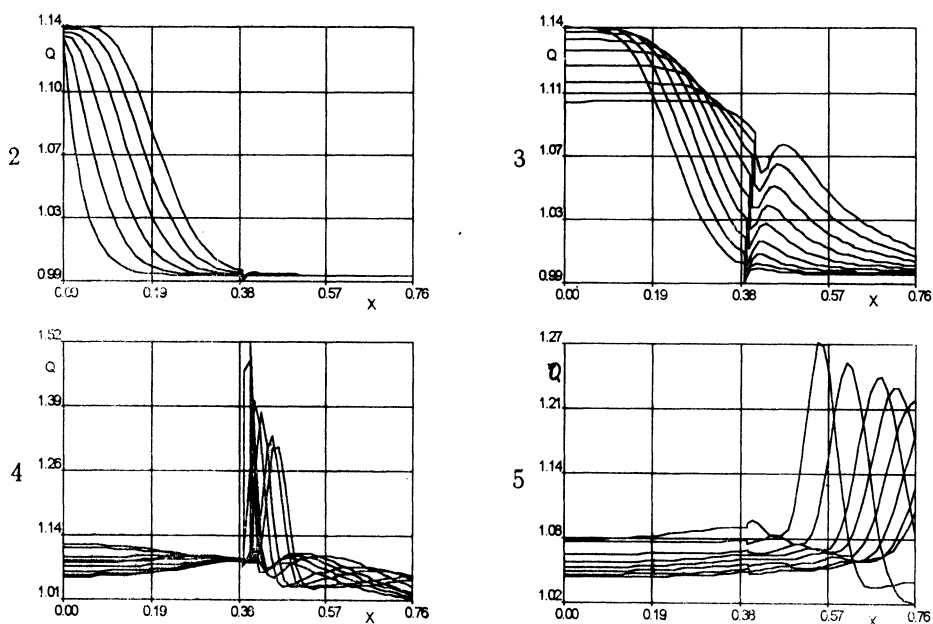


Рис. 2—5. Зависимость расхода смеси от вертикальной координаты в различные моменты времени

ку течение дозвуковое, передний фронт движется со скоростью звука, превосходящей скорость смеси; возмущенная область растягивается.

Возмущения, подхоя к волне (рис. 3), начинают двигаться и в сторону газозвеси (в положительном направлении x). При этом длина пузырьковой зоны возрастает, сила сопротивления и вес смеси увеличиваются. Для компенсации фиксированного перепада давления расход, а следовательно, и сила сопротивления падают. Скорость волны начинает уменьшаться и по инерции проходит свое положение равновесия и движется в сторону пузырьковой зоны (рис. 4). При торможении волны возмущение расхода, постепенно размываясь, сносится вниз по потоку (рис. 5). Дойдя до среза канала, оно вызывает колебания расхода и, отражаясь от него, влияет на всю картину течения. В результате серии колебаний с уменьшающейся амплитудой система приходит к состоянию равновесия.

Полученное методом установления решение сравнивалось со стационарным, рассчитанным методом Рунге—Кутты. Достигнутое совпадение по расходу смеси — $2 \cdot 10^{-3}$, а по положению волны дробления — 10^{-4} . Характерный безразмерный период колебаний расхода на выходе имеет порядок 0.1 или составляет $10^2 \div 10^3$ с для набора определяющих параметров, соответствующих Толбачинскому извержению [3]. Подобная реакция на скачкообразное изменение давления в очаге может дать объяснение колебаниям расхода магмы, наблюдаемым на извержениях [4].

Для выяснения характерных времен реакции вулканической системы на приложенные возмущения рассмотрим граничное условие $p_0 = p_{00}(1 + \delta p \sin(2\pi t/T))$. Расчеты проводились для $\delta p = 0,025$ и трех значений периода колебаний $T = 0,1; 0,025; 0,01$. На рис. 6, 7 приведены графики зависимости положения волны и расходов магмы на вы-

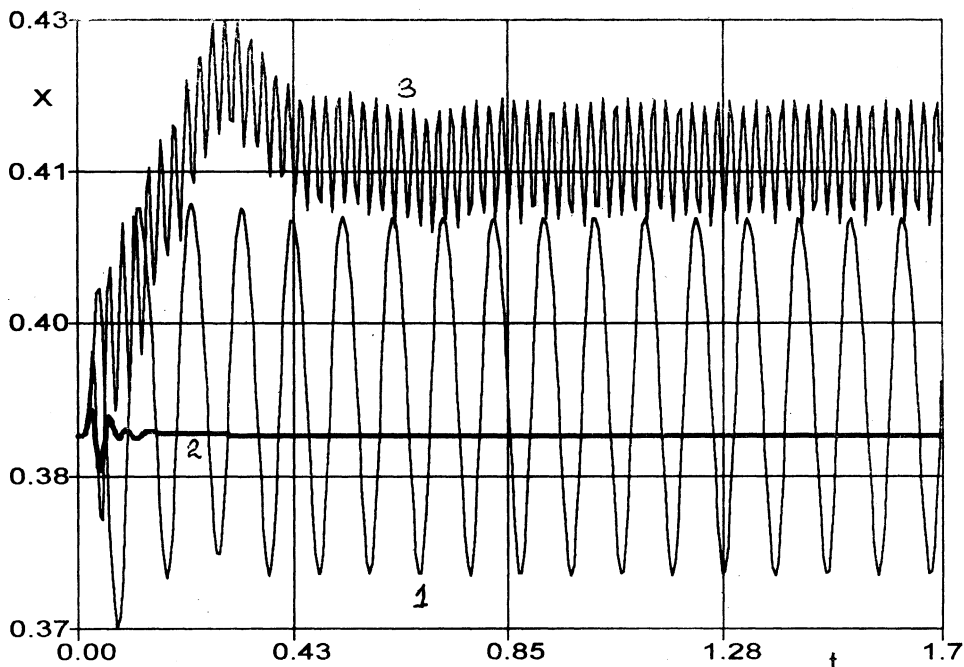


Рис. 6. Зависимость положения волны дробления от времени при синусоидальном изменении давления в очаге

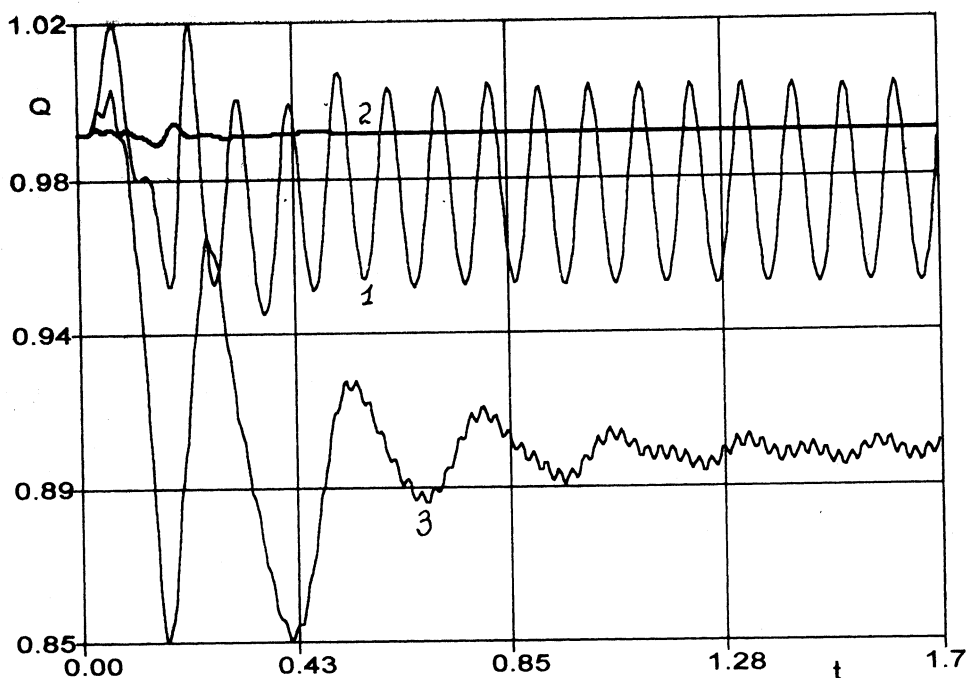


Рис. 7. Зависимость расхода магмы в жерле от времени

ходе из канала от времени. Для $T=0,1$ (кривая 1) система за время порядка периода колебаний выходит на квазистационарный режим, величины в любом сечении канала изменяются по синусоидальному закону. Следовательно, если характерные времена процесса больше 0,1, вулканические явления протекают квазистационарно и могут быть описаны стационарной моделью. При $T=0,01$ (кривая 2) частота возмущения настолько велика, что чередующиеся волны сжатия и разрежения взаимно гасятся и не распространяются в глубь пузырьковой жидкости. Параметры потока вдали от очага остаются такими же, как в стационарном случае. Более сложная картина течения возникает при промежуточном значении периода ($T=0,025$, кривая 3). В процессе установления волна отходит от состояния равновесия, совершая синусоидальные колебания с частотой вынуждающей силы. Средняя длина пузырьковой зоны возрастает, что вызывает увеличение интегрального веса смеси и силы сопротивления, поэтому расход магмы падает. После серии колебаний расход на выходе становится практически постоянным, как и в случае малых T .

Таким образом, причиной высокочастотных колебаний расхода («вулканического дрожания») не могут быть процессы, происходящие далеко от поверхности земли.

Рассмотрим теперь эволюцию извержения при изменении давления в очаге по закону (6). Считаем, что очаг во время извержения изолирован от питающей системы $Q_0=0$. Эволюция стационарного решения показана на рис. 8: расход магмы на входе и выходе из канала (кривые 1, 2) и длина пузырьковой зоны, увеличенная в 2,5 раза (кривая 3). При падении давления в очаге расход вначале уменьшается (участок АВ), а длина пузырьковой зоны увеличивается, так как избыточное давление в пузырьке нарастает медленнее. В то же время в

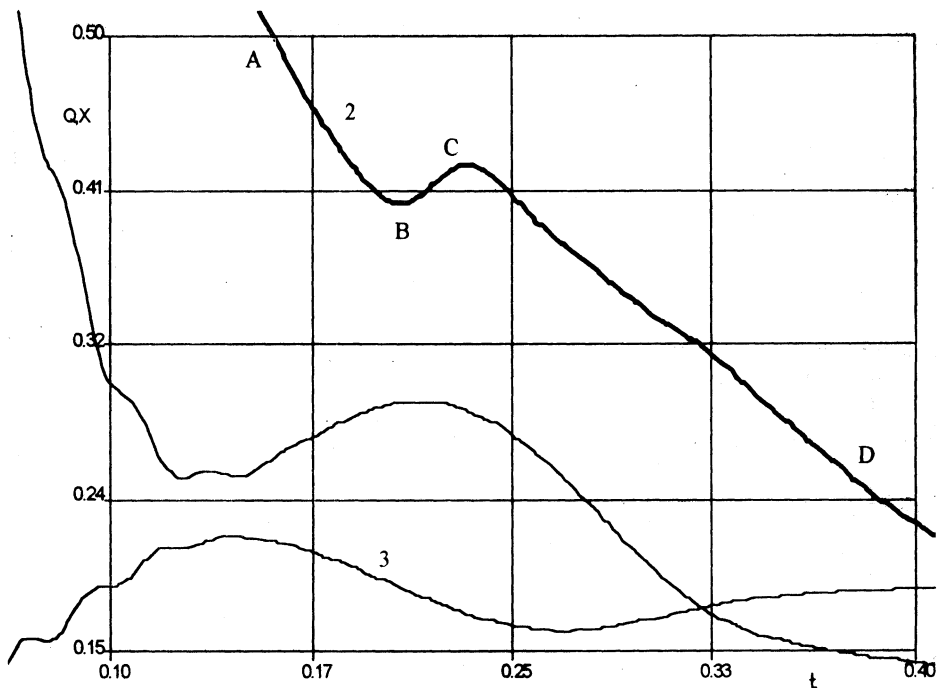


Рис. 8. Зависимость расхода магмы и длины пузырьковой зоны от времени при падении давления в очаге по закону (5)

канал вытекает магма с меньшим количеством растворенного газа, а следовательно, более вязкая и менее плотная. При некотором p_0 это приводит к увеличению степени неравновесности роста пузырька, длина пузырьковой зоны уменьшается, а с нею средний вес смеси и интегральная сила сопротивления канала вулкана. Расход смеси начинает возрастать, несмотря на уменьшение перепада давлений (участок *BC*). При дальнейшем падении давления процессы уравниваются, расход, достигнув максимума, опять падает (участок *CD*). Такая зависимость расхода от давления в очаге подтверждает вывод [1] о возможном усилении извержения при частичном опустошении очага.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 93-013-17622).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бармин А. А., Мельник О. Э. Об особенностях динамики извержения сильновязких газонасыщенных магм // Изв. АН СССР. Сер. Механ. жидкости и газа. 1993. № 2. 49—60.
2. Толстых А. И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах газовой динамики. М., 1990.
3. Слезин Ю. Б. Динамика дисперсионного режима вулканического извержения, 2: Условие неустойчивости расхода и природа катастрофических эксплозивных извержений // Вулканол. и Сейсмол. 1984. № 1. 9—17.
4. Большое трещинное Толбачинское извержение (1975—1976 гг., Камчатка) / Под редакцией С. А. Федотова. М., 1984.

Поступила в редакцию
28.10.94