Алгебра и анализ
Том 12 (2000), вып. 5

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА БЕСКОНЕЧНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЕ И ЯДРО УИТТЕКЕРА

© А. М. Бородин

§0. Введение

Центральной темой некоммутативного гармонического анализа является разложение естественных унитарных представлений T на элементарные (т.е. на неприводимые или на фактор-) представления. Если представление T имеет при этом выделенный циклический вектор, то разложение задается некоторой мерой, которая называется спектральной мерой. Например, одним из достижений классической теории представлений является явное вычисление Гиндикиным и Карпелевичем спектральной меры для естественного (регулярного) представления в пространстве квадратично-суммируемых функций на произвольном римановом симметрическом пространстве.

Простейший пример группы, у которой элементарные представления зависят от бесконечного числа непрерывных параметров,[1] — это бесконечная симметрическая группа $S(\infty)$, состоящая из финитных перестановок натуральных чисел. Для такой группы спектральная мера может иметь бесконечномерный носитель — явление, которое не возникало в классической теории представлений.

Более того, регулярное представление бесконечной симметрической группы (см. определение ниже) неприводимо. Таким образом, ситуация сильно отличается от классической — разложение регулярного представления конечных и компактных групп на неприводимые играет центральную роль в теории представлений этих групп.

В работе [KOV] было построено семейство обобщенных регулярных представлений $T = T_z$ группы $S(\infty)$, зависящих от одного комплексного параметра z. Эти представления действуют в некоторых L^2-пространствах на компактификации группы $S(\infty)$ и представляют собой деформацию регулярного представления: при $z \to \infty$ они сходятся к регулярному представлению. Основным результатом настоящей работы является полное описание спектральных мер

При поддержке Российской программы поддержки научных школ, грант 96-15-96060.

[1] Такие группы называются „большими“ (термин принадлежит А. М. Вершику).

для обобщенных регулярных представлений. Спектральные меры определены на некотором бесконечномерном симплексе (который может рассматриваться как дуальный объект для группы $S(\infty)$), и их описание будет дано в терминах некоторых случайных точечных процессов на прямой, ассоциированных с этими мерами.

Это третья работа в серии статей Г. И. Ольшанского и автора о гармоническом анализе обобщенных регулярных представлений и родственных задачах. Предварительно наши результаты были опубликованы в препринтах [P.I–P.V].

В первой работе серии [BO1] мы даем краткий обзор результатов [P.I–P.V]. Вторая работа [B1] покрывает часть [P.II], в которой содержится некоторый общий формализм, позволяющий работать с мерами на бесконечномерном симплексе (см. теорему 1.1). Настоящая работа покрывает [P.IV] и другую часть [P.II]. Мы надеемся опубликовать еще одну работу с дальнейшим развитием и приложениями результатов этой статьи, которые частично содержатся в [P.III, P.V].

Хотелось бы подчеркнуть, что часть наших результатов еще не вошла в журнальные публикации, и интересующемуся читателю может быть полезно взглянуть на препринты [P.I–P.V].

Пусть $S(n)$ — симметрическая группа степени n, $S(\infty) = \bigcup_{n\geqslant 1} S(n)$ — бесконечная симметрическая группа, состоящая из финитных перестановок натуральных чисел. Введем обозначения

$$G = S(\infty) \times S(\infty),$$
$$K = \operatorname{diag} S(\infty) = \{(g,g) \in G \mid g \in S(\infty)\} \subset G.$$

Пара (G, K) является парой Гельфанда [Ол]. Несложно показать, что регулярное представление T_{reg} группы G в пространстве $\ell^2(S(\infty))$, заданное формулой

$$(T_{\mathrm{reg}}(g,h)f)(x) = f(g^{-1}xh),$$

неприводимо (это следует из того, что все классы сопряженности группы $S(\infty)$, не содержащие единицу, бесконечны).

В описании конструкции обобщенных регулярных представлений мы следуем работе [KOV].

Предложение [KOV, теорема 1.1]. *Существует единственное отображение $p_n : S(n) \to S(n-1)$, коммутирующее с двусторонним действием группы $S(n-1)$ на $S(n)$ и $S(n-1)$.*

Отображения p_n называются *каноническими проекциями*. Определим проективный предел $X = \operatorname{proj\,lim} S(n)$ относительно этих проекций. Это компактное топологическое пространство, содержащее $S(\infty)$ как всюду плотное подмножество. Элементы пространства X называются *виртуальными перестановками*.

Действие группы $G = S(\infty) \times S(\infty)$ на $S(\infty)$ может быть продолжено до непрерывного действия группы G на пространстве X виртуальных перестановок.

Для всякого $t > 0$ обозначим через μ_t^n вероятностную меру на $S(n)$ такую, что $\mu_t^n(\{x\}) = t^{[x]}/(t)_n$, где через $[x]$ обозначено число циклов перестановки $x \in S(n)$, а $(t)_n = t(t+1)\dots(t+n-1)$ — символ Похгаммера. При $t = 1$ эта мера совпадает с равномерной вероятностной мерой на $S(n)$.

Предложение [KOV, теорема 1.3]. *Зафиксируем $t > 0$. Тогда $p_n(\mu_t^n) = \mu_t^{n-1}$ для всех $n = 1, 2, \dots$ Таким образом, существует вероятностная мера $\mu_t = \operatorname{proj\,lim} \mu_t^n$ на X. Мера μ_t является K-инвариантной и G-квазиинвариантной.*

Можно показать, что меры μ_t, $t > 0$, попарно дизъюнктны [KOV, теорема 1.4].

Действие группы G на X обладает замечательным аддитивным 1-коциклом $c : X \times G \to \mathbb{Z}$, который определяется равенством $c(x, g) = [p_n(xg)] - [p_n(x)]$, где n настолько велико, что $g \in G(n)$. Имеет место равенство

$$\mu_t(d(xg)) = t^{c(x,g)} \mu_t(dx), \quad t > 0, \ x \in X, \ g \in G. \tag{0.1}$$

Возьмем $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такое, что $t = |z|^2$. Благодаря (0.1) мы можем определить унитарное представление T_z группы G в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2(X, \mu_t)$ формулой

$$(T_z(g)f)(x) = f(xg) z^{c(x,g)}, \quad x \in X, \ g \in G, \ f \in \mathcal{H}. \tag{0.2}$$

Определенные таким образом *обобщенные регулярные представления* T_z имеют предел при $z \to 0$ и $z \to \infty$; при $z \to \infty$ представления T_z стремятся к регулярному представлению T_{reg}.

Обозначим через Ψ выпуклое множество всех положительно-определенных K-инвариантных функций на группе G, равных 1 в единице группы. Крайние точки множества Ψ называются *экстремальными сферическими функциями* пары (G, K). Они находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с (нормированными экстремальными) характерами группы $S(\infty)$ [Ол], которые, в свою очередь, параметризуются *симплексом Тóма* Ω, состоящим из троек $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$, где

$$\alpha = (\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant 0), \quad \beta = (\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \dots \geqslant 0), \quad \gamma \geqslant 0,$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i + \gamma = 1$$

[T, BK]. Для каждой точки $\omega \in \Omega$ мы будем обозначать через $\psi_\omega \in \Psi$ соответствующую экстремальную сферическую функцию и через $T(\omega)$ — циклическое

унитарное представление группы G, порожденное функцией ψ_ω. Представления $T(\omega)$ — это в точности все неприводимые сферические унитарные представления пары Гельфанда (G, K). Каждая функция $\psi \in \Psi$ единственным образом записывается в виде

$$\int\limits_{\omega\in\Omega} \psi_\omega m(d\omega),$$

где m — вероятностная мера на Ω, называемая *спектральной мерой для* ψ. Эта мера также описывает разложение циклического унитарного представления, порожденного функцией ψ, в прямой интеграл неприводимых представлений $T(\omega)$.

Заметим, что в пространстве $\mathcal{H}$ представления T_z есть выделенный K-инвариантный вектор $f_0 \equiv 1$. Можно показать, что этот вектор является циклическим, если и только если $z \notin \mathbb{Z}$ [KOV, теоремы 3.2, 5.2].

Для целых z явное разложение представлений T_z на неприводимые было получено в [KOV]. Разложение для нецелых z является более сложной задачей. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Согласно сказанному выше, для нецелых z разложение T_z на неприводимые задается некоторой вероятностной мерой на симплексе Тома, которую мы будем обозначать через m_z.

Предложение [KOV, теорема 5.4]. *Спектральные меры m_z сосредоточены на грани*

$$\Omega_0 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \Omega \mid \gamma = 0\}$$

симплекса Тома.

Оказывается, что удобнее описывать не сами меры m_z, а некоторую их модификацию. А именно мы будем описывать меры m'_z на пространстве

$$\Omega' = \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

заданные формулой

$$m'_z = m_z \otimes \frac{s^{t-1}}{\Gamma(t)} e^{-s} ds,$$

где s — параметр на полуоси $\mathbb{R}_+$, $t = |z|^2$.

Поставим в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega'$ локально-конечную точечную конфигурацию в $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ следующим образом:

$$((\alpha, \beta, \gamma), s) \mapsto (s\alpha_1, s\alpha_2, \dots, -s\beta_1, -s\beta_2, \dots),$$

где мы опускаем все нули в последовательностях α, β. Тогда мера m'_z может рассматриваться как мера на пространстве точечных конфигураций или,

согласно традиционной терминологии, как точечный случайный процесс. Мы будем обозначать этот точечный процесс через $\mathcal{P}'_z$.

Аналогично можно определить случайный точечный процесс $\mathcal{P}_z$, отвечающий мере m_z, — соответствие между точками $\omega \in \Omega$ и точечными конфигурациями имеет вид

$$(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \dots, -\beta_1, -\beta_2, \dots).$$

Переход от $\mathcal{P}_z$ к $\mathcal{P}'_z$ есть просто умножение всех точек конфигурации на случайный независимый масштабный множитель, имеюший гамма-распределение с параметром $t = |z|^2$. Переход от $\mathcal{P}'_z$ к $\mathcal{P}_z$ благодаря последнему предложению тоже весьма прост — надо разделить все координаты точек случайной конфигурации на сумму их модулей.

Один из способов описания точечных случайных процессов — вычисление их *корреляционных функций* $\rho_n(x_1, \dots, x_n)$, где $n = 1, 2, \dots$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^*$. Грубо говоря, $\rho_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$ есть вероятность найти точку случайной конфигурации в каждом из инфинитезимальных интервалов $[x_1, x_1 + dx_1]$, ..., $[x_n, x_n + dx_n]$.

Можно показать, что процессы $\mathcal{P}_z$ и $\mathcal{P}'_z$ однозначно определяются своими корреляционными функциями, которые мы будем обозначать через $r_n^{(z)}$ и $\rho_n^{(z)}$ соответственно [P.I].

Функции $r_n^{(z)}$ и $\rho_n^{(z)}$ связаны (обратимым) интегральным преобразованием типа преобразования Лапласа:

$$\rho_n^{(z)}(x_1, \dots, x_n) = \int_0^\infty \frac{s^{t-1} e^{-s}}{\Gamma(t)} r_n^{(z)}(x_1 s^{-1}, \dots, x_n s^{-1}) \frac{ds}{s^n}. \tag{0.3}$$

Нашим основным результатом является следующее утверждение. Его доказательство содержится в препринтах [P.II, теорема 3.3.4], [P.IV, теорема 2.7]. Результат был также анонсирован в [BO1, теорема III].

Теорема А. *Для всякого $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ корреляционные функции процесса $\mathcal{P}'_z$ имеют вид*

$$\rho_n^{(z)}(x_1, \dots, x_n) = \det[\mathcal{K}(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n,$$

где ядро $\mathcal{K}(x, y)$ на $\mathbb{R}^*$ задается формулами

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(z')} \frac{A_+(x)B_+(y) - B_+(x)A_+(y)}{x - y},$$

$$\mathcal{K}(x, -y) = \frac{\sqrt{\sin \pi z \sin \pi z'}}{\pi} \frac{A_+(x)A_-(y) + t\, B_+(x)B_-(y)}{x + y},$$

$$\mathcal{K}(-x, y) = -\frac{\sqrt{\sin \pi z \sin \pi z'}}{\pi} \frac{A_+(y)A_-(x) + t\, B_+(y)B_-(x)}{x + y},$$

$$\mathcal{K}(-x, -y) = \frac{1}{\Gamma(-z)\Gamma(-z')} \frac{A_-(x)B_-(y) - B_-(x)A_-(y)}{x - y}$$

для $x, y > 0$. *Здесь*

$$A_+(x) = x^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{z+z'+1}{2}, \frac{z-z'}{2}}(x),$$
$$B_+(x) = x^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{z+z'-1}{2}, \frac{z-z'}{2}}(x),$$
$$A_-(x) = x^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{-z-z'+1}{2}, \frac{z-z'}{2}}(x),$$
$$B_-(x) = x^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{-z-z'-1}{2}, \frac{z-z'}{2}}(x),$$

$W_{\varkappa,\mu}(x)$ *есть функция Уиттекера,* $z' = \bar{z}$, $t = zz'$.

Ядро $\mathcal{K}(x, y)$ мы называем *ядром Уиттекера.*

Приложения теоремы А и спектральный анализ ядра Уиттекера можно найти в работах [BO1, P.III, P.V].

Корреляционные функции $r_n^{(z)}$ тоже могут быть вычислены явно, однако результат получается значительно более громоздким [P.II]. Они могут быть выражены через многомерную гипергеометрическую функцию Лауричелла типа B [P.II, §2.4]. Чтобы дать читателю возможность оценить сложность формул, мы сформулируем следующий результат.

Предложение [P.II, теорема 2.2.1; BO1, теорема II]. *Пусть* $x_1, \dots, x_n > 0$, $|\Re z| < 1$. *Тогда*

$$\begin{aligned} r_n^{(z)}(x_1, \dots, x_n) &= t^n \Gamma(t) \\ &\times \int\limits_{\substack{a_i, b_i > 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i(a_i+b_i+1) < 1}} \prod_{i=1}^n \frac{a_i^{-z}}{\Gamma(-z+1)} \frac{(a_i+1)^{z'}}{\Gamma(z'+1)} \frac{b_i^{-z'}}{\Gamma(-z'+1)} \frac{(b_i+1)^z}{\Gamma(z+1)} \\ &\times \det\left(\frac{1}{a_i+b_j+1}\right) \frac{(1-\sum_{i=1}^n x_i(a_i+b_i+1))^{t-n-1}}{\Gamma(t-n)} \, da\, db, \end{aligned}$$

где $z' = \bar{z}$, $t = zz'$.

Для значений z с $|\Re z| \geqslant 1$ функции $r_n^{(z)}$ получаются аналитическим продолжением по параметрам z и $z' = \bar{z}$, которые для этой цели следует считать независимыми.

Первая корреляционная функция была посчитана ранее в [P.I].

Случайные точечные процессы с детерминантными корреляционными функциями (как в теореме А выше) называются *детерминантными точечными процессами.* Основным источником таких процессов служит теория случайных матриц [Me]. Первые примеры детерминантных точечных процессов появились в 60-х годах [Dy,L]. Как отдельный класс эти процессы были впервые выделены в работах [Mac1,Mac2], где использовалось название *fermion point processes*

[DVJ]. Работа [C] содержит обширный обзор по детерминантным случайным процессам с эрмитовыми ядрами. Общая аксиоматика для процессов с не эрмитовыми, а *J-эрмитовыми*[2] ядрами содержится в [P.V, §1; BO2, §2; BOO, Appendix]. Отметим, что ядро Уиттекера является J-эрмитовым (см. замечание 4.10 ниже).

Теорема A была хронологически первым результатом, связавшим теорию представлений бесконечной симметрической группы с детерминантными точечными процессами. Позднее Г. И. Ольшанским и автором был найден другой, аппроксимативный, подход к доказательству теоремы A. Этот подход частично изложен в работе [BO2]. Ключевое соображение состоит в том, что некоторая смесь сужений обобщенных регулярных представлений на конечные симметрические группы порождает детерминантный точечный процесс на одномерной решетке. Корреляционное ядро для этого процесса выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса, и ядро Уиттекера может быть получено из этого ядра с помощью подходящего предельного перехода [BO2, §5; BO3].

Следом за этим в совместной работе с Г. И. Ольшанским и А. Ю. Окуньковым мы применили тот же подход к *мерам Планшереля* на симметрических группах (мера Планшереля определяется формулой (0.7) ниже). В числе прочего это позволило нам доказать гипотезу Байка—Дейфта—Йоханссона [BDJ1, BDJ2] о том, что асимптотическое поведение подходящим образом нормированных длин первых строк случайных диаграмм Юнга с n клетками, распределенных по мере Планшереля, совпадает с асимптотическим поведением нормированных максимальных собственных значений случайных эрмитовых матриц размером $n \times n$ с гауссовой мерой[3] при $n \to \infty$. (Для индивидуальных распределений первой и второй строк гипотеза была доказана в работах [BDJ1, BDJ2]). Два других доказательства этой гипотезы содержатся в [J, Ok1].

Дальнейшее, совсем недавнее развитие сюжета привело к интересным связям с теорией тёплицевых определителей [BOk] (см. также [BW]), пространством полубесконечных форм [Ok2], теорией представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ [Ok3] (см. также замечание после формулы (0.7) ниже), задачей Римана—Гильберта [B2].

Для доказательства теоремы A будет развит некоторый формализм, который мы описываем ниже.

Удобный метод изучения сферических функций $\psi \in \Psi$ состоит в разложении сужений $\psi \mid G(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, по экстремальным сферическим функциям конечных пар Гельфанда $(G(n), K(n)) = (S(n) \times S(n), \operatorname{diag} S(n))$, которые по сути являются неприводимыми нормированными характерами симметрических групп $S(n)$.

---

[2] Здесь $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

[3] Предельное распределение для максимальных собственных значений случайных эрмитовых матриц было вычислено в работе [TW].

Обозначим через $\mathbb{Y}$ множество всех диаграмм Юнга и положим $\mathbb{Y}_n = \{\lambda \in \mathbb{Y} : |\lambda| = n\}$, где $|\lambda|$ обозначает количество клеток диаграммы λ. Обозначим через χ^λ неприводимый характер симметрической группы $S(n)$, соответствующий диаграмме $\lambda \in \mathbb{Y}_n$, и через $\dim\lambda$ — его размерность. Сопоставим каждой функции $\psi \in \Psi$ *распределение на графе Юнга* $\mathbb{Y}$. По определению это такая функция $M : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}_+$, что

$$\psi|_{(S(n)\times\{e\})} = \sum_{\lambda\in\mathbb{Y}_n} M(\lambda)(\chi^\lambda/\dim\lambda), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{0.4}$$

Условие согласованности сужений ψ на разные конечные симметрические группы имеет вид

$$M(\lambda) = \sum_{\mu\searrow\lambda} \frac{\dim\lambda}{\dim\mu} M(\mu), \tag{0.5}$$

где $\lambda \in \mathbb{Y}_n$, $\mu \in \mathbb{Y}_{n+1}$ и символ $\mu \searrow \lambda$ означает, что μ отличается от λ добавлением одной клетки.

Из (0.5) следует, что $M^{(n)} := M|\mathbb{Y}_n$ есть вероятностная мера на $\mathbb{Y}_n$. Таким образом, M можно рассматривать как систему согласованных вероятностных распределений $\{M^{(n)}\}$ на конечных множествах $\mathbb{Y}_n$.

Вся информация о функции ψ неявным образом содержится в M. В частности, спектральная мера m может быть получена как предел мер $M^{(n)}$, если аппроксимировать симплекс Тома Ω множествами $\mathbb{Y}_n$, используя модифицированные координаты Фробениуса диаграмм Юнга [KOO].

Для обобщенных регулярных представлений распределение $M(\lambda)$ может быть явно вычислено. Мы будем его обозначать через $M_z(\lambda)$.

Предложение (см. [KOV, теорема 3.1]). *Пусть* $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $t = |z|^2$, $\lambda \in \mathbb{Y}$, $n = |\lambda|$. *Тогда*

$$M_z(\lambda) = ((t)_n)^{-1} \prod_{(ij)\in\lambda} (z + j - i)(\bar{z} + j - i) \cdot \dim^2\lambda/n!. \tag{0.6}$$

При $z \to \infty$ распределения M_z стремятся к *распределению Планшереля*

$$M_\infty(\lambda) = \frac{\dim^2\lambda}{|\lambda|!}. \tag{0.7}$$

Легко видеть, что условие согласованности (0.5) для распределений M_z является полиномиальным условием по z и $z' = \bar{z}$. Это означает, что выражение (0.6) удовлетворяет условию (0.5) для любых комплексных значений z и z' (z' теперь рассматривается как независимый параметр!). Если мы потребуем, чтобы значения $M(\lambda)$ были строго положительны для всех λ, то у нас останется две возможности: либо $z' = \bar{z}$, как раньше, либо z и z' вещественны, и $m < z, z' < m + 1$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Любой паре (z, z'), удовлетворяющей

одному из этих двух условий, соответствует сферическое представление $T_{zz'}$ пары Гельфанда (G, K). Представления с $z' = \bar{z}$ — это обобщенные регулярные представления, которые обсуждались выше. Мы называем эти представления *основной серией*. Представления с $m < z, z' < m + 1$ образуют *дополнительную серию*. Все результаты этой работы, включая теорему А, равно как и результаты из [BO1, P.I–P.V], верны для представлений из обеих серий.[4] Все доказательства остаются неизменными. Имеется также *дискретная серия*, состоящая из вырожденных представлений, которые возникают, если один из параметров z, z' является целым числом, см. подробную версию [KOV].

К сожалению, у нас нет красивой геометрической конструкции для представлений дополнительной серии. Именно поэтому мы построили изложения материала во введении на основной серии.

Терминология „основная/дополнительная серия" была введена, исходя из определенной аналогии с теорией представлений $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Недавно А. Ю. Окуньков в [Ok3, 3.2.2] материализовал эту аналогию.

Вернемся к общей ситуации. Оказывается, значения $M(\lambda)$ могут также рассматриваться как „моменты" спектральной меры m в следующем смысле.

Определим морфизм алгебры Λ симметрических функций (ее определение см. в [Ma]) в алгебру $C(\Omega)$ непрерывных функций на Ω. Поскольку $\Lambda = \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots]$, где $p_k = \sum_i x_i^k$ — это суммы Ньютона, достаточно указать образы всех p_k. Положим их равными

$$\tilde{p}_k(\omega) = \begin{cases} 1, & k = 1, \\ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^k - \sum_{i=1}^{\infty} (-\beta_i)^k, & k \geqslant 2. \end{cases}$$

Образы функций Шура s_λ [Ma] при этом морфизме называются *расширенными функциями Шура* и обозначаются $\tilde{s}_\lambda$ [BK]. Эти функции неотрицательны [BK, KOO].

Для всех разбиений λ имеет место равенство [BK, KOO],

$$\frac{M(\lambda)}{\dim \lambda} = \int_{\Omega} \tilde{s}_\lambda(\omega)\, m(d\omega).$$

Для рассмотрения мер m'_z нам понадобится немного более общая ситуация.

Обозначим через $\widetilde{\Omega}$ множество троек $\omega = (\alpha, \beta; \tau)$, где $\alpha = (\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant 0)$, $\beta = (\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots \geqslant 0)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$ и $\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i + \beta_i) \leqslant \tau$. Мы снабжаем $\widetilde{\Omega}$ слабейшей топологией, в которой α_i, β_i и τ являются непрерывными функциями. В этой топологии $\widetilde{\Omega}$ локально-компактно. Заметим, что $\widetilde{\Omega}$ гомеоморфно

[4] Мы часто используем обозначение z' для $\bar{z}$ в формулировке результатов именно по этой причине.

$\Omega' = \Omega \times \mathbb{R}_+$ по модулю отождествления множества $\Omega \times \{0\}$ с одной точкой $(0,0,0) \in \widetilde{\Omega}$; соответствующее отображение имеет вид

$$((\alpha,\beta),\tau) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \mapsto (\tau\alpha, \tau\beta, \tau) \in \widetilde{\Omega}.$$

Определим вложение алгебры Λ симметрических функций в алгебру $C(\widetilde{\Omega})$ непрерывных функций на $\widetilde{\Omega}$. Достаточно указать образы всех p_k. Положим их равными

$$\tilde{p}_k(\omega) = \begin{cases} \tau, & k = 1, \\ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^k - \sum_{i=1}^{\infty} (-\beta_i)^k, & k \geqslant 2. \end{cases}$$

Образы функций Шура s_λ при этом вложении мы также будем называть расширенными функциями Шура и обозначать $\tilde{s}_\lambda$.

Пусть P — борелевская вероятностная мера на $\widetilde{\Omega}$, удовлетворяющая некоторым условиям, сформулированным в §1. Поскольку $\widetilde{\Omega}$ почти гомеоморфно Ω', мы можем определить точечный случайный процесс $\mathcal{P}'$ на $\mathbb{R}^*$, ассоциированный с мерой P, как мы это делали для мер m'_z (точные определения см. в §1). Штрих в обозначении $\mathcal{P}'$ отвечает тому обстоятельству, что позднее мы будем рассматривать специальный случай $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_z$. Положим

$$\phi(\lambda) = \int_{\widetilde{\Omega}} \tilde{s}_\lambda(\omega)\, P(d\omega). \tag{0.8}$$

Оказывается, можно вычислить корреляционные функции процесса $\mathcal{P}'$, исходя из интегралов (0.8), через решение некоторых конечномерных проблем моментов. Это — основной результат работы [Б1], мы дадим его точную формулировку в §1.

Далее, если интегралы (0.8) имеют детерминантный вид, см. ниже, то и корреляционные функции принимают детерминантный вид.

Нам будет удобно использовать координаты Фробениуса для обозначения диаграмм Юнга [Ма]. Для диаграммы Юнга λ мы будем писать $\lambda = (p_1, \dots, p_d \mid q_1, \dots, q_d)$, где $p_i = \lambda_i - i$ есть количество клеток в i-й строке диаграммы λ справа от диагонали; $q_i = \lambda'_i - i$ есть количество клеток в i-м столбце диаграммы λ ниже диагонали (λ' обозначает транспонированную диаграмму); d есть количество диагональных клеток.

Теорема Б. *Во введенных выше обозначениях предположим, что для всех диаграмм Юнга* $\lambda = (p_1, \dots, p_d \mid q_1, \dots, q_d)$

$$\phi((p_1, \dots, p_d \mid q_1, \dots, q_d)) = \det[\phi((p_i|q_j))]_{i,j=1}^d,$$

и пусть существует обобщенная функция $N(r,s)$ *с носителем* $\operatorname{supp} N \subset \{(r,s) \in \mathbb{R}^2 \mid r \geqslant 0,\ s \leqslant 0\}$ *и моментами*

$$\langle N(r,-s), r^p s^q \rangle = \phi((p|q)).$$

Тогда корреляционные функции процесса $\mathcal{P}'$ *на множестве*

$$\{x \in (\mathbb{R}^*)^n : x_i \neq x_j \text{ при всех } i < j\}$$

имеют вид

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n,$$

где

$$K(x,y) = \begin{cases} \int\limits_s N(x,s) w(s,y)\, ds, & x,y > 0, \\ N(x,y), & x > 0,\ y < 0, \\ \iint\limits_{r,s} w(x,r) N(r,s) w(s,y)\, dr\, ds - w(x,y), & x < 0,\ y > 0, \\ \int\limits_r w(x,r) N(r,y)\, dr, & x,y < 0, \end{cases}$$

причем

$$w(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{-x+y}, & x < 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Класс обобщенных функций, в котором мы работаем, будет определен в §1. По поводу корректности написанных выше формул см. замечание 1.4.

Мы покажем, что процессы $\mathcal{P}'_z$, связанные с обобщенными регулярными представлениями, укладываются в изложенный выше формализм, и вычисление корреляционного ядра доставляет ядро Уиттекера, приведенное в теореме А.

Ограничение ($x_i \neq x_j$ при $i \neq j$) в теореме Б оказывается в нашем случае несущественным. Можно показать, что процессы $\mathcal{P}_z$ и $\mathcal{P}'_z$ являются простыми, т.е. они не имеют кратных точек с вероятностью единица. Это означает, что значения n-й корреляционной функции на диагональном множестве несущественны — это множество имеет меру нуль относительно n-й корреляционной меры $\rho_n(dx_1, \dots, dx_n) = \rho_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$. Доказательство простоты процессов $\mathcal{P}_z$ и $\mathcal{P}'_z$ можно найти в [P.II, теорема 2.5.1].

Автор рад возможности поблагодарить Г. И. Ольшанского за постоянное внимание и поддержку. Его „ожерельная“ интерпретация доказательства предложения 1.3 сделала изложение значительно более прозрачным.

§1. Общий формализм (теорема Б)

Мы начинаем с формулировки основного результата работы [Б1]. Он объясняет, как считать корреляционные функции случайных точечных процессов, описанных во Введении, с помощью интегралов расширенных функций Шура (0.8).

Поставим в соответствие всякой тройке $(\alpha, \beta, \tau) \in \widetilde{\Omega}$ точечную конфигурацию в $\mathbb{R}^*$ следующим образом:

$$(\alpha, \beta, \tau) \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \dots, -\beta_1, -\beta_2, \dots),$$

где нули в α и β мы опускаем. Единственная возможная предельная точка такой конфигурации — это нуль, так как $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \beta_k = 0$.

Таким образом, всякая борелевская вероятностная мера P на пространстве $\widetilde{\Omega}$ может быть интерпретирована как вероятностная мера на множестве таких точечных конфигураций, т.е. как точечный процесс. Мы будем обозначать этот процесс через $\mathcal{P}'$. Общая информация о случайных точечных процессах может быть найдена в книге [DVJ].

Можно показать, что если

$$m_k = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \tau^k(\omega)\, P(d\omega) < \infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.1}$$

то n-я корреляционная мера $\rho_n(dx_1, \dots, dx_n) = \rho_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$ принимает конечные значения на всех множествах вида $(\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon])^n$ для любых $\varepsilon > 0$, $n = 1, 2, \dots$ В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что условие (1.1) выполнено.

Нам понадобится еще одно техническое условие. Мы будем предполагать, что существует такое $a > 0$, что

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} e^{a\tau(\omega)} P(d\omega) < \infty. \tag{1.2}$$

Зафиксируем класс обобщенных функций, с которым мы будем работать в дальнейшем.

Обозначим через $E_n(x)$ гладкую положительную функцию на $\mathbb{R}^n$, совпадающую с $e^{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}$ вне некоторого компактного множества. Обозначим через $\mathcal{V}_k^a$, $a > 0$, векторное пространство линейных функционалов F на пространстве финитных пробных функций от k переменных таких, что функционал $E_k(ax) \cdot F$ может быть продолжен до непрерывного функционала на пространстве Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$. Мы будем рассматривать элементы из $\mathcal{V}_k^a$ как обобщенные функции вида $\frac{1}{E_k(ax)} \cdot G$, где $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^k)$.

Заметим, что для всякого функционала $F \in \mathcal{V}_k^a$ корректно определены моменты $\langle F, x_1^{l_1} \cdots x_k^{l_k} \rangle$, $l_i = 0, 1, \ldots$, поскольку

$$\frac{x_1^{l_1} \cdots x_k^{l_k}}{E_k(ax)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k). \tag{1.3}$$

Более того, элементы из $\mathcal{V}_k^a$ определяются своими моментами однозначно, так как линейные комбинации функций вида (1.3) образуют плотное подпространство в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$.

Ясно, что $\mathcal{V}_k^{a_1} \subset \mathcal{V}_k^{a_2}$, если $a_1 \geqslant a_2$. Положим $\mathcal{V}_k = \bigcup_{a>0} \mathcal{V}_k^a$.

Обозначим через $\Phi_{n,d}$ $(n, d \in \mathbb{N})$ множество отображений

$$\varphi\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, 1'; \ldots; d, d'\},$$

удовлетворяющих следующим условиям:

1) φ инъективно;

2) $\operatorname{Im}\varphi \cap \{m, m'\} \neq \varnothing$ для всех $m = 1, \ldots, d$.

Ясно, что $\Phi_{n,d}$ непусто, если и только если $n/2 \leqslant d \leqslant n$.

Для всякой (обобщенной) функции $F(r_1, s_1; \ldots; r_d, s_d)$ от $2d$ переменных и $\varphi \in \Phi_{n,d}$ определим (обобщенную) функцию $(\varphi F)(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных следующим образом. Произведем следующее переименование переменных: обозначим r_i через x_k, если $\varphi(k) = i$, и обозначим s_j через x_k, если $\varphi(k) = j'$, причем проделаем это для всех r_i, s_j таких, что $i, j' \in \operatorname{Im}\varphi$. Затем проинтегрируем F по всем непоименованным переменным. Результат мы обозначаем через $(\varphi F)(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема 1.1 [Б1]. *Пусть P — вероятностная мера на $\widetilde{\Omega}$, удовлетворяющая условиям* (1.1) *и* (1.2). *Предположим, что для каждого $d = 1, 2, \ldots$ существует обобщенная функция $I_d(r_1, s_1; \ldots; r_d, s_d) \in \mathcal{V}_{2d}$ такая, что*

(1) *I_d кососимметрична относительно перестановок множества $(r_1, \ldots, r_d)$ и перестановок множества $(s_1, \ldots, s_d)$;*

(2) $\operatorname{supp} I_d \subset \mathbb{R}_+^{2d}$;

(3) *моменты I_d имеют вид*

$$\langle I_d, r_1^{p_1} s_1^{q_1} \cdots r_d^{p_d} s_d^{q_d} \rangle = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \tilde{s}_{(p_1, \ldots, p_d | q_1, \ldots, q_d)}(\omega)\, P(d\omega).$$

Тогда на множестве

$$(\mathbb{R}^*)^n \cap \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \middle| \prod_{i<j} (x_i - x_j) \neq 0 \right\}$$

корреляционные функции процесса $\mathcal{P}'$ имеют вид

$$\rho_n(x_1,\dots,x_n) = \sum_{d\geqslant n/2}^{n} \frac{1}{d!} \sum_{\varphi\in\Phi_{n,d}} (\varphi H_d)(x_1,\dots,x_n), \tag{1.4}$$

где

$$H_d(r_1,s_1;\dots;r_d,s_d) = \frac{I_d(r_1,-s_1;\dots;r_d,-s_d)}{\prod_{i=1}^d (r_i+|s_i|)}.$$

Замечание 1.2. Необходимо объяснить, почему правая часть формулы (1.4) имеет смысл. Покажем, что это следует из определения операции φH_d и условия $I_d \in \mathcal{V}_{2d}$. В самом деле, проверим, что выражение $(\varphi H_d)(x_1,\dots,x_n)$ является обобщенной функцией в $(\mathbb{R}^*)^n$, т. е. ее можно спарить с произвольной гладкой функцией $\psi(x_1,\dots,x_n)$ такой, что $\operatorname{supp}\psi$ компактен и лежит в $(\mathbb{R}^*)^n$. Имеем

$$\langle \varphi H_d, \psi\rangle = \int I_d(r_1,-s_1;\dots;r_d,-s_d)\,\frac{\psi(\dots)}{\prod_{i=1}^d (r_i+|s_i|)}\,dr_1ds_1\dots dr_ds_d,$$

где в аргументах функции ψ переменная x_i заменяется на r_k, если $\varphi(i)=k$, или на s_l, если $\varphi(i)=l'$.

Ввиду второго свойства элементов $\varphi\in\Phi_{n,d}$ для каждого $i=1,\dots,d$ хотя бы одна из переменных r_i, s_i попадает в список аргументов функции ψ, и тем самым она отграничена от нуля на носителе функции ψ. Отсюда следует, что функция $\frac{\psi(\dots)}{\prod_{i=1}^d (r_i+|s_i|)}$ является гладкой ограниченной функцией. Стало быть, ее можно спарить с обобщенной функцией $I_d(r_1,-s_1;\dots;r_d,-s_d)$.

Начиная с этого момента мы будем предполагать, что наша мера P удовлетворяет условию теоремы Б: для всех диаграмм Юнга λ с координатами Фробениуса $(p_1,\dots,p_d\mid q_1,\dots,q_d)$ выполнено равенство

$$\int\limits_{\omega\in\widetilde{\Omega}} \tilde{s}_{(p_1,\dots,p_d|q_1,\dots,q_d)}(\omega)P(d\omega) = \det\left[\int\limits_{\omega\in\widetilde{\Omega}} \tilde{s}_{(p_i|q_j)}(\omega)P(d\omega)\right]_{i,j=1}^{d}. \tag{1.5}$$

В следующем параграфе мы увидим, что меры m'_z таким свойством обладают.

Если выполнено соотношение (1.5), то из существования распределения $I_1(r,s)\in\mathcal{V}_2$ с моментами

$$\langle I_1(r;s), r^p s^q\rangle = \int\limits_{\omega\in\widetilde{\Omega}} \tilde{s}_{(p|q)}(\omega)P(d\omega)$$

и носителем $\operatorname{supp} I_1 \subset \mathbb{R}^2_+$ (см. формулировку теоремы 1.1) немедленно следует существование распределений $I_d(r,s) \in \mathcal{V}_{2d}$, $d = 1, 2, \dots$, с моментами

$$\langle I_d(r_1, \dots, r_d; s_1, \dots, s_d), r_1^{p_1} \cdots r_d^{p_d} s_1^{q_1} \cdots s_d^{q_d} \rangle = \int\limits_{\omega \in \widetilde{\Omega}} \tilde{s}_{(p_1, \dots, p_d | q_1, \dots, q_d)}(\omega) P(d\omega)$$

и носителем $\operatorname{supp} I_1 \subset \mathbb{R}^{2d}_+$. Действительно,

$$I_d(r_1, \dots, r_d; s_1, \dots, s_d) = \det[I_1(r_i, s_j)]_{i,j=1}^d. \tag{1.6}$$

Нам будет удобно ввести обозначения

$$N(r,s) = I_1(r, -s), \quad w(s,r) = \begin{cases} \frac{1}{-s+r}, & s < 0, \ r > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1.7}$$

Тогда функции H_d из теоремы 1.1 имеют вид

$$H_d(r_1, s_1; \dots; r_d, s_d) = \prod_{i=1}^d w(s_i, r_i) \cdot \det[N(r_i, s_j)]_{i,j=1}^d. \tag{1.8}$$

Для следующего (чисто комбинаторного) утверждения можно считать, что $N(r,s)$ и $w(s,r)$ — произвольные функции двух переменных такие, что

$$\operatorname{supp} N(r,s) \subset \{(r,s) \mid r \geq 0, s \leq 0\}, \quad \operatorname{supp} w(s,r) \subset \{(s,r) \mid s \leq 0, r \geq 0\}.$$

Предложение 1.3. *Пусть* $x_1, \dots, x_n \neq 0$. *Тогда*

$$\sum_d \frac{1}{d!} \sum_{\varphi \in \Phi_{n,d}} (\varphi H_d)(x_1, \dots, x_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n, \tag{1.9}$$

где

$$K(x,y) = \begin{cases} \int\limits_s N(x,s) w(s,y) ds, & x, y > 0, \\ N(x,y), & x > 0, \ y < 0, \\ \iint\limits_{r,s} w(x,r) N(r,s) w(s,y) dr ds - w(x,y), & x < 0, \ y > 0, \\ \int\limits_r w(x,r) N(r,y) dr, & x, y < 0. \end{cases}$$

Теорема Б является прямым следствием теоремы 1.1 и этого предложения.

Замечание 1.4. Следует отметить, что выражение $\det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$, вообще говоря, не имеет смысла для произвольной обобщенной функции $K(x, y)$. Например, при $n = 1$ мы имеем $K(x, x)$, что не определено для произвольного распределения K. Однако в нашем случае предложение 1.3 следует понимать как специальный способ переписать левую часть формулы (1.9), которая корректно определена в силу замечания 1.2. Иными словами, если мы раскроем определитель $\det[K(x_i, x_j)]$ и воспользуемся записью K через N и w, то после перегруппировки слагаемых мы получим левую часть (1.9).

Кроме того, если $N(x, y)$ является регулярной обобщенной функцией, то ядро K есть обычная функция от двух переменных, и правая часть (1.9) корректно определена. Такая ситуация возникает при рассмотрении процессов $\mathcal{P}'_z$, связанных с обобщенными регулярными представлениями бесконечной симметрической группы (см. §4 ниже).

Доказательство предложения 1.3. Доказательство состоит из пяти шагов.

Шаг 1. На множестве $\Phi_{n,d}$ имеется естественное действие симметрической группы $S(d)$, состоящее в перестановках пар (i, i') для $i = 1, \dots, d$. Функция H_d, определенная в (1.8), инвариантна относительно перестановок пар (r_i, s_i), $i = 1, \dots, d$, поэтому все элементы $\varphi \in \Phi_{n,d}$, лежащие в одной орбите группы $S(d)$, дают одинаковые вклады в левую часть (1.9). Каждая орбита имеет $d!$ элементов, и, следовательно, мы можем считать, что сумма в левой части (1.9) берется по множеству орбит группы $S(d)$ в $\Phi_{n,d}$, убирая при этом множитель $\frac{1}{d!}$.

Шаг 2. Подставим выражение (1.8) в (1.9) и раскроем все определители. Тогда все возможные слагаемые будут параметризоваться тройками $(d, \widehat{\varphi}, \sigma)$, где $\widehat{\varphi}$ есть орбита группы $S(d)$ в $\Phi_{n,d}$, а $\sigma \in S(d)$ параметризует разложение определителя из (1.8). Мы можем также рассматривать σ как биективное отображение множества $\{1, 2, \dots, d\}$ на множество $\{1', 2', \dots, d'\}$.

Поставим в соответствие каждому слагаемому комбинаторный объект, который мы будем называть *ожерельем.* Ожерелье состоит из нескольких замкнутых нитей, на каждой из которых нанизаны белые и черные бусины в чередующемся порядке. Кроме того, некоторые из бусин помечены числами $1, \dots, n$, причем все эти числа встречаются ровно по одному разу. На каждой нити фиксирована ориентация.

Соответствие устроено следующим образом.

Зафиксируем представитель $\varphi \in \widehat{\varphi} \subset \Phi_{n,d}$.

Ожерелье содержит d белых и d черных бусин. Белые бусины соответствуют элементам $\{1, 2, \dots, d\}$, а черные — элементам $\{1', 2', \dots, d'\}$ множества $\{1, 1'; \dots; d, d'\}$, участвующего в определении $\Phi_{n,d}$.

Белая бусина, соответствующая i, помечается числом k, если $\varphi(k) = i$; черная бусина, соответствующая j', помечается числом l, если $\varphi(l) = j'$.

Белая бусина i всегда следует за черной бусиной i' и предшествует черной бусине $\sigma(i)$.

Заметим, что различные представители одной и той же орбиты $\widehat{\varphi}$ доставляют одно и то же ожерелье, тогда как разным орбитам соответствуют разные ожерелья.

Для заданного ожерелья соответствующее слагаемое левой части формулы (1.9) может быть построено следующим образом. Свяжем с каждой бусиной независимую переменную. Затем для каждого ребра (интервала между двумя последовательными бусинами) мы образуем множитель вида $N(\cdot,\cdot)$ или $w(\cdot,\cdot)$ следующим образом:

для ребра, соединяющего белую бусину с черной бусиной, берется $N(\cdot,\cdot)$, где первый аргумент отвечает белой бусине, а второй — черной;

для ребра, соединяющего черную бусину с белой бусиной, берется $w(\cdot,\cdot)$, где первый аргумент отвечает черной бусине, а второй — белой.

Таким образом, мы получаем d множителей. Перемножим их и присвоим переменным, соответствующим бусинам, помеченным числами $1,\dots,n$, имена $x_1,\dots,x_n$ соответственно.

Наконец, проинтегрируем получившееся выражение по всем непоименованным переменным и добавим знак $\operatorname{sgn}\sigma$. Знак будет обсуждаться в шаге 5.

Шаг 3. Мы теперь переведем на „ювелирный язык“ правую часть формулы (1.9).

Предположим, что знаки всех переменных $x_1,\dots,x_n$ фиксированы.

Раскроем определитель в правой части (1.9), слагаемые будут параметризоваться перестановками $\tau \in S(n)$. Далее, если слагаемое содержит множитель $K(x,y)$ с отрицательным x и положительным y, то

$$K(x,y) = \iint\limits_{r,s} w(x,r)N(r,s)w(s,y)drds - w(x,y), \tag{1.10}$$

и мы разбиваем это слагаемое на два: одно будет содержать

$$\iint\limits_{r,s} w(x,r)N(r,s)w(s,y)drds, \tag{1.11}$$

а второе —

$$-w(x,y). \tag{1.12}$$

Для каждого слагаемого построим ожерелье с n бусинами, которые будут соответствовать переменным $x_1,\dots,x_n$; белые бусины будут соответствовать положительным переменным, а черные — отрицательным. Все бусины должны быть помечены числами $1,\dots,n$, согласно нумерации соответствующих переменных. Бусина с номером i предшествует бусине с номером $\tau(i)$. Условие чередования цветов теперь снимается.

На каждом ребре, ведущем от черной („отрицательной") бусины i к белой („положительной") бусине j, мы ставим значок „N" или „w" в соответствии с тем, какое из слагаемых (1.11) или (1.12) было выбрано при разделении $K(x_i, x_j)$ на две части.

В первом случае мы скажем, что был сделан N-выбор, а во втором — w-выбор.

Шаг 4. Теперь мы установим взаимно-однозначное соответствие между ожерельями из шагов 2 и 3.

Начнем с ожерелья из шага 2. Оно содержит $2d$ черных и белых бусин, некоторые из которых помечены числами $1, \dots, n$. Мы можем немедленно построить ожерелье с n бусинами, просто выкинув все непомеченные бусины (с сохранением ориентации ожерелья).

Из второго условия в определении $\Phi_{n,d}$ следует, что по крайней мере один конец каждого ребра, ведущего от черной бусины к белой бусине, является помеченным (по крайней мере один элемент в каждой паре (i, i') лежит в образе отображения $\varphi \in \Phi_{n,d}$). Это означает, что когда мы убираем все непомеченные бусины, ребро „черное–белое" может быть получено двумя разными способами: либо оно пришло из исходного ожерелья нетронутым, либо между двумя концами ребра исходно были еще 2 непомеченные бусины, которые были изъяты. В первом случае мы помечаем ребро значком „w", а во втором — значком „N".

Таким образом, начав с ожерелья из шага 2, мы получили ожерелье из шага 3. Обратим эту процедуру.

Берем ожерелье с n бусинами из шага 3. Мы будем следовать следующим правилам:

(1) внутрь ребра типа „белое–белое" мы вставляем одну непомеченную черную бусину;
(2) внутрь ребра типа „черное–черное" мы вставляем одну непомеченную белую бусину;
(3) ребра „белое–черное" оставляем неизменными;
(4) ребра „черное–белое" со значком „w" оставляем неизменными;
(5) внутрь ребра „черное–белое" со значком „N" вставляем одну белую и одну черную бусину, белая идет первой.

Ясно, что две процедуры, описанные выше, являются взаимно обратными. Они устанавливают взаимно однозначное соответствие между слагаемыми левой и правой частей формулы (1.9).

Прямая проверка показывает, что с точностью до знака соответствующие слагаемые из шагов 2 и 3 равны. Чтобы получить (с точностью до знака) слагаемое, отвечающее паре ожерелий, мы берем каждое ребро ожерелья с n бусинами и в соответствии с пятью возможными ситуациями, описанными

выше, образуем множитель (пусть ребро идет от бусины номер i к бусине номер j)

$$
\begin{aligned}
(1):&\quad \int_s N(x_i,s)w(s,x_j)ds;\\
(2):&\quad \int_r w(x_i,r)N(r,x_j)dr;\\
(3):&\quad N(x_i,x_j);\\
(4):&\quad w(x_j,x_i);\\
(5):&\quad \iint_{r,s} w(x_i,r)N(r,s)w(s,x_j)drds.
\end{aligned}
$$

После этого мы перемножаем n получившихся множителей.

Шаг 5. Проверим, что соответствующие друг другу слагаемые имеют одинаковый знак.

Берем два соответствующих друг другу ожерелья: одно из шага 2, другое из шага 3.

Знак для первого ожерелья равен $\operatorname{sgn}\sigma$ ($\sigma \in S(d)$ была введена в шаге 2). Число циклов подстановки σ равно количеству компонент связности ожерелья, обозначим это число через c. Тогда $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{d-c}$.

Знак для второго ожерелья равен $\operatorname{sgn}\tau$ (τ была введена в шаге 3), умноженному на -1 в степени, равной количеству w-выборов, ввиду знака „$-$“ в (1.12). Количество циклов подстановки τ равно c, поскольку оба ожерелья имеют одинаковое число компонент связности. Таким образом, $\operatorname{sgn}\tau = (-1)^{n-c}$. Далее, количество w-выборов равно $n-d$, это может быть легко доказано индукцией по количеству w-выборов. Следовательно,

$$(n-c) - (\text{количество } w\text{-выборов}) = d - c,$$

и знаки равны.

§2. Спектральные меры m_z и процессы $\mathcal{P}'_z$

Напомним, что спектральные меры m_z — это вероятностные меры на симплексе Тома Ω, описывающие разложение обобщенных регулярных представлений T_z на неприводимые (см. Введение).

Определим меру P_z на пространстве $\widetilde{\Omega}$ как образ меры

$$m'_z = m_z \otimes \frac{s^{t-1}}{\Gamma(t)}\, e^{-s} ds$$

на $\Omega' = \Omega \times \mathbb{R}_+$ относительно отображения

$$((\alpha, \beta, \gamma), s) \in \Omega' \mapsto (s\alpha, s\beta, s) \in \widetilde{\Omega}.$$

Здесь s — параметр на полуоси $\mathbb{R}_+$, $t = |z|^2$. Тогда точечный процесс $\mathcal{P}'$, соответствующий мере P_z, согласно общему формализму §1, есть точечный процесс $\mathcal{P}'_z$, определенный во Введении. Его корреляционные функции мы и будем считать с помощью теоремы Б.

Покажем прежде всего, что меры P_z удовлетворяют условиям теоремы Б.

В обозначениях §1 (см. (1.1)) мы имеем

$$m_k = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \tau^k(\omega)\, P_z(d\omega) = \int\limits_0^\infty s^k \frac{s^{t-1}}{\Gamma(t)} e^{-s} ds = t(t+1)\cdots(t+k-1), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Кроме того, для всех $a \in (0, 1)$

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} e^{a\tau(\omega)} P_z(d\omega) = \int\limits_0^\infty \frac{s^{t-1}}{\Gamma(t)} e^{(a-1)s} ds < \infty,$$

и условие (1.2) выполнено.

Поскольку

$$\frac{M_z(\lambda)}{\dim \lambda} = \int\limits_{\Omega} \tilde{s}_\lambda(\omega)\, m_z(d\omega)$$

(см. Введение), мы имеем

$$\begin{aligned}\phi_z(\lambda) &= \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \tilde{s}_\lambda(\omega) P_z(d\omega) = \int\limits_{\Omega} \tilde{s}_\lambda(\omega) m_z(d\omega) \cdot \int\limits_0^\infty s^{|\lambda|} \frac{s^{t-1}}{\Gamma(t)} e^{-s} ds \\ &= t(t+1)\cdots(t+|\lambda|-1) M_z(\lambda).\end{aligned}$$

Из формулы (0.6) Введения мы получаем

$$\phi_z(\lambda) = \prod_{(ij)\in\lambda} (z+j-i)(\bar{z}+j-i) \cdot \dim \lambda / |\lambda|!.$$

Запишем эту формулу в терминах координат Фробениуса $(p_1, \ldots, p_d \,|\, q_1, \ldots, q_d)$. Пользуясь известной формулой для размерности

$$\frac{\dim \lambda}{|\lambda|!} = \frac{1}{p_1! q_1! \cdots p_d! q_d!} \det \left[\frac{1}{p_i + q_j + 1}\right]_{i,j=1}^d,$$

мы имеем

$$\phi_z((p_1,\dots,p_d|q_1,\dots,q_d)) = \det[\phi((p_i|q_j))]_{i,j=1}^d,$$
$$\phi_z((p|q)) = t\,\frac{(z+1)_p(\bar z+1)_p(-z+1)_q(-\bar z+1)_q}{p!q!(p+q+1)}.$$

Отсюда следует, что для вычисления корреляционных функций $\rho_n^{(z)}$ процесса $\mathcal{P}'_z$ мы можем применить теорему Б. Остается предъявить распределение $N(r,s)\in\mathcal{V}_2$ с моментами

$$\langle N(r,-s), r^p s^q\rangle = \phi_z((p|q)) \tag{2.1}$$

и носителем в четвертом квадранте, а затем вычислить корреляционное ядро.

§3. Распределение $N(r,s)$

Мы начнем со следующей леммы.

Лемма 3.1 („псевдосвертка“) [P.I]. *Для любых распределений*

$$f(\xi_1,\dots,\xi_m)\in\mathcal{V}_m \quad и \quad g(\eta_1,\dots,\eta_m)\in\mathcal{V}_m$$

с моментами

$$\langle f, {\xi_1}^{\alpha_1}\cdots,{\xi_m}^{\alpha_m}\rangle = m_{\alpha_1\dots\alpha_m},\quad \langle g, {\eta_1}^{\beta_1}\cdots,{\eta_m}^{\beta_m}\rangle = n_{\beta_1\dots\beta_m}$$

существует (единственное) распределение $h(\zeta_1,\dots,\zeta_m)\in\mathcal{V}_m$ *с моментами*

$$\langle h, {\zeta_1}^{\gamma_1}\cdots,{\zeta_m}^{\gamma_m}\rangle = m_{\gamma_1\dots\gamma_m}n_{\gamma_1\dots\gamma_m}.$$

Кроме того,

$$\operatorname{supp} h\subset \operatorname{supp} f\cdot\operatorname{supp} g.$$

Мы будем использовать обозначение

$$h = f\odot g$$

и называть h *псевдосверткой* обобщенных функций f и g.

Доказательство. Определим значение обобщенной функции h на пробной функции ψ формулой

$$\langle h,\psi\rangle = \int f(\xi_1,\dots,\xi_m)g(\eta_1,\dots,\eta_m)\psi(\xi_1\eta_1,\dots,\xi_m\eta_m)\prod_{i=1}^m d\xi_i d\eta_i.$$

Пусть $a > 0$ настолько мало, что $f \in \mathcal{V}_m^a$ и $g \in \mathcal{V}_m^a$. Тогда значения обобщенной функции h корректно определено на пробных функциях ψ вида $E_m(bx)\,\psi_0(x)$, где $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, $0 < b < a$. Действительно, из неравенства

$$\sqrt{(\xi_1\eta_1)^2 + \ldots + (\xi_m\eta_m)^2} \leqslant |\xi_1\eta_1| + \cdots + |\xi_m\eta_m| \leqslant \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2}\sqrt{\eta_1^2 + \cdots + \eta_m^2}$$

следует, что функция

$$\frac{E_m(b\xi_1\eta_1, \ldots, b\xi_m\eta_m)}{E_m(b\xi)E_m(b\eta)}$$

ограничена. Тогда получаем

$$\begin{aligned}\psi(\xi_1\eta_1, \ldots, \xi_m\eta_m) &= E_m(b\xi_1\eta_1, \ldots, b\xi_m\eta_m)\psi_0(\xi_1\eta_1, \ldots, \xi_m\eta_m)\\ &= E_m(a\xi)E_m(a\eta)\frac{E_m(b\xi_1\eta_1, \ldots, b\xi_m\eta_m)}{E_m(b\xi)E_m(b\eta)}\\ &\quad\times \frac{E_m(b\xi)E_m(b\eta)\psi_0(\xi_1\eta_1, \ldots, \xi_m\eta_m)}{E_m(a\xi)E_m(a\eta)} \in E_m(a\xi)E_m(a\eta)\cdot\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2m}).\end{aligned}$$

Тем самым $h \in \mathcal{V}_m^b$. •

Очевидно, операция псевдосвертки ассоциативна.

Введем распределения [ГШ],

$$\eta_a(u) = \frac{u_+^a}{\Gamma(a+1)}, \quad u \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{C}.$$

Для $\Re a > -1$ по определению мы полагаем $\eta_a(u)$, равной $u^a/\Gamma(a+1)$ для $u > 0$ и нулю для $u < 0$, так что мы получаем локально интегрируемую функцию. Для $\Re a \leq -1$ мы пользуемся аналитическим продолжением. Например, $\eta_{-1}(u) = \delta(u)$.

Нам также понадобятся произведения вида

$$\eta_{a,b} = \eta_a(u)\eta_b(1-u), \quad a, b \in \mathbb{C},$$

которые корректно определены, поскольку возможные особенности множителей не пересекаются.

Легко видеть, что

$$\eta_a(u)e^{-u} \in \mathcal{V}_1,\ \langle \eta_a(u)e^{-u}, u^k\rangle = (a+1)_k, \quad a \in \mathbb{C};$$
$$\eta_{a,b}(u) \in \mathcal{V}_1,\ \langle \eta_{a,b}(u), u^k\rangle = \frac{(a+1)_k}{\Gamma(a+b+k+2)}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

Предложение 3.2. *Распределение*

$$N(r,s) = t\left(\eta_{\bar z}(r)\eta_{-\bar z}(-s)e^{-r+s}\right) \odot \left(\eta_{z,-z-1}(r)\eta_{-z,z-1}(-s)\right) \\ \odot \left(\delta(r+s)\chi_{[0,1]}(r)\right) \tag{3.1}$$

принадлежит пространству $\mathcal{V}_2$ *и удовлетворяет проблеме моментов* (2.1). (*Здесь* $\chi_{[0,1]}(x)$ — *характеристическая функция отрезка* $[0,1]$).

Доказательство. Принадлежность пространству $\mathcal{V}_2$ следует из принадлежности этому пространству каждой из трех составляющих и того, что псевдосвертка не выводит за пределы $\mathcal{V}_2$ (см. лемму выше). Равенство моментов следует из леммы 3.1 и соотношений

$$\langle \eta_{\bar z}(r)\eta_{-\bar z}(s)e^{-r-s}, r^p s^q\rangle = (\bar z+1)_p(-\bar z+1)_q,$$
$$\langle \eta_{z,-z-1}(r)\eta_{-z,z-1}(s), r^p s^q\rangle = \frac{(z+1)_p(-z+1)_q}{p!q!},$$
$$\langle \delta(r-s)\chi_{[0,1]}(r), r^p s^q\rangle = \frac{1}{p+q+1},$$

которые следуют из приведенных выше формул для моментов распределений $\eta_a(u)e^{-u}$ и $\eta_{a,b}(u)$. •

§4. Ядро Уиттекера (теорема А)

Нашей целью в этом параграфе является явное вычисление корреляционного ядра для процесса $\mathcal{P}'_z$, задаваемого теоремой Б, и распределением $N(r,s)$, полученным выше. В результате мы получим доказательство теоремы А, сформулированной во Введении.

Удобно отождествить $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_+ \sqcup \mathbb{R}_-$ с $\mathbb{R}_+ \sqcup \mathbb{R}_+$, используя естественную биекцию $\mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$. Это позволяет записать ядро K в блочной форме

$$K = \begin{bmatrix} K_{++} & K_{+-} \\ K_{-+} & K_{--} \end{bmatrix},$$

где каждый из блоков является ядром на $\mathbb{R}_+$:

$$K_{++}(x,y) = \int_s N(x,s)w(s,y)ds, \qquad x,y>0;$$
$$K_{+-}(x,-y) = N(x,y), \qquad x>0,\ y<0;$$
$$K_{-+}(-x,y) = \iint_{r,s} w(x,r)N(r,s)w(s,y)drds - w(x,y), \quad x<0,\ y>0;$$
$$K_{--}(-x,-y) = \int_r w(x,r)N(r,y)dr, \qquad x,y<0.$$

Блоки $K_{++}(x,y)$, $K_{+-}(x,y)$, $K_{-+}(x,y)$, $K_{--}(x,y)$, как обобщенные функции в области $\{x>0\,,y>0\}$, чьи значения определены на финитных пробных функциях, зависят от параметров z и $z'=\bar{z}$ аналитично. Действительно, это верно для ядра $N(x,y)$, см. явную формулу выше, а

$$w(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{|x|+y}, & x<0,\ y>0,\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

не зависит от параметров вовсе.

Ниже мы получим явные формулы для всех блоков ядра K, однако в процессе вычислений нам будет удобно положить $z'=\bar{z}$ и считать z, z' независимыми параметрами, удовлетворяющими неравенствам

$$-1<\Re z,\Re z'<0. \tag{4.1}$$

Наши формулы также будут зависеть от z и z' аналитически, поэтому, пользуясь теоремой единственности для аналитических функций, мы будем во всех выкладках ниже предполагать выполнение неравенств (4.1).

Условие (4.1) приводит к тому, что почти все участвующие в формулах ниже распределения являются локально интегрируемыми функциями, что существенно упрощает обоснование преобразований.

Мы будем в дальнейшем пользоваться *функциями Уиттекера* $W_{\varkappa,\mu}(x)$, $x>0$, $\varkappa,\mu\in\mathbb{C}$. Функция $W_{\varkappa,\mu}(x)$ может быть определена как единственное решение уравнения

$$y''-\left(\frac{1}{4}-\frac{\varkappa}{x}+\frac{\mu^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)y=0$$

такое, что $y\sim x^{\varkappa}e^{-\frac{x}{2}}$ при $x\to+\infty$ [E, гл. 6]. Заметим, что

$$W_{\varkappa,\mu}=W_{\varkappa,-\mu}.$$

При $\mu\neq 0$ функция Уиттекера выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию следующим образом:

$$\begin{aligned}&x^{-1/2}e^{x/2}W_{\varkappa,\mu}(x)\\&\quad=\frac{\Gamma(-2\mu)x^{\mu}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\varkappa-\mu)}{}_1F_1(\tfrac{1}{2}-\varkappa+\mu;2\mu+1;x)\\&\qquad+\frac{\Gamma(2\mu)x^{-\mu}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\varkappa+\mu)}{}_1F_1(\tfrac{1}{2}-\varkappa-\mu;-2\mu+1;x).\end{aligned} \tag{4.2}$$

При $\mu=0$ соответствующее выражение может быть получено из формулы (4.2) с помощью предельного перехода.

Предложение 4.1. *Имеет место равенство*

$$
\begin{aligned}
K_{+-}(x,y) &= N(x,-y) \\
&= \frac{\sin\pi z\sin\pi z'}{\pi^2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z+z'}{2}} e^{\frac{-x-y}{2}}(xy)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad\times \frac{W_{\frac{z+z'+1}{2},\pm\frac{z-z'}{2}}(x)W_{\frac{-z-z'+1}{2},\pm\frac{z-z'}{2}}(y) + tW_{\frac{z+z'-1}{2},\pm\frac{z-z'}{2}}(x)W_{\frac{-z-z'-1}{2},\pm\frac{z-z'}{2}}(y)}{x+y},
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

где правая часть предполагается равной нулю, если хотя бы одна из переменных x, y неположительна.

Доказательство. Умножим (4.3) на $(x+y)$ и сравним (k,l)-моменты левой и правой частей. Нам понадобится соотношение

$$
\int_0^\infty x^{b-\frac{c}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}W_{\frac{c}{2}-a,\frac{c}{2}-\frac{1}{2}}(x)dx = \frac{\Gamma(b)\Gamma(b-c+1)}{\Gamma(a+b-c+1)},
$$

$\Re b > 0$, $\Re c < \Re b + 1$, которое является частным случаем формулы [E, 6.10(7)].

Из этой формулы немедленно вытекает, что (k,l)-момент правой части (4.3), умноженной на $(x+y)$, равен

$$
\begin{aligned}
&t\frac{(z+1)_k(z'+1)_k(-z+1)_l(-z'+1)_l}{k!l!} \\
&\quad + t^2\frac{(z+1)_k(z'+1)_k(-z+1)_l(-z'+1)_l}{(k+1)!(l+1)!} \\
&\qquad = t\frac{(z+1)_{k+1}(z'+1)_{k+1}(-z+1)_l(-z'+1)_l}{(k+1)!l!(k+l+2)} \\
&\qquad\quad + t\frac{(z+1)_k(z'+1)_k(-z+1)_{l+1}(-z'+1)_{l+1}}{k!(l+1)!(k+l+2)} \\
&\qquad = \phi_z((k+1|l)) + \phi_z((k|l+1)) \\
&\qquad = \langle (x+y)K_{+-}(x,y), x^k y^l\rangle
\end{aligned}
$$

ввиду (2.1). (Напомним, что z' есть бывшее $\bar{z}$, а тогда $t = zz'$).

Далее, из перечисленных выше свойств функции Уиттекера легко следует, что правая часть (4.3) при ограничении (4.1) есть интегрируемая функция, экспоненциально убывающая на бесконечности, поэтому она лежит в пространстве $\mathcal{V}_2$. Умножение на $(x+y)$ не выводит из $\mathcal{V}_2$, и элементы этого пространства однозначно определяются своими моментами, поэтому левая и правая части (4.3) совпадают после умножения на $(x+y)$. Поскольку носители левой и правой частей (4.3) лежат в первом квадранте, мы получаем, что равенство (4.3) верно с

точностью до распределения с носителем в точке (0,0). Остается доказать, что N не имеет сингулярности в нуле.

Из сравнения моментов, аналогичного проделанному выше, мы видим, что

$$t\left(\eta_{z'}(x)\eta_{-z'}(y)e^{-x-y}\right) \odot \left(\eta_{z,-z-1}(x)\eta_{-z,z-1}(y)\right)$$
$$= \frac{\sin \pi z \sin \pi z'}{\pi^2} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z+z'}{2}} e^{\frac{-x-y}{2}} (xy)^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{z+z'+1}{2}, \pm\frac{z-z'}{2}}(x) W_{\frac{-z-z'+1}{2}, \pm\frac{z-z'}{2}}(y).$$

Это есть интегрируемая функция, экспоненциально убывающая на бесконечности, обозначим ее через $F(x,y)$. Ее псевдосвертка с $\left(\delta(x-y)\chi_{[0,1]}(x)\right)$ имеет вид

$$\left(F(x,y) \odot \left(\delta(x-y)\chi_{[0,1]}(x)\right)\right)(x,y) = \int_0^1 F\left(\frac{x}{\tau}, \frac{y}{\tau}\right) d\tau$$

и является по крайней мере локально интегрируемой функцией. Но это и есть $N(x,-y)$, см. предложение 3.2 выше.

Таким образом, обе части (4.3) являются регулярными обобщенными функциями, и, следовательно, они совпадают. •

Предложение 4.2.

$$K_{++}(x,y) = \int_s \frac{N(x,-s)}{s+y} ds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(z')} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z+z'}{2}} e^{\frac{y-x}{2}} (xy)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times \frac{W_{\frac{z+z'+1}{2}, \pm\frac{z-z'}{2}}(x) W_{\frac{z+z'-1}{2}, \pm\frac{z-z'}{2}}(y) - W_{\frac{z+z'-1}{2}, \pm\frac{z-z'}{2}}(x) W_{\frac{z+z'+1}{2}, \pm\frac{z-z'}{2}}(y)}{x-y}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Рассмотрим преобразования Стилтьеса

$$\mathfrak{S} : f(x) \mapsto \int_0^\infty \frac{f(y)dy}{x+y}.$$

Оно коммутирует с гомотетиями аргумента, откуда следует, что применение преобразования $\mathfrak{S}$ к псевдосвертке эквивалентно применению этого преобразования к одному из множителей, если другие не имеют особенностей в нуле. Для вычисления $K_{++}(x,y)$ мы вправе применить преобразование Стилтьеса ко второму множителю правой части формулы (3.1), поскольку

$$t\left(\eta_{z'}(x)\eta_{-z'}(y)e^{-x-y}\right) \odot \left(\delta(x-y)\chi_{[0,1]}(x)\right)$$

является обычной функцией (то же рассуждение, что в конце доказательства предложения 4.1).

Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 4.3.

$$\mathfrak{S}\phi_{-z,z-1}(y) = y^{-z}(1+y)^{z-1}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Обозначим через $F(a,b;c;x)$ гипергеометрическую функцию Гаусса,

$$F(a,b;c;x) = \Gamma(c)\int\limits_{\tau} \frac{\phi_{b-1}(\tau)\phi_{c-b-1}(1-\tau)}{(1-x\tau)^a}d\tau,$$

см. [E]. Мы имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{x} \frac{1}{x+y}\phi_{-z}(x)\phi_{z-1}(1-x)dx \\
&\quad = \frac{1}{y}\int\limits_{x} \frac{\phi_{-z}(x)\phi_{z-1}(1-x)}{1+x/y}dx = \frac{1}{y}F(-z+1,1;1;-1/y) = \frac{1}{y}(1+1/y)^{-z-1} \\
&\quad = y^{-z}(1+y)^{z-1},
\end{aligned}$$

где мы воспользовались известными тождествами

$$F(a,b;c;x) = F(b,a;c;x); \quad F(a,b,b;x) = (1-x)^{-a}. \quad \bullet \tag{4.6}$$

Лемма 4.4.

$$\int\limits_0^1 \phi_{z,-z-1}\left(\frac{r_1}{uw}\right)\left(\frac{r_2}{vw}\right)^{-z}\left(1+\frac{r_2}{vw}\right)^{z-1}\frac{dw}{uvw^2} = \frac{\phi_{-z}(u-r_1)\phi_z(r_2+v)}{r_1v+r_2u}.$$

Доказательство. Упростим выражение

$$\begin{aligned}
&\phi_{z,-z-1}\left(\frac{r_1}{uw}\right)\left(\frac{r_2}{vw}\right)^{-z}\left(1+\frac{r_2}{vw}\right)^{z-1}\frac{1}{uvw^2} \\
&\quad = \frac{1}{\Gamma(z+1)}\left(\frac{r_1}{uw}\right)_+^{z}\frac{1}{\Gamma(-z)}\left(1-\frac{r_1}{uw}\right)_+^{-z-1}\left(\frac{r_2}{vw}\right)^{-z}\left(1+\frac{r_2}{vw}\right)^{z-1}\frac{1}{uvw^2} \\
&\quad = \frac{(uw-r_1)_+^{-z-1}}{\Gamma(-z)}\frac{(vw+r_2)^{z-1}}{\Gamma(z+1)}.
\end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $w \to y$

$$y = \frac{uw-r_1}{u-r_1}; \quad w = \frac{(u-r_1)y+r_1}{u}; \quad dw = \frac{u-r_1}{u}dy.$$

Мы получаем

$$\int_0^1 \frac{(uw-r_1)_+^{-z-1}}{\Gamma(-z)} \frac{(vw+r_2)^{z-1}}{\Gamma(z+1)} dw$$

$$= \int_0^1 \frac{(y(u-r_1))_+^{-z-1}}{\Gamma(-z)} \frac{((y(u-r_1)+r_1)v/u+r_2)^{z-1}}{\Gamma(z+1)} \frac{u-r_1}{u} dy$$

$$= u^{-z}(u-r_1)_+^{-z} \frac{(vr_1+ur_2)^{z-1}}{\Gamma(z+1)} \int_0^1 \frac{y^{-z-1}}{\Gamma(-z)} \left(1+\frac{v(u-r_1)}{vr_1+ur_2}y\right)^{z-1} dy$$

$$= u^{-z}(u-r_1)_+^{-z} \frac{(vr_1+ur_2)^{z-1}}{\Gamma(z+1)} \frac{1}{\Gamma(-z+1)} F\left(1-z,-z;1-z;-\frac{v(u-r_1)}{vr_1+ur_2}\right)$$

по определению гипергеометрической функции. Используя тождества (4.6), мы получаем, что наш исходный интеграл равен

$$u^{-z} \frac{(u-r_1)_+^{-z}}{\Gamma(-z+1)} \frac{(vr_1+ur_2)^{z-1}}{\Gamma(z+1)} \left(1+\frac{v(u-r_1)}{vr_1+ur_2}\right)^{z}$$
$$= \frac{(u-r_1)_+^{-z}}{\Gamma(-z+1)} \frac{(v+r_2)^{z}}{\Gamma(z+1)} \frac{1}{vr_1+ur_2}. \quad \bullet$$

Воспользуемся леммой 4.3. Получаем

$$K_{++}(x,y) = \int_s \frac{N(x,-s)}{s+y} ds$$
$$= t\left(\phi_{z'}(x)\phi_{-z'}(y)e^{-x-y}\right) \odot \left(\phi_{z,-z-1}(x)\, y^{-z}(1+y)^{z-1}\right) \odot \left(\delta(x-y)\chi_{[0,1]}(x)\right).$$

Определение псевдосвертки дает

$$K_{++}(x,y)$$
$$= t \int_{u,v} \phi_{z'}(u)\phi_{-z'}(v)e^{-u-v}$$
$$\times \int_0^1 \phi_{z,-z-1}\left(\frac{x}{uw}\right)\left(\frac{y}{vw}\right)^{-z}\left(1+\frac{y}{vw}\right)^{z-1} \frac{dwdudv}{w^2uv}. \tag{4.7}$$

Теперь воспользуемся леммой 4.4. Имеем

$$K_{++}(x,y) = t \int_{u,v} \phi_{z'}(u)\phi_{-z'}(v)\phi_{-z}(u-x)\phi_z(v+y) \frac{e^{-u-v}}{xu+yv} dudv.$$

Вводя новые переменные интегрирования

$$t_1 = u/x - 1, \quad t_2 = v/y,$$

мы видим, что

$$\begin{aligned} &K_{++}(x,y) \\ &\quad = t\left(\frac{x}{y}\right)^{z'} e^{\frac{y-x}{2}} \\ &\qquad \times \iint\limits_{t_1,t_2} \phi_{-z}(t_1)\phi_{-z'}(t_2)\phi_{z'}(t_1+1)\phi_z(t_2+1)\frac{e^{-x(t_1+1/2)-y(t_2+1/2)}}{t_1+t_2+1}dt_1dt_2. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$M(x,y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{-z'} e^{\frac{x-y}{2}} K_{++}(x,y).$$

Заметим, что

$$(x-y)e^{-x(t_1+1/2)-y(t_2+1/2)} = \left(\frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{\partial}{\partial t_1}\right) e^{-x(t_1+1/2)-y(t_2+1/2)}.$$

Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} &(x-y)M(x,y) \\ &\quad = t\iint\limits_{t_1,t_2} e^{-x(t_1+1/2)-y(t_2+1/2)} \\ &\qquad \times \left(\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{\partial}{\partial t_2}\right)\left[\frac{\phi_{-z}(t_1)\phi_{-z'}(t_2)\phi_{z'}(t_1+1)\phi_z(t_2+1)}{t_1+t_2+1}\right] dt_1dt_2. \end{aligned}$$

Простое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{\partial}{\partial t_2}\right)\frac{\phi_{-z}(t_1)\phi_{-z'}(t_2)\phi_{z'}(t_1+1)\phi_z(t_2+1)}{t_1+t_2+1} \\ &\quad = \phi_{-z}(t_1)\phi_{-z'}(t_2)\phi_{z'}(t_1+1)\phi_z(t_2+1)\left(\frac{z'}{(t_1+1)t_2} - \frac{z}{t_1(t_2+1)}\right). \end{aligned}$$

Тем самым мы получаем

$$\begin{aligned} &(x-y)M(x,y) \\ &\quad = \frac{e^{\frac{-x-y}{2}}}{\Gamma(z)\Gamma(z')} \\ &\qquad \times\Bigg(\int\limits_{t_1} \phi_{-z-1}(t_1)(t_1+1)^{z'}e^{-xt_1}dt_1 \int\limits_{t_2} \phi_{-z'}(t_2)(t_2+1)^{z-1}e^{-yt_2}dt_2 \\ &\qquad\quad - \int\limits_{t_1} \phi_{-z}(t_1)(t_1+1)^{z'-1}e^{-xt_1}dt_1 \int\limits_{t_2} \phi_{-z'-1}(t_2)(t_2+1)^{z}e^{-yt_2}dt_2\Bigg). \end{aligned}$$

Стандартное интегральное представление функции Уиттекера (или вырожденной гипергеометрической функции $\Psi(a,c;x)$ [E, 6.9.4 и 6.5.2])

$$W_{\varkappa,\mu}(x) = e^{-x/2}x^{\mu+1/2}\int\limits_{\tau}\phi_{\mu-\varkappa-1/2}(\tau)(1+\tau)^{\mu+\varkappa-1/2}e^{-\tau x}d\tau$$

завершает доказательство предложения 4.2. •

Изменение знака у z и z' в предложении 4.2 вместе с заменой $x \leftrightarrow y$ приводит к следующему результату.

Предложение 4.5.

$$\begin{aligned} K_{--}(x,y) &= \int\limits_{r}\frac{N(r,-y)}{r+x}dr \\ &= \frac{1}{\Gamma(-z)\Gamma(-z')}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z+z'}{2}} e^{\frac{x-y}{2}}(xy)^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \frac{W_{\frac{-z-z'+1}{2},\pm\frac{z-z'}{2}}(x)W_{\frac{-z-z'-1}{2},\pm\frac{z-z'}{2}}(y) - W_{\frac{-z-z'-1}{2},\pm\frac{z-z'}{2}}(x)W_{\frac{-z-z'+1}{2},\pm\frac{z-z'}{2}}(y)}{x-y}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Вычислим $K_{-+}(x,y)$.

Предложение 4.6.

$$\begin{aligned} K_{-+}(x,y) &= \iint\limits_{r,s}\frac{N(r,-s)}{(r+x)(s+y)}drds - \frac{1}{x+y} \\ &= -\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z+z'}{2}} e^{\frac{x+y}{2}}(xy)^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \frac{W_{\frac{-z-z'+1}{2},\pm\frac{z-z'}{2}}(x)W_{\frac{z+z'+1}{2},\pm\frac{z-z'}{2}}(y) + tW_{\frac{-z-z'-1}{2},\pm\frac{z-z'}{2}}(x)W_{\frac{z+z'-1}{2},\pm\frac{z-z'}{2}}(y)}{x+y}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Замечание 4.7. Из предложений 4.1 и 4.6 следует, что

$$K_{-+}(x,y) = -\frac{\pi^2}{\sin\pi z\sin\pi z'}e^{x+y}K_{+-}(y,x). \tag{4.10}$$

Это нетривиальный и удивительный факт. Детальное обсуждение этого „совпадения“ (или, скорее, его модификации, см. замечание 4.10 ниже) можно найти в [P.V].

Доказательство предложения 4.6. Сначала, как в доказательстве предложения 4.2, применим оба преобразования Стилтьеса ко второму множителю в псевдосвертке (3.1). Воспользовавшись дважды формулой (4.5), мы получаем

$$\int\limits_{r,s} \frac{N(r,-s)}{(r+x)(s+y)} dr ds$$
$$= t\left(\phi_{z'}(x)\phi_{-z'}(y)e^{-x-y}\right)$$
$$\odot \left(x^z(1+x)^{-z-1}\, y^{-z}(1+y)^{z-1}\right) \odot \left(\delta(x-y)\chi_{[0,1]}(x)\right).$$

Определение псевдосвертки дает

$$\int\limits_{r,s} \frac{N(r,-s)}{(r+x)(s+y)} dr ds$$
$$= t \int\limits_{u,v} \phi_{z'}(u)\phi_{-z'}(v)e^{-u-v}$$
$$\times \int\limits_0^1 \left(\frac{x}{uw}\right)^z \left(1+\frac{x}{uw}\right)^{-z-1} \left(\frac{y}{vw}\right)^{-z} \left(1+\frac{y}{vw}\right)^{z-1} \frac{dw du dv}{w^2 uv}.$$

Введем новые переменные

$$\begin{cases} \tau_1 = u/x, \\ \tau_2 = v/y. \end{cases}$$

Имеем

$$\int\limits_{r,s} \frac{N(r,-s)}{(r+x)(s+y)} dr ds$$
$$= t\left(\frac{x}{y}\right)^{z'} \int\limits_{\tau_1,\tau_2} \phi_{z'}(\tau_1)\phi_{-z'}(\tau_2)e^{-x\tau_1 - y\tau_2}$$
$$\times \int\limits_0^1 (1+\tau_1 w)^{-z-1}(1+\tau_2 w)^{z-1} dw d\tau_1 d\tau_2.$$

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4.8.

$$\int\limits_0^1 (1+\tau_1 w)^{-z-1}(1+\tau_2 w)^{z-1} dw = \frac{1}{z}\frac{1}{\tau_2-\tau_1}\left(\left(\frac{1+\tau_2}{1+\tau_1}\right)^z - 1\right).$$

Доказательство. Воспользуемся [E, 5.8.2(5)]:

$$\int_0^1 (1+\tau_1 w)^{-z-1}(1+\tau_2 w)^{z-1}\,dw = F_1(1, z+1, -z+1, 2; -\tau_1, -\tau_2),$$

где $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ есть гипергеометрическая функция Аппеля от двух переменных. Благодаря соотношению [E, 5.10(1)] последнее выражение можно упростить:

$$F_1(1, z+1, -z+1, 2; -\tau_1-\tau_2) = (1+\tau_2)^{-1} F\left(1, z+1; 2; \frac{\tau_2-\tau_1}{\tau_2+1}\right).$$

Но

$$F(1, z+1; 2; \tau) = \frac{1}{z\tau}((1-\tau)^{-z}-1),$$

и лемма доказана. •

Применяя лемму, мы получаем

$$\begin{aligned}\int_{r,s} &\frac{N(r,-s)}{(r+x)(s+y)}\,dr\,ds \\ &= t\left(\frac{x}{y}\right)^{z'} \int_{\tau_1,\tau_2} \phi_{z'}(\tau_1)\phi_{-z'}(\tau_2)e^{-x\tau_1-y\tau_2} \\ &\qquad \times \frac{1}{z}\frac{1}{\tau_2-\tau_1}\left(\left(\frac{1+\tau_2}{1+\tau_1}\right)^{z}-1\right)d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Умножим это соотношение на $(x+y)$. Заметим, что

$$(x+y)e^{-x\tau_1-y\tau_2} = -\left(\frac{\partial}{\partial\tau_1}+\frac{\partial}{\partial\tau_2}\right)e^{-x\tau_1-y\tau_2}.$$

Сейчас мы проинтегрируем выражение (4.11), умноженное на $(x+y)$, по частям. Следующая формула легко проверяется:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial\tau_1}+\frac{\partial}{\partial\tau_2}\right)\left[\phi_{z'}(\tau_1)\phi_{-z'}(\tau_2)\frac{1}{z}\frac{1}{\tau_2-\tau_1}\left(\left(\frac{1+\tau_2}{1+\tau_1}\right)^{z}-1\right)\right] \\ &\quad = \frac{1}{t}\phi_{z'-1}(\tau_1)\phi_{-z'-1}(\tau_2) \\ &\qquad - \frac{1}{t}\phi_{z'-1}(\tau_1)\phi_{-z'-1}(\tau_2)(1+\tau_1)^{-z}(1+\tau_2)^{z} \\ &\qquad - \phi_{z'}(\tau_1)\phi_{-z'}(\tau_2)(1+\tau_1)^{-z-1}(1+\tau_2)^{z-1}.\end{aligned}$$

Интегрирование по частям дает

$$
\begin{aligned}
&(x+y)\int\limits_{r,s}\frac{N(r,-s)}{(r+x)(s+y)}drds\\
&=\left(\frac{x}{y}\right)^{z'}\int\limits_{\tau_1,\tau_2}\Big(\phi_{z'-1}(\tau_1)\phi_{-z'-1}(\tau_2)\\
&\qquad-\phi_{z'-1}(\tau_1)\phi_{-z'-1}(\tau_2)(1+\tau_1)^{-z}(1+\tau_2)^{z}\\
&\qquad-t\,\phi_{z'}(\tau_1)\phi_{-z'}(\tau_2)(1+\tau_1)^{-z-1}(1+\tau_2)^{z-1}\Big)e^{-x\tau_1-y\tau_2}d\tau_1 d\tau_2.
\end{aligned}
$$

Используя гамма-интеграл Эйлера для первого слагаемого и интегральное представление функции Уиттекера (см. выше) для двух последних, мы можем переписать получившееся выражение в виде

$$
\begin{aligned}
&(x+y)\int\limits_{r,s}\frac{N(r,-s)}{(r+x)(s+y)}drds\\
&=1-\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z+z'}{2}}e^{\frac{x+y}{2}}(xy)^{-\frac{1}{2}}\\
&\qquad\times\left(W_{\frac{-z-z'+1}{2},\frac{z'-z}{2}}(x)W_{\frac{z+z'+1}{2},\frac{z-z'}{2}}(y)+tW_{\frac{-z-z'-1}{2},\frac{z'-z}{2}}(x)W_{\frac{z+z'-1}{2},\frac{z-z'}{2}}(y)\right),
\end{aligned}
$$

что эквивалентно (4.9). •

Заметим, что во всех четырех квадрантах выражения для $K(x,y)$ имеют одинаковый множитель

$$
\left|\frac{x}{y}\right|^{\frac{z+z'}{2}}e^{\frac{y-x}{2}}=\frac{|x|^{\frac{z+z'}{2}}e^{-\frac{x}{2}}}{|y|^{\frac{z+z'}{2}}e^{-\frac{y}{2}}}. \tag{4.12}
$$

(Например, если $x,y<0$, $K(-x,-y)=K_{--}(x,y)$ содержит множитель

$$
\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{z+z'}{2}}e^{\frac{x-y}{2}},
$$

который совпадает с (4.12) после замены знаков у x и y).

Но в определителях вида $\det[K(x_i,x_j)]$ все множители типа (4.12) сокращаются. Таким образом, мы можем ввести новое ядро $\mathcal{K}(x,y)$, удаляя множитель (4.12) из формул для $K(x,y)$, полученных в предложениях 4.1, 4.2, 4.5, 4.6. Немедленно проверяется, что $\mathcal{K}(x,y)$ совпадает с ядром Уиттекера, определенным во Введении, и, таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 4.9 (теорема А). *Корреляционные функции $\rho_n^{(z)}$ процесса $\mathcal{P}'_z$ имеют вид*

$$\rho_n^{(z)}(x_1, \dots, x_n) = \det[\mathcal{K}(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^*, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $\mathcal{K}(x, y)$ — ядро Уиттекера.

Замечание 4.10. Заметим, что блоки ядра Уиттекера являются вещественнозначными функциями, и

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{++}(x, y) &= \mathcal{K}_{++}(y, x), \\ \mathcal{K}_{--}(x, y) &= \mathcal{K}_{--}(y, x), \\ \mathcal{K}_{+-}(x, y) &= -\mathcal{K}_{-+}(y, x) \end{aligned}$$

(ср. замечание 4.7). Это означает, что ядро Уиттекера не симметрично, но „J-симметрично“ для

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Обсуждение общих точечных процессов, задаваемых такими ядрами, можно найти в [P.V, §1; BO2, §2; BOO, Appendix]. Различные примеры J-эрмитовых корреляционных ядер появлялись ранее в работах математических физиков по точно решаемым моделям систем с положительно и отрицательно заряженными частицами [AF, CJ1, CJ2, G, F1–F3] и ссылки в этих работах.

Список литературы

[Б1] Бородин А. М., *Характеры симметрических групп и корреляционные функции точечных процессов*, Функц. анал. и его прил. **34** (2000), №1, 12–28.

[ВК] Вершик А. М., Керов С. В., *Асимптотическая теория характеров симметрической группы*, Функц. анал. и его прил. **15** (1981), №4, 15–27.

[ГШ] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., *Обобщенные функции и действия над ними*, Физматгиз, М., 1959.

[Е] Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции.* Т. 1. *Гипергеометрические функции. Функции Лежандра*, Наука, М., 1973.

[Ма] Макдональд И., *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, М., 1985.

[Ол] Ольшанский Г. И., *Унитарные представления (G, K)-пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$*, Алгебра и анализ **1** (1989), №4, 178–209.

[С] Сошников А. Б., *Детерминантные случайные точечные поля*, Успехи мат. наук (в печати); Preprint `http://arXiv.org/abs/math/0002099` (на англ. яз.).

[AF] Alastuey A., Forrester P. J., *Correlations in two-component log-gas systems*, J. Statist. Phys. **81** (1995), 579–627.

[BDJ1] Baik J., Deift P., Johansson K., *On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), no. 4, 1119–1178; Preprint `http://arXiv.org/abs/math/9810105`.

[BDJ2] Baik J., Deift P., Johansson K., *On the distribution of the length of the second row of a Young diagram under Plancherel measure*, Preprint `http://arXiv.org/abs/math/9901118`, 1999.

[BW] Basor E. L., Widom H., *On a Toeplitz determinant identity of Borodin and Okounkov*, Integral Equations Operator Theory (to appear); Preprint `http://arXiv.org/abs/math/9909010`.

[B2] Borodin A., *Riemann–Hilbert problem and the discrete Bessel kernel*, Internat. Math. Res. Notices 2000, no. 9, 467–494; Preprint `http://arXiv.org/abs/math/9912093`.

[BOk] Borodin A., Okounkov A., *A Fredholm determinant formula for Toeplitz determinants*, Integral Equations Operator Theory (to appear); Preprint `http://arXiv.org/abs/math/9907165`.

[BOO] Borodin A., Okounkov A., Olshanski G., *Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), 491–515; Preprint `http://arXiv.org/abs/math/9905032`.

[BO1] Borodin A., Olshanski G., *Point processes and the infinite symmetric group*, Math. Res. Lett. **5** (1998), 799–816; Preprint `http://arXiv.org/abs/math/9810015`.

[BO2] Borodin A., Olshanski G., *Distributions on partitions, point processes, and the hypergeometric kernel*, Comm. Math. Phys. **211** (2000), no. 2, 335–358; Preprint `http://arXiv.org/abs/math/9904010`.

[BO3] Borodin A., Olshanski G., *Z-Measures on partitions, Robinson–Schensted–Knuth correspondence, and $\beta = 2$ random matrix ensembles*, Random Matrix Theory and its Applications (to appear); Preprint `http://arXiv.org/abs/math/9905189`.

[CJ1] Cornu F., Jancovici B., *On the two-dimensional Coulomb gas*, J. Statist. Phys. **49** (1987), no. 1–2, 33–56.

[CJ2] Cornu F., Jancovici B., *The electrical double layer: a solvable model*, J. Chem. Phys. **90** (1989), 2444.

[DVJ] Daley D. J., Vere-Jones D., *An introduction to the theory of point processes*, Springer Ser. Statist., Springer-Verlag, New York–Berlin, 1988.

[Dy] Dyson F. J., *Statistical theory of the energy levels of complex systems.* I, II, III, J. Math. Phys. **3** (1962), 140–156, 157–165, 166–175.

[F1] Forrester P. J., *Positive and negative charged rods alternating along a line: exact results*, J. Statist. Phys. **45** (1986), no. 1–2, 153–169.

[F2] Forrester P. J., *Solvable isotherms for a two-component system of charged rods on a line*, J. Statist. Phys. **51** (1988), no. 3–4, 457–479.

[F3] Forrester P. J., *Exact results for correlations in a two-component log-gas*, J. Statist. Phys. **54** (1989), no. 1–2, 57–79.

[G] Gaudin M., *L'isotherme critique d'un plasma sur réseau* ($\beta = 2$, $d = 2$, $n = 2$), J. Physique **46** (1985), no. 7, 1027–1042.

[J] Johansson K., *Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure*, Preprint `http://arXiv.org/abs/math/9906120`, 1999.

[KOO] Kerov S., Okounkov A., Olshanski G., *The boundary of the Young graph with Jack edge multiplicities*, Internat. Math. Res. Notices **1998**, no. 4, 173–199.

[KOV] Kerov S., Olshanski G., Vershik A., *Harmonic analysis on the infinite symmetric group. A deformation of the regular representation*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **316** (1993), 773–778 (готовится развернутая версия).

[L] Lenard A., *Momentum distribution in the ground state of the one-dimensional system of impenetrable bosons*, J. Math. Phys. **5** (1964), no. 7, 930–943.

[Mac1] Macchi O., *The coincidence approach to stochastic point processes*, Adv. in Appl. Probab. **7** (1975), 83–122.

[Mac2] Macchi O., *The fermion process — a model of stochastic point process with repulsive points*, Transactions of the Seventh Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes and of the Eighth European Meeting of Statisticians (Tech. Univ. Prague, Prague, 1974), Vol. A, Reidel, Dordrecht, 1977, pp. 391–398.

[Me] Mehta M. L., *Random matrices*, 2nd ed., Academic Press, Inc., Boston, MA, 1991.

[Ok1] Okounkov A., *Random matrices and random permutations*, Preprint `http://arXiv.org/abs/math/9903176`, 1999.

[Ok2] Okounkov A., *Infinite wedge and measures on partitions*, Preprint `http://arXiv.org/abs/math/9907127`, 1999.

[Ok3] Okounkov A., $SL(2)$ *and z-measures*, Random Matrix Theory and its Applications (to appear); Preprint `http://arXiv.org/abs/math/0002135`.

[P.I] Olshanski G., *Point processes and the infinite symmetric group.* Part I: *The general formalism and the density function*, Preprint `http://arXiv.org/abs/math/9804086`, 1998.

[P.II] Borodin A., *Point processes and the infinite symmetric group.* Part II: *Higher correlation functions*, Preprint `http://arXiv.org/abs/math/9804087`, 1998.

[P.III] Borodin A., Olshanski G., *Point processes and the infinite symmetric group.* Part III: *Fermion point processes*, Preprint `http://arXiv.org/abs/math/9804088`, 1998.

[P.IV] Borodin A., *Point processes and the infinite symmetric group.* Part IV: *Matrix Whittaker kernel*, Preprint `http://arXiv.org/abs/math/9810013`, 1998.

[P.V] Olshanski G., *Point processes and the infinite symmetric group.* Part V: *Analysis of the matrix Whittaker kernel*, Preprint `http://arXiv.org/abs/math/9810014`, 1998.

[T] Thoma E., *Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe*, Math. Z. **85** (1964), 40–61.

[TW] Tracy C. A., Widom H., *Level-spacing distributions and the Airy kernel*, Comm. Math. Phys. **159** (1994), 151–174.

Институт проблем передачи информации РАН
Добрушинская математическая лаборатория
Россия, 101447 Москва
Большой Каретный, 19

Поступило 9 марта 2000 г.

Department of Mathematics
The University of Pennsylvania, Philadelphia
PA 19104-6395, USA
E-mail: borodine@math.upenn.edu