А. А. Михалёв, Подалгебры свободных p-супер븀алгебр Ли, *Матем. заметки*, 1988, том 43, выпуск 2, 178–191

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 43, № 2 (1988)

ПОДАЛГЕБРЫ СВОБОДНЫХ p-СУПЕРАЛГЕБР ЛИ

А. А. Михалев

Введение. Вводится понятие p-супералгебры Ли. Основной объект изучения — свободная p-супералгебра Ли. Приложения относятся к теории супералгебр Ли. Для свободных p-супералгебр Ли получен аналог теоремы Ширшова — Витта [1, 2] о свободе подалгебр (теорема 2.17) и теоремы Кона [3] о порождающих группы автоморфизмов свободной алгебры Ли конечного ранга (следствие 2.19). Отмечены свойства подалгебр конечной коразмерности (теорема 2.21). Для свободных p-супералгебр Ли получен аналог теоремы Кукина [4] о пересечении конечно порожденных подалгебр (теорема 3.4). Следствием является утверждение о конечной порожденности пересечения конечно порожденных подалгебр в свободной супералгебре Ли в случае поля положительной характеристики (теорема 3.6).

Результаты этой работы докладывались на научно-исследовательском семинаре по алгебре в Московском университете [5], на 24-й Всесоюзной студенческой научной конференции в Новосибирске [6], а также на Всесоюзном семинаре по модулярным алгебрам Ли в Горьком в 1986 г.

§ 1. Основные определения и используемые результаты.

Определение 1.1. Пусть K — поле. Назовем $\mathbf{Z}_2$-градуированную K-алгебру $R = R_0 \oplus R_1$ *супералгеброй Ли*, если

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{d(x)d(y)} [y, [x, z]]$$

и

$$[x, y] = -(-1)^{d(x)d(y)} [y, x]$$

для любых однородных элементов $x, y, z \in R$, где $d(x) = i$ при $x \in R_i$.

Определение 1.2. Супералгебру Ли R над полем K характеристики $p > 0$ назовем *p-супералгеброй Ли*, если на ее четной однородной компоненте R_0 определена операция $[p]$ (т. е. для $x \in R_0$ результат операции $x^{[p]}$ принадлежит R_0), удовлетворяющая для всех $y \in R$, $x, x_1, x_2 \in R_0$, $\alpha \in K$ следующим условиям:

$$(\alpha x)^{[p]} = \alpha^p x^{[p]}, \quad [y, x^{[p]}] = [[\ldots \underbrace{[y, x], \ldots], x}_{p \text{ раз}}],$$

$$(x_1 + x_2)^{[p]} = x_1^{[p]} + x_2^{[p]} + \varphi(x_1, x_2),$$

где

$$\varphi(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{p-1} s_i(x_1, x_2)$$

и $s_i(x_1, x_2)$ — коэффициент при γ^{i-1} в записи многочлена

$$[[\ldots [x_1, \underbrace{(\gamma x_1 + x_2)], \ldots], (\gamma x_1 + x_2)}_{p-1 \text{ раз}})]$$

в виде суммы $\sum_{i=1}^{p-1} \gamma^{i-1} i s_i(x_1, x_2)$.

Замечание 1.3. а) При $R = R_0$ в определении p-супералгебры Ли получаем определение p-алгебры Ли (см. [7, § 1.11]). б) Если $Q = Q_0 \oplus Q_1$ — $\mathbf{Z}_2$-градуированная ассоциативная K-алгебра, то через $Q^{(-)}$ обозначим супералгебру Ли Q с операцией $[\ ,\ ]$, где $[a, b] = ab - (-1)^{d(a)d(b)} ba$ для однородных элементов a, b. Если $\operatorname{char} K = p > 0$ и $x^{[p]} = x^p$ для $x \in Q_0$, то $Q^{(-)}$ с операцией $[p]$ является p-супералгеброй Ли, обозначаемой $Q^{(-,p)}$. Проверка этого факта проводится аналогично п. 1.1.11 [7].

Пусть X — множество, $V[X]$ — группоид неассоциативных одночленов в алфавите X, $\langle X \rangle$ — полугруппа ассоциативных слов, γ: $V[X] \to \langle X \rangle$ — гомоморфизм забывания скобок, $l(z) = l(\gamma(z))$ — длина одночлена z или слова $\gamma(z)$.

Пусть $X = X_0 \cup X_1$ — $\mathbf{Z}_2$-градуированное множество, $F[X]$ и $F\langle X \rangle$ — свободные $\mathbf{Z}_2$-градуированные неассоциативная и ассоциативная K-алгебры соответственно, I — однородный идеал тождеств супералгебры Ли (см. [8, 9]), $L[X] = F[X]/I$ — свободная супералгебра Ли, $\bar{v} = v + I$ для $v \in F[X]$.

Пусть множество $X = X_0 \bigcup X_1$ линейно упорядочено и множество $\langle X \rangle$ упорядочено лексикографически. Одночлен $u \in V[X]$ называется *правильным* [10], если либо $u \in X$, либо а) из $u = (u_1)(u_2)$ следует, что u_1, u_2 — правильные одночлены и $\gamma(u_1) > \gamma(u_2)$; б) из $u = ((u_1)(u_2))(u_3)$ следует, что $\gamma(u_2) \leqslant \gamma(u_3)$.

Одночлен $u \in V[X]$ называется *s-правильным* [8, 9], если либо u — правильный одночлен, либо $u = (v)(v)$, где v — правильный одночлен и $d(v) = 1$.

Пусть $[X]$ — подалгебра в $F\langle X \rangle^{(-)}$, порожденная X, π: $L[X] \to [X]$ — гомоморфизм супералгебр Ли, порожденный отображением $x + I \to x$ для $x \in X$.

ЛЕММА 1.4 (см. [8, 9]). *Если* char $K \neq 2,3$, *то гомоморфизм* π *является изоморфизмом супералгебр Ли, следовательно,* $[X]$ *— свободная супералгебра Ли.*

ТЕОРЕМА 1.5 (см. [8, 9, 11]). *Если* char $K \neq 2,3$, *то смежные классы, представителями которых являются s-правильные одночлены, образуют линейный базис в* $L[X]$.

Определение 1.6. Элемент $w \in F\langle X \rangle$ назовем *as-правильным одночленом в алфавите* X, если $w = \pi(\bar{u})$, где u — s-правильный одночлен, и ps-правильным одночленом, если либо w — as-правильный одночлен, либо

$$w = (\ldots((\pi(\bar{v}))\underbrace{^p)^p\ldots)^p}_{k \text{ раз}} = (\pi(\bar{v}))^{p^k}, \qquad k \in \mathbf{N},$$

где v — s-правильный одночлен и $d(v) = 0$.

Определение 1.7. На множестве ps-правильных одночленов $PS[X]$ зададим отображение ψ: $PS[X] \to \langle X \rangle$ следующим образом: для $\pi(\bar{u}) \in PS[X]$ положим $\psi(\pi(\bar{u})) = \gamma(u)$; для $(\pi(\bar{u}))^{p^s} \in PS[X]$ положим $\psi((\pi(\bar{u}))^{p^s}) = (\gamma(u))^{p^s}$.

ТЕОРЕМА 1.8 [8, 9, 11]. *В случае* char $K \neq 2,3$ *любая* $\mathbf{Z}_2$*-однородная подалгебра свободной супералгебры Ли свободна.*

§ 2. Аналог теоремы Ширшова — Витта о свободе подалгебр в случае свободной p-супералгебры Ли. Всюду в этом параграфе K — поле, char $K = p > 0$, $p \neq 2,3$.

Пусть $X = X_0 \bigcup X_1$ — $\mathbf{Z}_2$-градуированное множество, $L^p[X]$ — подалгебра p-супералгебры Ли $F\langle X \rangle^{(-,p)}$, порожденная множеством X (см. 1.3).

ЛЕММА 2.1. *В p-супералгебре Ли* $L^p[X]$ *ps-правильные одночлены образуют базис линейного пространства,* Доказательство. а) Из теоремы 1.5, леммы 1.4 и определения 1.2 операции $[p]$ следует, что любой элемент из $L^p[X]$ является линейной комбинацией ps-правильных одночленов в алфавите X. б) Из леммы 1.4 следует, что свободная $\mathbf{Z}_2$-градуированная ассоциативная алгебра $F\langle X\rangle$ является универсальной обертывающей для свободной супералгебры Ли $[X]$. Из теоремы 1.5, леммы 1.4 и аналога теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта (см., например, [12]) получаем, что ps-правильные одночлены являются частью линейного базиса алгебры $F\langle X\rangle$ и, следовательно, они линейно независимы.

ЛЕММА 2.2. *Построенная p-супералгебра Ли $L^p[X]$ является свободной p-супералгеброй Ли с множеством $X = X_0 \bigcup X_1$ свободных образующих, т. е. она порождается множеством X и любое отображение φ множества X в любую p-супералгебру Ли R такое, что $\varphi(X_0) \subseteq R_0$, $\varphi(X_1) \subseteq R_1$, продолжается до гомоморфизма φ: $L^p[X] \to R$ p-супералгебр Ли.*

Доказательство проведем по схеме из п. 2.7.1 [7]. Любой элемент $a \in L^p[X]$ имеет вид

$$a = \sum \lambda_i (\pi(\overline{\omega}_i))^{p^{t_i}} + \sum \beta_j \pi(\bar{v}_j),$$

где $\lambda_i, \beta_j \in K$, ω_i, v_j — s-правильные одночлены, $d(\omega_i) = 0$, $t_i \in \mathbf{N}$ для всех i, j. Отображение φ продолжается до гомоморфизма супералгебр Ли φ_1: $[X] \to R$. Положим

$$\overline{\varphi}(a) = \sum \lambda_i (\varphi_1(\pi(\overline{\omega}_i)))^{[p]^{t_i}} + \sum \beta_j \varphi_1(\pi(\bar{v}_j)).$$

Определение 2.3. *Рангом* свободной p-супералгебры Ли $L = L^p[X]$ назовем число $\operatorname{rank} L = |X| = t + s$, где $t = |X_0|$, $s = |X_1|$. Заметим, что $t = \dim L_0/[L, L]_0$, $s = \dim L_1/[L, L]_1$, $\operatorname{rank} L = \dim L/[L, L]$.

Определение 2.4. *Длиной* $l_X(a)$ элемента $a \in L^p[X]$ назовем максимальную длину ps-правильных одночленов в записи элемента a. Обозначим через a^0 старшую часть элемента a: если $a = \sum_{i \in I} \alpha_i \omega_i$, где ω_i — ps-правильные одночлены, $\alpha_i \in K$, $\alpha_i \neq 0$, это $a^0 = \sum_{i \in \Omega} \alpha_i \omega_i$, где $\Omega = \{i \in I \mid l(\omega_i) = l(a)\}$. Элемент $a \in L^p[X]$ назовем *l-однородным*, если $a = a^0$. Аналогично определяется длина $l_x(a)$ и *однородность* по выделенному образующему $x \in X$. Элемент, однородный по любому образующему $x \in X$, называется *полиоднородным*.

О п р е д е л е н и е 2.5. Назовем подмножество $\mathbf{Z}_2$-однородных элементов $M = \{a_i\}$ в свободной p-супералгебре Ли *приведенным*, если для любого i старшая часть a_i^0 элемента a_i не лежит в подалгебре, порожденной множеством $\{a_j^0, j \neq i\}$.

О п р е д е л е н и е 2.6. Назовем подмножество $\mathbf{Z}_2$-однородных элементов M в $L^p[X]$ *независимым*, если M является множеством свободных образующих порожденной им подалгебы в $L^p[X]$.

О п р е д е л е н и е 2.7. Пусть $x \in X$. Вполне упорядочим множество X так, что x — наименьший элемент. Продолжим этот порядок до частичного порядка $\rhd$ на $\langle X \rangle$ так, что сравнимы по числу инверсий лишь слова одного состава (слово с большим числом инверсий больше). Заметим, что этот порядок обладает полугрупповым свойством: если $a \rhd b$, $c \unrhd d$ или $a \unrhd b$, $c \rhd d$, то $ab \rhd cd$.

О п р е д е л е н и е 2.8. Пусть $x \in X_0$, $z \in X_1$. Рассмотрим в $L^p[X]$ следующие подмножества:

$$W(z) = \{\pi(\bar{y}),\ \pi(\overline{yz}),\ \pi(\overline{zz}) \mid y \in X \setminus z\}$$

$$PZ(x) = \{\pi(\bar{y}), (\pi(\bar{x}))^p, \pi(\overline{yx}), \pi(\overline{(yx)x}), \ldots$$
$$\ldots, \pi(\overline{(\ldots(y\underbrace{x)x\ldots)x}_{p-1\ \text{раз}}}) \mid y \in X \setminus x\}.$$

ЛЕММА 2.9. 1) *Пусть $x \in X_0$ — наименьший элемент вполне упорядоченного множества $X = X_0 \bigcup X_1$ и $u \in PZ(x)$. Тогда $u = \psi(u) + \sum \alpha_i u_i$, где u_i — ассоциативные слова, $\alpha_i \in K$, $\psi(u) \rhd u_i$ для всех i* (см. 1.7).

2) *Пусть $z \in X_1$ — наименьший элемент вполне упорядоченного множества $X = X_0 \bigcup X_1$ и $u \in W(z)$. Тогда $u = \alpha\psi(u) + \sum \alpha_i u_i$, где u_i — ассоциативные слова, $\alpha = 1$ или $\alpha = 2$, $\alpha_i \in K$, $\psi(u) \rhd u_i$ для всех i.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\psi((\pi(\bar{x}))^p) = x^p$, то утверждение 1) леммы следует из леммы 2.3 [8]. Для элементов из $W(z)$ имеем

$$\pi(\overline{zz}) = 2zz, \quad \pi(\bar{y}) = y,$$

$$\pi(\overline{yz}) = yz - (-1)^{d(y)d(z)} zy, \quad yz \rhd zy,$$

что доказывает лемму.

ЛЕММА 2.10. *Рассмотрим значения ассоциативного слова f на элементах множеств $PZ(x)$ и $W(z)$: пусть $u = f(z_i)$, $v = f(w_i)$, где $z_i \in PZ(x)$, $w_i \in W(z)$. Тогда старшие части многочленов u и v в смысле порядка $\rhd$ из*

2.7 *имеют вид* $u_0 = f(\psi(z_i))$, $v_0 = 2^l f(\psi(w_i))$, *где* $l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из леммы 2.9 и полугруппового свойства порядка $\triangleright$.

ЛЕММА 2.11. *Допустим, что значения слов f и g от некоторого фиксированного набора элементов множества $\psi(PZ(x))$ (или $\psi(W(z))$) совпадают. Тогда слова f и g совпадают.*

Доказательство. Пусть

$$f(a_1, \ldots, a_n) = a_{i_1} \ldots a_{i_k} = a_{j_1} \ldots a_{j_l} = g(a_1, \ldots, a_n).$$

Покажем, что $k = l$, $i_q = j_q$ для $1 \leqslant q \leqslant k$, проводя индукцию по k. Утверждение очевидно при $k = 1$. Предположим, что оно верно для $k \leqslant n - 1$. Пусть $k = n$. Если сочетание xy, где $y \in X \setminus x$, присутствует в слове $a_{i_1} \ldots \ldots a_{i_k}$, то рассмотрим самое левое его вхождение. Так как xy, $y \in X \setminus x$, не входит ни в один из a_{i_j}, то применимо предположение индукции и утверждение доказано. Если же сочетание xy, $y \in X \setminus x$, не входит в наше слово, то возможны два случая: а) $y \in X \setminus x$ входит в наше слово, и тогда $a_{i_1} \ldots a_{i_k} = y\underbrace{x \ldots x}_{m \text{ раз}}$, а для этого элемента представление в виде $a_{i_1} \ldots a_{i_k}$, где $a_{i_j} \in \psi(PZ(x))$ или $a_{i_j} \in \psi(W(z))$, единственно; б) никакой элемент $y \in X \setminus x$ не входит в $a_{i_1} \ldots a_{i_k}$, и тогда $a_{i_1} \ldots a_{i_k} = \underbrace{x \ldots x}_{m \text{ раз}}$, откуда, если $d(x) = 0$, то $m = pt$; если же $d(x) = 1$, то $m = 2t$ и требуемое представление единственно.

ЛЕММА 2.12. *Множества $PZ(x)$ и $W(z)$ являются множествами свободных образующих ассоциативных подалгебр, порожденных ими в свободной $\mathbf{Z}_2$-градуированной ассоциативной алгебре $F\langle X\rangle$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.8 [8]: существование нетривиального ассоциативного соотношения между элементами множества $PZ(x)$ или $W(z)$ противоречит утверждениям лемм 2.10 и 2.11.

Следствие 2.13. *Множества $PZ(x)$ и $W(z)$ являются независимыми множествами элементов* (см. определение 2.6).

ЛЕММА 2.14. *Пусть x — наименьший элемент вполне упорядоченного множества X, w — ps-правильный одночлен в алфавите X, $w \neq x$, $l_x(w) \neq 0$. Тогда* 1) *если* $d(x) = 0$, *то* $w = u$ *в* $L^p[X]$, *где* u *— одночлен от элемен-*

тов множества $PZ(x)$, $l_{PZ(x)}(w) < l_X(w)$; 2) *если* $d(x) = 1$, *то* $w = 2^{-k}u$ *в* $L^p[X]$, *где* $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, u — *одночлен от элементов множества* $W(x)$, $l_{W(x)}(w) < l_X(w)$.

Доказательство. Заметим, что $l_X(x^{p^s}) = p^s$, но $l_{PZ(x)}(x^{p^s}) = s$. Рассмотрим множество

$$Z(x) = \{\pi(\bar{y}), \pi(\overline{yx}), \ldots, \pi(\overline{(\ldots(yx)\underbrace{x\ldots)x}_{k\text{ раз}}}), \ldots \ldots | k \in \mathbf{N}, y \in X \setminus x\}.$$

Пусть $d(x) = 0$ и $k > p$. Тогда $k = pt + s$, $t \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant s < p$, $\pi(\overline{(\ldots(y\underbrace{x)\ldots)x}_{k\text{ раз}}}) = [\pi(\overline{(\ldots(y\underbrace{x)\ldots)x}_{s\text{ раз}}}), x^{p^t}]$ в $L^p[X]$.

Значит, элементы множества $Z(x)$ записываются в виде одночленов от элементов множества $PZ(x)$ без увеличения длины. Применяя теперь следствие 2.5 [8], получаем утверждение нашей леммы.

Определение 2.15. Пусть $S = \{s_\alpha, \alpha \in I\}$ — некоторое $\mathbf{Z}_2$-однородное подмножество в свободной p-супералгебре Ли $L^p[X]$. Назовем *элементарным преобразованием* множества S отображение ω: $S \to L^p[X]$ такое, что $\omega(s_\alpha) = s_\alpha$ для всех $\alpha \in I \setminus \beta$,

$$\omega(s_\beta) = \lambda s_\beta + \omega(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_t}),$$

где

$$\lambda \in K, \lambda \neq 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t \neq \beta,$$
$$d(\omega(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_t})) = d(s_\beta),$$
$$\omega(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_t}) \in L^p[x_1, x_2, \ldots],$$

где $d(x_{\alpha_k}) = d(s_{\alpha_k})$.

Элементарное преобразование ω назовем *треугольным*, если

$$l_X(\omega(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_t})) \leqslant l_X(s_\beta).$$

ЛЕММА 2.16. *Элементарные преобразования множества свободных образующих индуцируют автоморфизмы свободной p-суперапгебры Ли.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.7.2 [7].

ТЕОРЕМА 2.17. *Пусть* K — *поле*, $\operatorname{char} K = p \neq 0, 2, 3$, $L^p[X]$ — *свободная p-суперапгебра Ли. Тогда любое приведенное подмножество в* $L^p[X]$ *независимо и,* *следовательно, любая $\mathbf{Z}_2$-однородная подалгебра H в $L^p[X]$ является свободной p-супералгеброй Ли.*

Доказательство следует схеме доказательства теорем о свободе подалгебр для свободных алгебр Ли [1], p-алгебр Ли [2, 7] и супералгебр Ли [8, 9].

1. Для подалгебры H методом Куроша строится приведенное множество порождающих, а именно: $M = \bigcup_{j=0}^{\infty} M_j$, где M_j состоит из Z_2-однородных элементов длины j, или пустое множество. Положим $M_0 = \varnothing$. Пусть $M_0, \ldots, M_i$ уже определены и S_i — подпространство элементов длины, не превосходящей $i+1$, в подалгебре, порожденной множеством $\bigcup_{j=0}^{i} M_j$. Тогда в качестве M_{i+1} возьмем максимальное подмножество $\mathbf{Z}_2$-однородных элементов алгебры H, имеющих длину не более $i+1$, линейно независимое по модулю подпространства S_i. Ясно, что множество M является приведенным и порождает подалгебру H.

2. Докажем, что приведенное множество M является независимым. Допустим противное, т. е. что для некоторого набора элементов $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$ выполняется нетривиальное соотношение, т. е. существует элемент $g \in L^p[Y]$, где $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$ и $d(y_j) = d(a_{i_j})$ для всех $j = 1, \ldots, k$ такой, что $g \neq 0$, $g(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = 0$.

ЛЕММА 2.18. *Пусть $M_1 = \{a_1, \ldots, a_k\}$ — приведенное множество в $L^p[X]$, между элементами которого существует нетривиальное соотношение. Тогда найдется приведенное множество $M_2 = \{b_1, \ldots, b_k\}$ полиоднородных элементов, между которыми существует нетривиальное соотношение, таких, что $l(a_i) = l(b_i)$ для всех $i = 1, \ldots, k$.*

Доказательство аналогично доказательству лемм 5, 6, 7 [1].

Лемма 2.18 позволяет считать, что при нашем предположении существует нетривиальное соотношение между полиоднородными элементами приведенного множества $M_2 = \{b_1, \ldots, b_k\}$, причем $l_X(b_j) = l_X(a_{i_j})$. Из приведенности и полиоднородности множества M_2 вытекает существование элемента $x \in X$ такого, что $b_i \neq x$ для всех $i = 1, \ldots, k$, $l_x(b_{i_0}) \neq 0$ для некоторого i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant k$. Переупорядочим множество X, сделав x наименьшим в X. Из 2.13, 2.14 следует, что все b_i записываются в виде многочленов от свободных образующих из $PZ(x)$, если

$d(x) = 0$, и из $W(x)$, если $d(x) = 1$, $l_{PZ(x)(W(x))}(b_i) \leqslant \leqslant l_X(b_i)$ для всех i, причем $l_{PZ(x)(W(x))}(b_{i_0}) < l_X(b_{i_0})$. Приведем с помощью треугольных преобразований множество M_2 к приведенному множеству $M_3 = \{b'_1, \ldots, b'_k\}$ относительно новых свободных образующих. При этом существует некоторое нетривиальное соотношение между элементами множества M_3. Заметим, что $l(b'_i) \leqslant l(b_i)$ для всех i. Таким образом, мы понизили набор чисел $(l(a_{i_1}), \ldots, l(a_{i_k}))$. Проводя приведенные рассуждения достаточное число раз, мы получаем, что существует нетривиальное соотношение в свободной p-супералгебре Ли между элементами приведенного множества полиоднородных элементов, длина каждого из которых равна единице. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.17.

Следствие 2.19. *Элементарные автоморфизмы порождают группу автоморфизмов свободной р-супералгебры Ли конечного ранга.*

Следствие 2.20. *Пусть H — $\mathbf{Z}_2$-однородная подалгебра свободной р-супералгебры Ли, $\{f_i\}$ — ее приведенное множество образующих. Тогда старшая часть a^0 любого элемента $a \in H$ является многочленом от элементов множества $\{f_i^0\}$.*

ТЕОРЕМА 2.21. *Пусть K — поле, $p = \mathrm{char}\, K \neq \neq 0, 2, 3$, $L^p[X]$ — свободная р-супералгебра Ли, $|X| = = N < \infty$, H — ее $\mathbf{Z}_2$-однородная подалгебра, $H = = H_0 \oplus H_1$, $\dim L_0^p/H_0 = t < \infty$, $\dim L_1^p/H_1 = s < \infty$. Тогда* $\mathrm{rank}\, H = 2^s p^t (N - 1) + 1$.

Доказательство проведем индукцией по $t + s$. Основание индукции: $t = 0$, $s = 0$. Допустим, что утверждение доказано для $t + s < n$. Пусть $t + s = n$. Выберем приведенное независимое множество M образующих подалгебры H. Рассмотрим множество старших частей $M^0 = \{m^0 \mid m \in M\}$. В силу теоремы 2.17 множество M^0 порождает свободную p-супералгебру Ли и $\mathrm{rank}\, L^p[M^0] = \mathrm{rank}\, H$. Рассматривая фильтрацию в подалгебре H по длине элемента в $L^p[X]$ и используя лемму 1.10.4 [7] и следствие 2.20, получаем, что $\dim L_0^p/H_0 = = \dim L_0^p/L_0^p[M^0]$ и $\dim L_1^p/H_1 = \dim L_1^p/L_1^p[M^0]$. Таким образом, достаточно доказать формулу для $\mathrm{rank}\, L^p[M^0]$. Проводя, если необходимо, невырожденную линейную замену базисов линейных оболочек множеств X_0 и X_1, можно считать, что $L^p[M^0]$ лежит в

$L^p [PZ(x)]$ или в $L^p [W(z)]$ для некоторых $x \in X_0$, $z \in X_1$. Так как $|PZ(x)| = p(N-1)+1$ и $|W(z)| = 2(N-1)+1$, то в силу предположения индукции получаем требуемый результат.

Замечание 2.22. Ранее автором была доказана теорема об определяемости конечно порожденной $\mathbf{Z}_2$-однородной подалгебры свободной супералгебры Ли своей нечетной компонентой (см. [5, 6]). В свободной p-супералгебре Ли это уже не так, как показывает следующий пример. Пусть $X_0 = \{x\}$, $X_1 = \{y\}$, $A = L^p[X]$, $B = L^p[PZ(x)]$. Тогда $\operatorname{rank} A < \infty$, $\operatorname{rank} B < \infty$, $A_1 = B_1 \neq 0$, но $A_0 \neq B_0$.

§ 3. Пересечение конечно порожденных подалгебр в свободной p-супералгебре Ли и в свободной супералгебре Ли над полем характеристики $p > 0$, $p \neq 2, 3$. Везде в этом параграфе K — поле, $\operatorname{char} K = p \neq 0, 2, 3$.

ЛЕММА 3.1. *Пусть A, B — $\mathbf{Z}_2$-однородные подалгебры в свободной p-супералгебре Ли $L^p[X]$. Тогда, если B является свободным множителем $\mathbf{Z}_2$-однородной подалгебры $\tilde{B}$ в $L^p[X]$, то подалгебра $A \cap B$ является свободным множителем подалгебры $A \cap \tilde{B}$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 6 [4] с использованием теоремы 2.17.

Следствие 3.2. *Пусть A, B — $\mathbf{Z}_2$-однородные подалгебры в $L^p[X]$. Если A, B являются свободными множителями $\mathbf{Z}_2$-однородных подалгебр $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ в $L^p[X]$ соответственно, то подалгебра $A \cap B$ является свободным множителем подалгебры $\tilde{A} \cap \tilde{B}$.*

ЛЕММА 3.3. *Пусть $|X| < \infty$, H — $\mathbf{Z}_2$-однородная подалгебра конечного ранга в $L^p[X]$. Тогда H вкладывается свободным множителем в $\mathbf{Z}_2$-однородную подалгебру $\tilde{H}$ конечной коразмерности в $L^p[X]$.*

Утверждение этой леммы аналогично утверждению теоремы 3 [4].

Доказательство. Выберем в H приведенное подмножество $M = \{m_1, \ldots, m_l\}$ свободных образующих. Принимая во внимание доказательство теоремы 2.21, достаточно подобрать $\mathbf{Z}_2$-однородное множество R l-однородных элементов такое, что $M^0 \cup R$ — приведенное множество и $\dim L^p[X]/L^p[M^0 \cup R] < \infty$. Пусть $k = \max\limits_{1 \leq i \leq l} l_X(m_i)$, B — подалгебра в $L^p[X]$, являющаяся линейной оболочкой ps-правильных одночленов длины более чем k, R_1 — приведенное l-однородное множество образующих подалгебры B. Рассмотрим l-однородное множество $M^0 \bigcup R_1$. Приведем множество $M^0 \bigcup R_1$ треугольными преобразованиями к требуемому виду. Так как для $y \in B$ $l(y) > k$, то треугольные преобразования имеют вид $m_i^0 \to m_i^0$, $1 \leqslant i \leqslant l$, $r_j \to r_j'$, $l(r_j') = l(r_j)$, $d(r_j') = d(r_j)$, $r_j'^0 = r_j'$ или $r_j' = 0$; аналогично, далее, для множеств $R_1' = \{r_j' \mid r_j \in R_1\}$, R_1'' и так далее. С помощью таких преобразований мы получим приведенное l-однородное множество $M^0 \bigcup R$, порождающее ту же подалгебру, что и множество $M^0 \bigcup R_1$, которая имеет конечную коразмерность в $L^p[X]$, так как содержит подалгебру B конечной коразмерности в $L^p[X]$. Тем самым лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть K — поле, $p = \mathrm{char}\, K \neq 0, 2, 3$, $L^p[X]$ — свободная p-супералгебра Ли, A, B — $\mathbf{Z}_2$-однородные конечно порожденные подалгебры в $L^p[X]$. Тогда подалгебра $A \bigcap B$ конечно порождена.*

Доказательство. Можно считать, что $|X| < \infty$. По лемме 3.3 вложим подалгебры A и B свободными множителями в подалгебры $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ конечной коразмерности в $L^p[X]$ соответственно. В силу 3.2 подалгебра $A \bigcap B$ является свободным множителем подалгебры $\tilde{A} \bigcap \tilde{B}$, имеющей в $L^p[X]$ конечную коразмерность. В силу 2.21 $\mathrm{rank}\, \tilde{A} \bigcap \tilde{B} < \infty$. Следовательно, $\mathrm{rank}\, A \bigcap B < \infty$. Теорема доказана.

Определение 3.5. Введем отношение порядка на $PS[X]$, полагая $u_1 > u_2$, если $\psi(u_1) > \psi(u_2)$ в $\langle X \rangle$ (см. 1.7). *Старшим членом* $\bar{a}$ для элемента $a \in L^p[X]$ назовем старший ps-правильный одночлен в записи элемента a.

ТЕОРЕМА 3.6. *Пусть K — поле, $p = \mathrm{char}\, K \neq 0, 2, 3$, $L[X]$ — свободная супералгебра Ли, A, B — $\mathbf{Z}_2$-однородные конечно порожденные подалгебры в $L[X]$. Тогда подалгебра $A \bigcap B$ конечно порождена.*

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 5 [4]. Можно считать, что $|X| < \infty$. Рассмотрим сначала случай, когда поле K совершенно, $\mathrm{char}\, K \neq 0, 2, 3$. Вложим свободную супералгебру Ли $[X]$ в свободную p-супералгебру Ли $L^p[X]$. В силу теоремы 1.8 и леммы 1.4 существуют свободные $\mathbf{Z}_2$-однородные системы образующих алгебр A и B соответственно ($A = [M]$, $B = [N]$). По теореме 3.4 $L^p[M] \bigcap L^p[N] = L^p[H]$, $|H| < \infty$. Произвольный элемент $h \in H$

запишем в виде

$$(*)\quad \begin{cases} h = \sum \alpha_{i0} s_{i0} + \sum \alpha_{i1} s_{i1}^{p} + \ldots + \sum \alpha_{im} s_{im}^{p^m}, \\ h = \sum \beta_{i0}\sigma_{i0} + \sum \beta_{i1}\sigma_{i1}^{p} + \ldots + \sum \beta_{im}\sigma_{im}^{p^m}, \end{cases}$$

где (см. 1.6) s_{ij} — as-правильные одночлены в алфавите M, $s_{ij}^{p^j}$ — ps-правильные одночлены в алфавите M, σ_{ij} — as-правильные одночлены в алфавите N, $\sigma_{ij}^{p^j}$ — ps-правильные одночлены в алфавите N, $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in K$. Тогда

$$\sum_{j\geqslant 1} \sum_i \alpha_{ij} s_{ij}^{p^j} - \sum_{j\geqslant 1} \sum_i \beta_{ij}\sigma_{ij}^{p^j} \in [X].$$

Так как поле K совершенно, то для элемента

$$f = \sum_{j\geqslant 1} \sum_i \sqrt[p]{\alpha_{ij}}\, s_{ij}^{p^{j-1}} - \sum_{j\geqslant 1} \sum_i \sqrt[p]{\beta_{ij}}\, \sigma_{ij}^{p^{j-1}}$$

имеем

$$f^p - \left(\sum_j \sum_i \alpha_{ij} s_{ij}^{p^j} - \sum_j \sum_i \beta_{ij}\sigma_{ij}^{p^j}\right) \in [X],$$

откуда $f^p \in [X]$. Но $\widetilde{f^p} = (\tilde{f})^p$ (см. определение 3.5). Следовательно, учитывая 1.4—1.6, 2.1, $\tilde{f} = 0$. Значит,

$$\sum_{j\geqslant 1} \sum_i \sqrt[p]{\alpha_{ij}}\, s_{ij}^{p^{j-1}} = \sum_{j\geqslant 1} \sum_i \sqrt[p]{\beta_{ij}}\, \sigma_{ij}^{p^{j-1}}.$$

Продолжая этот процесс, получаем

$$\sum_i \sqrt[p^m]{\alpha_{im}}\, s_{im} = \sum_i \sqrt[p^m]{\beta_{im}}\, \sigma_{im}.$$

Таким образом,

$$h_1 = \sum_i \sqrt[p^m]{\alpha_{im}}\, s_{im} \in A \cap B \subseteq L^p[M] \cap L^p[N].$$

Добавим h_1 к H, а h заменим на $h_2 = h - (h_1)^{p^m}$. Тогда в записи (*) для элемента h_2 число m уменьшится на единицу. Понижая так число m до 0 для элемента h, а затем и для других элементов из H, получим $\mathbf{Z}_2$-однородное множество H_1, $|H_1| < \infty$, H_1 порождает подалгебру $L^p[M] \cap L^p[N]$, $H_1 \subseteq A \cap B \subseteq [X]$. Для всех $f \in A \cap B$ имеем

$$f = \sum_{j=1}^{k} \sum_i \gamma_{ij} s_{ij}^{p^j} + \sum_i \gamma_{i0} s_{ij},$$

где s_{ij} — as-правильные одночлены от элементов множества H_1, $s_{ij}^{p^j}$ — ps-правильные одночлены от элементов множества H_1, $\gamma_{ij} \in K$. Тогда для элемента

$$g = \sum_{j=1}^{k} \sum_i \sqrt[p]{\gamma_{ij}}\, s_{ij}^{p^{j-1}}$$

имеем $g^p - f \in [X]$, откуда $g^p \in [X]$, и, следовательно, $g = 0$. Но элемент $g^p - f$ принадлежит подпространству, порожденному множеством $\{s_{ij}\}$. Следовательно, элемент f принадлежит супералгебре Ли, порожденной конечным $\mathbf{Z}_2$-однородным множеством H_1.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $\overline{K}$ — алгебраическое замыкание поля K. Вложим $L[X]$ как K-подпространство в $L_{\overline{K}} = \overline{K} \otimes_K L[X]$ над совершенным полем $\overline{K}$. Пусть в силу теоремы 1.8 M и N — свободные $\mathbf{Z}_2$-однородные системы образующих подалгебр A и B соответственно:

$$A = L[M], \quad B = L[N],$$

$$A_{\overline{K}} = L_{\overline{K}}[M], \quad B_{\overline{K}} = L_{\overline{K}}[N].$$

Тогда в силу доказанного выше $A_{\overline{K}} \cap B_{\overline{K}} = L[H]$, $H = \{h_j,\ 1 \leqslant j \leqslant r\}$. Запишем h_j в виде s-правильных одночленов от элементов множеств M и N: $h_j = \sum_i \varphi_{ij} s_i = \sum_i \psi_{ij} \sigma_i$, где $\varphi_{ij}, \psi_{ij} \in \overline{K}$. В K-подпространстве, натянутом в $\overline{K}$ на элементы φ_{ij}, ψ_{ij}, выберем базис $\{q_l,\ 1 \leqslant l \leqslant t\}$. Пусть

$$\varphi_{ij} = \sum_l \alpha_{ijl} q_l, \quad \psi_{ij} = \sum_l \beta_{ijl} q_l,$$

где $\alpha_{ijl}, \beta_{ijl} \in K$. Тогда

$$h_j = \sum_{i,l} \alpha_{ijl} q_l s_i = \sum_{i,l} \beta_{ijl} q_l \sigma_i.$$

Запишем s_i, σ_i в базисе $\{\omega_k\}$ из s-правильных одночленов в алфавите X:

$$s_i = \sum_k \gamma_{ik} \omega_k, \quad \sigma_i = \sum_k \delta_{ik} \omega_k,$$

где $\gamma_{ik}, \delta_{ik} \in K$, $1 \leqslant k \leqslant q$. Тогда

$$\sum_{i,l,k} \alpha_{ijl} q_l \gamma_{ik} \omega_k = \sum_{i,l,k} \beta_{ijl} q_l \omega_k,$$

и так как $\{\omega_k\}$ — базис и в $L[X]$, и в $L_{\overline{K}}$, то

$$\sum_{i,l} \alpha_{ijl} q_l \gamma_{ik} = \sum_{i,l} \beta_{ijl} q_l \delta_{ik}$$

для $1 \leqslant k \leqslant q$. Учитывая, что множество $\{q_l\}$ линейно независимо над K, получаем, что

$$\sum_i \alpha_{ijl}\gamma_{ik} = \sum_i \beta_{ijl}\delta_{ik}$$

для $1 \leqslant k \leqslant q$, $1 \leqslant l \leqslant t$. Поэтому

$$\sum_i \alpha_{ijl}s_i = \sum_{i,\,k} \alpha_{ijl}\gamma_{ik}\omega_k = \sum_{i,\,k} \beta_{ijl}\delta_{ik}\omega_k = \sum_i \beta_{ijl}\sigma_i$$

для $1 \leqslant l \leqslant t$. Заменим каждый элемент h_j, $1 \leqslant j \leqslant r$, конечным набором $\mathbf{Z}_2$-однородных элементов $h_{jl} = \sum_i \alpha_{ijl}s_i$, где $1 \leqslant l \leqslant t$. Полученное множество $H_1 = \{h_{jl},\ 1 \leqslant j \leqslant r,\ 1 \leqslant l \leqslant t\} \subseteq A \cap B$ порождает подалгебру $A_{\overline{K}} \cap B_{\overline{K}}$, содержащую $A \cap B$. Следовательно, H_1 является конечным $\mathbf{Z}_2$-однородным множеством порождающих подалгебры $A \cap B$. Это завершает доказательство теоремы.

Автор благодарен Ю. А. Бахтурину за постановку задач и руководство работой.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 29.12.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ширшов А. И. Подалгебры свободных лиевых алгебр // Мат. сб. 1953. Т. 33, вып. 2. С. 441—452.
[2] Witt E. Die Unterringe der freien Lieschen Ringe // Math. Z. 1956. Bd. 64, № 2. S. 195—216.
[3] Cohn P. M. Subalgebras of free associative algebras // Proc. London Math. Soc. 1964. V. 14, № 56. P. 618—632.
[4] Кукин Г. П. О подалгебрах свободных p-алгебр Ли // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 5. С. 535—550.
[5] Михалев А. А. Свободные p-суперaлгебры Ли // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1986. № 6. С. 80.
[6] Михалев А. А. Подалгебры свободных супералгебр Ли и свободных p-супералгебр Ли // Материалы 24-й Всесоюзной студенческой научной конференции. Математика / Новосибирск, НГУ. 1986. С. 46—50.
[7] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.
[8] Михалев А. А. Подалгебры свободных цветных супералгебр Ли // Математические заметки. 1985. Т. 37, вып. 5. С. 653—661.
[9] Михалев А. А. Свободные цветные супералгебры Ли // ДАН СССР. 1986. Т. 286, № 3. С. 551—554.
[10] Ширшов А. И. О свободных кольцах Ли // Мат. сб. 1958. Т. 45, вып. 2. С. 113—122.
[11] Штерн А. С. Свободные супералгебры Ли // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 1. С. 170—174.
[12] Scheunert M. The theory of Lie superalgebras // Lect. Notes in Math. № 716 / Heidelberg: Springer, 1979.