А. А. Туганбаев, Нетеровы полупервичные кольца и дистрибутивность, *Фундамент. и прикл. матем.*, 1995, том 1, выпуск 3, 767–779

Нетеровы полупервичные кольца и дистрибутивность

А. А. ТУГАНБАЕВ
Московский энергетический институт

УДК 512.55

Ключевые слова: дистрибутивное кольцо, полупервичное кольцо, нетерово кольцо.

Аннотация

Основным результатом работы является теорема 1.

Теорема 1. *Для кольца A равносильны следующие условия: (1) A — дистрибутивное справа нетерово справа конечномерное слева полупервичное кольцо; (2) A — дистрибутивное слева нетерово слева конечномерное справа полупервичное кольцо; (3) A — конечное прямое произведение инвариантных наследственных нетеровых областей.*

Abstract

A. A. Tuganbaev, Noetherian semiprime rings and distributivity, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika **1**(1995), 767–779.

Theorem 1 is the main result of the article.

Theorem 1. *The following conditions are equivalent: (1) A is a right distributive right noetherian semiprime ring with finite left Goldie dimension; (2) A is a left distributive left noetherian semiprime ring with finite right Goldie dimension; (3) A is a finite direct product of invariant hereditary noetherian domains.*

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, модули — унитарными. Слова типа “нетерово кольцо” означают, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Модуль с дистрибутивной решеткой всех его подмодулей называется *дистрибутивным* модулем. Кольцо называется *инвариантным справа (слева)*, если все его правые (левые) идеалы являются идеалами. Модуль называется *конечномерным*, если он не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей. В [1] приведен пример дистрибутивной справа нетеровой справа области, не являющейся ни нетеровым слева, ни дистрибутивным слева кольцом. Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Для кольца A равносильны следующие условия:*

(1) A — дистрибутивное справа нетерово справа конечномерное слева полупервичное кольцо;

(2) A — дистрибутивное слева нетерово слева конечномерное справа полупервичное кольцо;

(3) A — конечное прямое произведение инвариантных наследственных нетеровых областей.

Фундаментальная и прикладная математика 1995, **1**, № 3, 767–779.

Доказательство теоремы 1 разобьем на ряд утверждений. Приведем необходимые обозначения и определения. Модуль M_A над кольцом A называется *мультипликационным*, если для любого его подмодуля N найдется такой идеал B кольца A, что $N = MA$. Кольцо с дистрибутивной решеткой двусторонних идеалов называется *арифметическим* кольцом. Прямая сумма дистрибутивных модулей называется *полудистрибутивным* модулем. Модуль называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению. Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Через $\mathrm{End}(M)$, $\mathrm{Jac}(M)$, $\max(M)$, $\mathrm{Lat}(M)$ обозначаются соответственно кольцо эндоморфизмов, радикал Джекобсона, множество всех максимальных подмодулей и решетка всех подмодулей модуля M. Пусть F — подмножество модуля M_A над кольцом A, $G \in \mathrm{Lat}(M)$. Через $(F : G)$ обозначается правый идеал $\{a \in A \mid Fa \subseteq G\}$ кольца A, являющийся идеалом, если $F \in \mathrm{Lat}(M)$. Если $(F : G)$ — идеал кольца A, то $(F : G) = ((FA) : G)$, где FA — подмодуль модуля M, порожденный его подмножеством F. Мультипликационность модуля M равносильна тому, что для любого его подмодуля N выполнено равенство $N = M(M : N))$. Для кольца A через $U(A)$ обозначается его группа обратимых элементов, а через $r(B), \ell(B)$ обозначаются соответственно правый и левый аннуляторы его подмножества B. Подмодули N, T модуля M называются *комаксимальными*, если $N + T = M$. *Подфактором* называется подмодуль фактормодуля. Подмодуль N модуля M называется *замкнутым*, если любой подмодуль модуля M, являющийся существенным расширением модуля N, совпадает с N. Правый (левый) модуль M над кольцом A называется *антисингулярным*, если M не имеет ненулевых элементов, аннуляторы которых в кольце A являются существенными правыми (левыми) идеалами кольца A. Модуль называется *инвариантным* (*квазиинвариантным*), если все его подмодули (все его максимальные подмодули) являются в нем вполне инвариантными подмодулями. Правая инвариантность (правая квазиинвариантность) кольца A равносильна тому, что все его правые идеалы (максимальные правые идеалы) — идеалы кольца A. Кольцо называется *нормальным*, если все его идемпотенты центральны. *Редуцированным* кольцом называется кольцо без ненулевых нильпотентных элементов. Элемент кольца называется *регулярным*, если он не является ни левым, ни правым делителем нуля. Первичный идеал кольца A, не содержащий других первичных идеалов кольца A, называется *минимальным первичным* идеалом. Собственный идеал называется *вполне первичным*, если факторкольцо по нему является областью, т. е. не содержит делителей нуля. Подмножество T кольца A называется: (1) *мультипликативным*, если T — мультипликативно замкнутое подмножество в A, содержащее единицу и не содержащее нуля кольца A; (2) *перестановочным справа*, если для любых элементов $a \in A$, $t \in T$ найдутся такие элементы $b \in A$, $u \in T$, что $au = tb$; (3) *реверсивным справа*, если для любых таких элементов $a \in A$, $t \in T$, что $ta = 0$, найдется такой элемент $u \in T$, что $au = 0$. Подмножество T кольца A называется *множеством правых знаменателей* при выполнении двух эквивалентных [2, с. 648] условий: (a) T — перестановочное справа реверсивное справа мультипликативное подмножество; (б) существует такое кольцо A_T и кольцевой гомоморфизм $f : A \to A_T$, что $f(T) \subseteq U(A_T)$, $A_T = \{f(a)f(t)^{-1} \mid a \in A,\ t \in T\}$, $\mathrm{Ker}(f) = \{a \in A \mid at = 0$ для некоторого $t \in T\}$. В этих условиях кольцо A_T называется *правым кольцом частных* кольца A относительно T. Для любого правого идеала B кольца A через B_T обозначается правый идеал кольца A_T, порожденный множеством $f(B)$. Если $T = A \setminus M$, где M — правый идеал кольца A, то пишем A_M, B_M вместо A_T, B_T.

Лемма 1. *Для модуля M равносильны следующие условия:*

(1) кольца эндоморфизмов всех фактормодулей модуля M нормальны;

(2) $\mathrm{Hom}(N/(N \bigcap T), T/(N \bigcap T)) = 0$ *для любых комаксимальных подмодулей N, T модуля M;*

(3) $\mathrm{Hom}(M/T, M/N) = 0$ *для любых комаксимальных подмодулей N, T модуля M.*

Так как для любых комаксимальных подмодулей N, T модуля M существуют естественные изоморфизмы $N/(N \bigcap T) \cong M/T$ и $T/(N \bigcap T) \cong M/N$, то лемма 1 следует из хорошо известного и непосредственно проверяемого утверждения: нормальность кольца эндоморфизмов модуля H равносильна тому, что $\mathrm{Hom}(X, Y) = 0$ для любого прямого разложения $H = X \oplus Y$.

Лемма 2. *Пусть кольца эндоморфизмов всех фактормодулей модуля M нормальны, f — эндоморфизм модуля M, N — подмодуль модуля M. Тогда:*

(1) если $f^{-1}(N) + N = M$, то $f(M) \subseteq N$;

(2) если $f(M) \subseteq N + f(N)$, то $f(M) \subseteq N$;

(3) если $M = N + f(N)$, то $M = N$;

(4) если N — максимальный подмодуль модуля M, то $f(N) \subseteq N$ и, следовательно, M — квазиинвариантный модуль.

Доказательство. (1). Правилом $g(m + f^{-1}(N)) = f(m) + N$ корректно задается мономорфизм $g : M/f^{-1}(N) \to M/N$. По лемме 1 $g \equiv 0$. Тогда $f^{-1}(N) = M$, откуда $f(M) \subseteq N$.

(2). Пусть $m \in M$. По условию найдутся такие элементы $n, t \in N$, что $f(m) = n + f(t)$. Тогда $m - t \in f^{-1}(N)$, $m = (m - t) + t \in f^{-1}(N) + N$, $M = f^{-1}(N) + N$. По пункту (1) $f(M) \subseteq N$.

(3). Утверждение следует из пункта (2) и включения $f(N) \subseteq f(M)$.

(4). Утверждение следует из пункта (3).

Лемма 3. *Для модуля M_A над кольцом A равносильны условия:*

(1) M — дистрибутивный модуль;

(2) все подфакторы модуля M дистрибутивны;

(3) кольцо эндоморфизмов любого подфактора модуля M является нормальным кольцом;

(4) каждый подфактор модуля M является квазиинвариантным модулем;

(5) если $F \oplus G$ — любой подфактор модуля M, то $\mathrm{Hom}(F,G) = 0$;

(6) если $F \oplus G$ — произвольный ненулевой подфактор модуля M, то F, G — вполне инвариантные подмодули модуля $F \oplus G$;

(7) модуль M не имеет подфакторов, изоморфных модулю $F \oplus F$, где F — произвольный ненулевой модуль;

(8) модуль M не имеет подфакторов, изоморфных модулю $T \oplus T$, где T — произвольный простой модуль;

(9) все 2-порожденные подмодули модуля M дистрибутивны;

(10) для любых элементов m, n модуля M найдутся такие элементы a, b кольца A, что $1 = a + b$, $maA + nbA \subseteq mA \bigcap nA$;

(11) для любых элементов m, n модуля M найдутся такие элементы a, b, c, d кольца A, что $1 = a + b$, $ma = nc$, $nb = md$;

(12) для произвольного подфактора $\bar{M}$ модуля M и для любых таких элементов $\bar{m}, \bar{n}$ модуля $\bar{M}$, что $\bar{m}A \bigcap \bar{n}A = 0$, найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $1 = a + b$, $\bar{m}a = \bar{n}b = 0$;

(13) $(m + n)A = mA \bigcap (m + n)A + nA \bigcap (m + n)A$ для любых элементов $m, n \in M$;

(14) для любых элементов $m, n \in M$ найдется такой правый идеал B кольца A, что $(m + n)A = mB + nB$.

Доказательство. Импликации (1)⇒(2)⇒(9)⇒(13), (5)⇒(3)⇒(7), (4)⇒(8), (5)⇒(6)⇒(7)⇒(8) и эквивалентность условий (10),(11),(12) проверяются непосредственно. Импликация (3)⇒(4) следует из леммы 2(4). Импликация (2)⇒(5) следует из [3, с. 189, предложение 1.1]. Импликация (8)⇒(7) следует из того, что любой ненулевой модуль обладает простым подфактором. Импликация (7)⇒(1) следует из [4, с. 41, предложение]. Импликация (14)⇒(13) следует из того, что если $(m + n)A = mB + nB$, то с использованием модулярного закона получаем равенства $mA \bigcap (m+n)A = mA \bigcap (mB + nB) = mB$, $nA \bigcap (m + n)A = nA \bigcap (mB + nB) = nB$.

(13)⇒(10). Пусть $f = m + n$, $T = mA \bigcap nA$. Так как $fA = fA \bigcap mA + fA \bigcap nA$, то найдутся такие элементы b, d кольца A, что $fb \in mA$, $fd \in nA$, $f = fb + fd$. Тогда $nb = fb - mb \in T$, $md = fd - nd \in T$. Пусть $a \equiv 1 - b$, $z \equiv a - d = 1 - b - d$. Тогда $1 = a + b$, $fz = f - fb - fd = 0$. Поэтому $ma = md + mz = md + fz - nz = md - nz$, причем $nz = -mz \in T$. Тогда $ma \in T$, откуда a, b — искомые элементы.

(10)⇒(1). Пусть F, G, H — подмодули модуля M, $f \in F \bigcap (G + H)$. Надо доказать включение $f \in F \bigcap G + F \bigcap H$. Пусть $f = m + n$, $m \in G$, $n \in H$. По условию найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $1 = a + b$, $ma \in nA$, $nb \in mA$. Тогда $fb = mb + nb \in fA \bigcap mA \subseteq F \bigcap G$, $fa = ma + na \in fA \bigcap nA \subseteq F \bigcap H$, $f = fb + fa \in F \bigcap G + F \bigcap H$.

(13)⇒(14). Пусть $m, n \in M$, $f \equiv m + n$, $B \equiv (m : fA)$. Тогда $B = (n : fA)$, $mA \bigcap fA = mB$, $nA \bigcap fA = nB$.

Лемма 4. *Пусть M_A — модуль над кольцом A, у которого все 2-порожденные подмодули являются мультипликационными модулями. Тогда M — дистрибутивный модуль.*

Доказательство. Пусть $m, n \in M$, $f \equiv m+n$, $N \equiv mA+nA$. По условию найдется такой идеал B кольца A, что $fA = NB$. Так как B — идеал, то $NB = (mA+nA)B = mB+nB$. По лемме 3 (см. условие (14)) модуль M дистрибутивен.

Лемма 5. *Пусть M_A — модуль над инвариантным справа кольцом A. Тогда равносильны следующие условия:*

(1) M — дистрибутивный модуль;

(2) $A = (F : G) + (G : F)$ для любых двух циклических подмодулей F, G модуля M;

(3) $A = (F : G) + (G : F)$ для любых двух конечнопорожденных подмодулей F, G модуля M;

(4) для любых двух конечнопорожденных подмодулей F, G модуля M найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $1 = a + b$, $Fa + Gb \subseteq F \bigcap G$.

Доказательство. Эквивалентность условий (3) и (4), а также импликация (3)⇒(2) проверяются непосредственно. Эквивалентность условий (1) и (2) следует из леммы 3 (см. условие 11) и из того, что в случае инвариантного справа кольца A для любых элементов $m, n \in M$ верно равенство $(m : nA) = (mA : nA$. Докажем импликацию (2)⇒(3). Будем использовать непосредственно проверяемый факт (*): если $X, Y_1, \ldots, Y_t$ — идеалы кольца A и $A = X + Y_j$ для всех j, то $A = X + Y_1 \cdot \ldots \cdot Y_t = X + \bigcap_{j=1}^{t} Y_j$. Пусть $F = \sum_{i=1}^{m} f_i A$, $G = \sum_{j=1}^{n} g_j A$. По условию (2) $A = (f_i A : g_j A) + (g_j A : f_i A)$, $\forall i, j$. Поэтому $A = (f_i A : G) + (g_j A : f_i A)$, $\forall i, j$. Из (*) следует, что $A = (f_i A : G) + \bigcap_{j=1}^{n} (g_j A : f_i A) = (f_i A : G) + (G : f_i A)$, $\forall i$. Поэтому $A = (f_i A : G) + (G : F)$, $\forall i$. Тогда из (*) следует, что $A = \bigcap_{i=1}^{m} (f_i A : G) + (G : F) = (F : G) + (G : F)$.

Лемма 6. *Пусть M — дистрибутивный модуль, все подпрямо неразложимые фактормодули которого являются нетеровыми модулями. Тогда M — инвариантный модуль. В частности, дистрибутивное справа кольцо, над которым являются нетеровыми все подпрямо неразложимые циклические правые модули, является инвариантным справа кольцом.*

Доказательство. Надо доказать, что произвольный собственный подмодуль N модуля M является вполне инвариантным подмодулем в M. Так как каждый ненулевой модуль (и, в частности, модуль M/N) — подпрямое произведение подпрямо неразложимых модулей и любое пересечение вполне инвариантных подмодулей модуля M вполне инвариантно в M, то достаточно доказать утверждение: если H — такой подмодуль модуля M, что

$N \subsetneq H \subset M$ и M/H — подпрямо неразложимый модуль, то H — вполне инвариантный подмодуль в M. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что H совпадает с пересечением F всех вполне инвариантных подмодулей модуля M, содержащих модуль H. Допустим противное. Так как по условию модуль M/H является нетеровым, то ненулевой нетеров дистрибутивный модуль F/H обладает максимальным подмодулем G/H. Тогда G — максимальный подмодуль модуля F, содержащий модуль H. Так как по лемме 3 (см. условие (4)) G — вполне инвариантный подмодуль модуля F, причем F — вполне инвариантный подмодуль в M, то G — вполне инвариантный подмодуль модуля M, строго содержащийся в F и содержащий модуль H, что противоречит выбору модуля F.

В [5] доказано, что дистрибутивность модуля над коммутативным кольцом равносильна тому, что все конечнопорожденные подмодули этого модуля являются мультипликационными модулями. В связи с этим докажем предложение 7.

Предложение 7. *Для модуля M_A над инвариантным справа кольцом A равносильны следующие условия:*

(1) M — дистрибутивный модуль;

(2) все конечнопорожденные подмодули модуля M являются мультипликационными модулями;

(3) для любого конечнопорожденного подмодуля N модуля M и произвольного конечнопорожденного подмодуля F модуля N найдется такой конечнопорожденный идеал B кольца A, что $F = NB$;

(4) все 2-порожденные подмодули модуля M являются мультипликационными модулями.

Доказательство. Импликации (3)$\Rightarrow$(4), (2)$\Rightarrow$(4) очевидны, а импликация (4)$\Rightarrow$(1) следует из леммы 4.

(1)$\Rightarrow$(2). Пусть n — натуральное число, N — любой n-порожденный подмодуль модуля M, $T \in \mathrm{Lat}(N)$. Необходимо доказать существование такого идеала B кольца A, что $T = NB$. Будем вести индукцию по n. При $n = 1$ утверждение верно, поскольку каждый циклический модуль над инвариантным справа кольцом является мультипликационным модулем, что следует из изоморфизма этого модуля фактормодулю свободного циклического модуля. Пусть утверждение верно при $n < k$ и $N = F + G$, где модуль F имеет $k-1$ образующих, а G — циклический модуль. По предположению индукции $F \bigcap G = F(F : G) = G(G : F)$ и, кроме того, существуют такие идеалы D, E кольца A, что $T \bigcap F = FD$, $T \bigcap G = GE$. Кроме того, по лемме 5 $A = (F : G) + (G : F)$. Тогда $F = F(F : G) + F(G : F) = G(G : F) + F(G : F) = N(G : F)$. Аналогично доказывается равенство $G = N(F : G)$. Обозначим через B идеал $(G : F)D + (F : G)E$ кольца A. Поэтому $T = T \bigcap F + T \bigcap G = FD + GE = N(G : F)D + N(F : G)E = NB$ и B — искомый идеал.

(2)$\Rightarrow$(3). Пусть $N = \sum_{i=1}^{m} x_i A$, $F = \sum_{j=1}^{n} f_j$. Из условия (2) вытекает существование таких элементов $b_{ij} \in (N : F)$, $1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$, что $f_j = \sum_{i=1}^{m} x_i b_{ij}$ для любого j. Тогда идеал B кольца A, порожденный всеми элементами b_{ij} — искомый конечнопорожденный идеал.

Следствие 8. *Если M_A — нетеров модуль над инвариантным справа кольцом A, то дистрибутивность модуля M равносильна тому, что все подмодули модуля M являются мультипликационными модулями.*

Следствие 8 вытекает из предложения 7.

Следствие 9. *Для нетерова справа кольца A равносильны следующие условия:*

(1) A — дистрибутивное справа кольцо;

(2) все правые идеалы кольца A являются мультипликационными правыми A-модулями;

(3) все 2-порожденные правые идеалы кольца A являются мультипликационными правыми A-модулями.

Доказательство. Импликация (2)$\Rightarrow$(3) проверяется непосредственно. Импликация (3)$\Rightarrow$(1) следует из леммы 4. Импликация (1)$\Rightarrow$(2) вытекает из леммы 6 и следствия 8.

Лемма 10. *Пусть A — дистрибутивное инвариантное кольцо, D — конечнопорожденный идеал кольца A, содержащий регулярный элемент d. Тогда модули D_A и ${}_AD$ проективны. (В частности, если A — область, то A — полунаследственное кольцо.)*

Доказательство. Так как кольцо A инвариантно, то оно обладает классическим кольцом частных Q, в котором обратим регулярный элемент d. По предложению 7 найдется такой конечнопорожденный идеал B кольца A, что $DB = dA = Ad$. Пусть $B = \sum_{j=1}^{n} b_j A = \sum_{j=1}^{n} Ab_j$, $d = \sum_{j=1}^{n} d_j b_j$, где $d_j \in D$, $y_j \equiv b_j d^{-1} \in Q$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда $Ad = DB$, $1 = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j$. Так как B конечнопорожденный идеал и $Ad = DB \subseteq B$, то по предложению 7 найдется такой идеал C, что $dA = BC$. Тогда $Ad = BC = Bd^{-1}DBC = Bd^{-1}Dd$, $A = (Ad)d^{-1} = Bd^{-1}D \supseteq y_j D$, $\forall y_j$. Теперь проективность модуля D_A следует из утверждения [6, с. 59]: если A — кольцо, обладающее классическим правым кольцом частных Q, D_A — подмодуль модуля Q_A, содержащий регулярный элемент кольца A, то проективность модуля D_A равносильна существованию таких элементов $y_j \in Q$, $d_j \in D$, где $1 \leqslant j \leqslant n$, что $1 = \sum_{j=1}^{n} d_j y_j$ и $y_j D \subseteq A$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Аналогично доказывается проективность модуля ${}_AD$.

Лемма 11. *Пусть A — кольцо. Тогда:*

(1) если A — полудистрибутивное справа кольцо, то A — арифметическое кольцо;

(2) если любые два ненулевых идеала кольца A имеют ненулевое пересечение и каждое собственное факторкольцо кольца A является арифметическим кольцом, то A — арифметическое кольцо;

(3) если A — первичное кольцо, у которого каждое собственное факторкольцо полудистрибутивно справа, то A — арифметическое кольцо;

(4) если A — наследственное нетерово полупервичное кольцо, то A является арифметическим кольцом, разлагающимся в конечное прямое произведение первичных колец, у которых каждое собственное факторкольцо — конечное прямое произведение полуцепных артиновых колец.

Доказательство. Пункт (1) вытекает из того, что если X — идеал кольца A и $A_A = \bigoplus_{j=1}^n A_j$, то $X = \bigoplus_{j=1}^n (X \bigcap A_j)$. Докажем пункт (2). Пусть F, G, H — идеалы кольца A. Надо доказать равенство (*): $F \bigcap (G + H) = F \bigcap G + F \bigcap H$. Можно без ограничения общности считать идеалы F, G, H ненулевыми. Положим $B \equiv F \bigcap G \bigcap H$. Из условия следует, что $D \neq 0$. Пусть $h\colon A \to A/B$ — естественный кольцевой эпиморфизм. Тогда собственное факторкольцо $h(A)$ кольца A является арифметическим. Поэтому $h(F) \bigcap (h(G) + h(H)) = h(F) \bigcap h(G) + h(F) \bigcap h(H)$. Отсюда следует требуемое равенство (*). Так как любые два ненулевых идеала первичного кольца имеют ненулевое пересечение, то пункт (3) следует из пунктов (1) и (2). Так как наследственное нетерово полупервичное кольцо разлагается в прямое произведение наследственных нетеровых первичных колец [7, с. 197], то пункт (4) следует из пункта (3) и из того, что каждое собственное факторкольцо наследственного нетерова первичного кольца разлагается в конечную прямую сумму цепных правых модулей над собой [7, с. 382].

Лемма 12. [8, Лемма 14]. *Для кольца A равносильны следующие условия:*

(1) A — дистрибутивное справа редуцированное кольцо;

(2) A — дистрибутивное справа антисингулярное справа кольцо;

(3) для любого максимального правого идеала M кольца A правое кольцо частных A_M существует и является цепной справа областью.

Лемма 13. *Пусть A — дистрибутивное справа кольцо. Тогда:*

(1) все идемпотенты кольца A центральны, все максимальные правые идеалы кольца A — вполне первичные идеалы, факторкольца по которым являются телами, причем для любого вполне первичного идеала N множество $A \setminus N$ перестановочно справа и мультипликативно;

(2) если A обладает вполне первичным идеалом N, лежащим в $\mathrm{Jac}(A)$, то $mN = N$ для любого элемента $m \in A \setminus N$, $MN = N$ и, следовательно, идеал N сравним по включению с любым правым идеалом кольца A, причем $MN = N$ для любого не лежащего в N правого идеала M кольца A;

(3) если D и E — правые идеалы кольца A и $D \bigcap E = 0$, то $ED = DE = 0$;

(4) если кольцо A первично, то A — равномерное справа кольцо;

(5) если A не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов, то A — конечномерное справа кольцо;

(6) если A — конечномерное слева кольцо, то A — конечномерное справа кольцо;

(7) если A — неразложимое кольцо, то A не содержит нетривиальных идемпотентов и, следовательно, A_A — неразложимый модуль.

Доказательство. (1). Центральность идемпотентов следует из леммы 3. Если M — максимальный правый идеал кольца A, то по лемме 3 (см. условие (4)) M — идеал, откуда A/M — тело, M — вполне первичный идеал. Пусть N — произвольный вполне первичный идеал, $T \equiv A \setminus N$, $x \in A$, $t \in T$. Так как идеал N вполне первичен, то множество T мультипликативно. Надо доказать существование такого элемента $u \in T$, что $xu \in tA$. По лемме 3 (см. условие (11)) найдутся такие элементы a, b, c, d кольца A, что $1 = a + b$, $xa = tc$, $tb = xd$. Если $a \in T$, то можно положить $u \equiv a$. Допустим,что $a \in A \setminus T = N$. Тогда $b = 1 - a \in A \setminus N = T$, откуда $xd = tb \in T$. Если $d \in N$, то $tb = xd \in N \bigcap (A \setminus N)$ и получаем противоречие. Поэтому $d \in T$ и можно положить $u \equiv d$.

(2). Пусть $m \in A \setminus N$, $n \in N$. По лемме 3 найдутся такие элементы $a, b, c, d \in A$, что $1 = a + b$, $ma = nc \in N$, $nb = md$. Так как N — вполне первичный идеал и $ma, md \in N$, то $a, d \in N \subseteq \mathrm{Jac}(A)$, $b = 1 - a$ — обратимый элемент, $n = mdb^{-1} \in mN$, откуда следуют и оставшиеся утверждения.

(3). Достаточно доказать, что если $e \in E$, $d \in D$, $m \equiv de \in D$, то $m = 0$. Так как $mA \bigcap eA = 0$, то по лемме 3 (см. условие 12) найдутся такие элементы $a, b \in A$, что $1 = a + b$, $ma = eb = 0$. Тогда $m = ma + mb = mb = deb = 0$.

(4). Утверждение следует из пункта (3).

(5), (6), (7). Пункт (5) доказан в [8, лемма 9(e)]. Пункты (6) и (7) следуют из пунктов (5) и (1) соответственно.

Лемма 14. *Пусть A — конечномерная слева область. Тогда:*

(1) A — левая область Оре;

(2) если A — цепная справа область, то A — цепная слева область;

(3) если A — нетерова справа цепная справа область, то A — цепная инвариантная область главных идеалов.

Доказательство. Пункт (1) доказан в [3, с. 42, предложение 5.4].

(2). Достаточно доказать, что для любых ненулевых элементов $a, b \in A$ левые идеалы Aa, Ab сравнимы по включению. Так как по пункту (1) A — левая область Оре, то найдутся такие ненулевые элементы $f, g \in A$, что $fa = gb$. Так как A — цепное справа кольцо, то либо $f \in gA$, либо $g \in fA$. Пусть, например, $f = gd$, $d \in A$. Тогда $gda = gb$, $da = b$, $Ab \subseteq Aa$.

(3). Пусть $M \equiv \mathrm{Jac}(A)$ и A — нетерово справа цепное кольцо, не являющееся телом. Так как A — нетерово справа цепное справа кольцо, то A — кольцо главных правых идеалов. Пусть $M = mA \neq 0$, $N \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} M^n$, $R \equiv A/N$. Так как $M \neq 0$, то $M \neq M^2$, откуда M строго содержит N. Докажем, что $M = Am$. Допустим противное. Тогда найдется элемент $t \in M \setminus Am$. Так как A — цепное слева кольцо, то At строго содержит Am. Поэтому найдется такой элемент $u \in M$, что $m = ut$. Так $M = mA$, то $u = mv$, где $v \in A$. Тогда $m = mvt, 1 = vt \in M$ и получаем противоречие. Поэтому $M = Am = mA$. Теперь непосредственно проверяется, что R — область, в которой все собственные левые или правые идеалы исчерпываются натуральными степенями идеала M, то есть идеалами вида $Am^n = m^nA$. Так как N — вполне первичный идеал цепного слева кольца A, лежащий в его радикале Джекобсона, то по левостороннему аналогу леммы 13(2) $N = NM$, причем N конечнопорожденный правый идеал. По лемме Накаямы $N = 0$, откуда $A = R$, и все доказано.

Лемма 15. *Пусть для любого максимального правого идеала M кольца A существует правое кольцо частных A_M. Тогда:*

(1) если B, D — правые идеалы кольца A и $B_M = D_M$ для всех $M \in \max(A_A)$, то $B = D$;

(2) если для любого $M \in \max(A_A)$ кольцо A_M инвариантно справа, то A — инвариантное справа кольцо;

(3) если A_M является дистрибутивным справа нетеровым справа кольцом для любого $M \in \max(A_A)$, то A — инвариантное справа кольцо.

Пункты (1), (2) леммы 15 доказаны в [8, лемма 5], а пункт (3) следует из пункта (2) и леммы 6.

Лемма 16. *Пусть A — дистрибутивная справа область, $F \equiv \max(A_A)$. Тогда область A обладает классическим правым телом частных Q и для любого $M \in F$ существует такое содержащее A цепное справа подкольцо A_M тела Q, что A_M является правым кольцом частных кольца A относительно M, а естественное вложение $A \to A_M$ является каноническим гомоморфизмом. Кроме того:*

(1) $B = \bigcap_{M \in F} B_M$ для любого правого идеала B кольца A;

(2) если $0 \neq y \in A$, то $yA = \bigcap_{M \in F}(yA_M)$, $Ay = \bigcap_{M \in F}(A_M y)$;

(3) если x, y — ненулевые элементы области A и $x \in A_M y$ для всех $M \in F$, то $x \in Ay$;

(4) если $0 \neq y \in A$ и для любого $M \in F$ левый идеал $A_M y$ кольца A_M является идеалом этого кольца, то Ay является идеалом кольца A (в частности, если для всех $M \in F$ кольца A_M инвариантны слева, то A — инвариантное слева кольцо);

(5) если A — нетерова справа конечномерная слева область, то A — инвариантная наследственная нетерова область.

Доказательство. По лемме 13(4) область A равномерна справа и поэтому обладает классическим правым телом частных Q. По лемме 12 для любого $M \in F$ — правое кольцо частных A_M существует и является цепной справа областью, причем из-за отсутствия в A делителей нуля следует, что канонические гомоморфизмы $A \to A_M$ — мономорфизмами. Тогда без ограничения общности можно считать, что все кольца A_M лежат в Q и содержат A, причем естественные вложения $A \to A_M$ являются каноническими гомоморфизмами. С учетом сказанного пункт (1) следует из леммы 15(1). В частности, $A = \bigcap_{M \in F} A_M$. Из последнего равенства и из отсутствия в A делителей нуля вытекает пункт (2). Пункт (3) следует из пункта (2). Пункт (4) следует из пунктов (2) и (3).

(5). По лемме 6 A — инвариантная справа нетерова справа дистрибутивная справа область. Так как дистрибутивное справа нетерово справа инвариантное справа и слева кольцо является дистрибутивным слева нетеровым слева кольцом, причем по лемме 10 инвариантные дистрибутивные нетеровы области являются наследственными кольцами, то достаточно доказать левую инвариантность области A. Пусть $M \in F$, $R \equiv A_M \subseteq Q$. По пункту (3) достаточно доказать левую инвариантность цепной справа области R. Так как область A конечномерна слева, то по левостороннему аналогу леммы 14(1) A — левая область Оре и Q — двустороннее тело частных области A. Поэтому R — цепная справа равномерная слева область. Так как R — правое кольцо частных нетерова справа кольцо, то (см., например, [8, лемма 4]) A — нетерово справа кольцо. По лемме 14(3) R — инвариантная область.

Лемма 17. *Пусть A — кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов. Тогда:*

(1) A — кольцо с условием минимальности для левых аннуляторов;

(2) правый сингулярный идеал кольца A нильпотентен;

(3) если B — левый сингулярный идеал кольца A, то $\ell(B)$ — существенный левый идеал кольца A, причем $(B \bigcap \ell(B))^2 = 0$;

(4) если кольцо A полупервично, то A — антисингулярное справа и слева кольцо;

(5) если A — дистрибутивное справа кольцо, содержащее правый идеал $B = \bigoplus_{j=1}^{\infty} B_j$, то для некоторого натурального числа n верно равенство $(\bigoplus_{j=n+1}^{\infty} B_j)^2 = 0$.

Доказательство. Пункт (1) следует из хорошо известной двойственности между правыми и левыми аннуляторами. Пункт (2) доказан в [6, с. 56]. Докажем пункт (3). Из пункта (1) следует, что найдется такое конечное подмножество $\{b_j\}_{j=1}^n \equiv D \subseteq B$, что $\ell(B) = \ell(D) = \ell(b_1) \bigcap \ldots \bigcap \ell(b_n)$. Тогда $\ell(B)$ — существенный левый идеал, как пересечение конечного числа существенных левых идеалов $\ell(b_j)$. Равенство $(B \bigcap \ell(B))^2 = 0$ очевидно. Пункт (4) следует из пунктов 2 и 3. Докажем пункт (5). Для любого натурального числа n положим $D_n \equiv \bigoplus_{j=1}^n B_j$. Так как кольцо A удовлетворяет по пункту (1) условию минимальности для левых аннуляторов, то найдется такое натуральное число n, что $\ell(D_n) = \ell(D_{n+j}$ для всех натуральных чисел j. Поскольку $B_{n+j} \bigcap D_n = 0$, то по пункту (4) $B_{n+j} \subseteq \ell(D_n) = \ell(D_{n+j})$ для всех натуральных j. Поэтому $(\bigoplus_{j=n+1}^{\infty} B_j)^2 = 0$.

Лемма 18. *Пусть A — редуцированное кольцо. Тогда:*

(1) если $a, b \in A$ и $ab = 0$, то $0 = bda = adb$ для любого элемента $d \in A$;

(2) если кольцо A первично, то A — область.

Пункт (1) леммы 18 следует из того, что если $ab = 0$ и $d \in A$, то $(bda)^2 = 0$, $bda = 0$, откуда $ba = 0$, $(adb)^2 = 0$, $adb = 0$. Пункт (2) следует из пункта (1) и первичности кольца A.

Лемма 19. *Для дистрибутивного справа кольца A равносильны следующие условия:*

(1) A — полупервичное кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов;

(2) A — полупервичное кольцо с условием максимальности для левых аннуляторов;

(3) A — антисингулярное справа кольцо, не содержащее бесконечных прямых сумм ненулевых идеалов;

(4) A — конечномерное справа редуцированное кольцо;

(5) A — конечное прямое произведение правых областей Оре.

Доказательство. Эквивалентность условий (3),(4) следует из лемм 12 и 13(5). Импликация (5)⇒(2) очевидна. Импликация (1)⇒(3) следует из леммы 17(4), (5).

(2)⇒(1). По симметричному аналогу леммы 17(4) A антисингулярное справа кольцо. По лемме 12 A — редуцированное кольцо. Теперь остается заметить, что по лемме 18(1) в редуцированном кольце правый аннулятор любого подмножества совпадает с его левым аннулятором.

(4)⇒(5). Без ограничения общности можно считать, что A неразложимое кольцо. Из правой конечномерности кольца A вытекает существование в нем такого существенного правого идеала B, что $B_A = \bigoplus_{j=1}^{n} B_j$, где все B_j — ненулевые равномерные правые идеалы. Так как кольцо A обладает классически полупростым правым кольцом частных [2, с. 486], то каждый существенный правый идеал кольца A содержит регулярный элемент [6, с. 54]. Поэтому найдется элемент $b \in B$ с нулевым правым аннулятором и, следовательно, $A_A \cong bA = \bigoplus_{j=1}^{n} bA \bigcap B_j$, откуда A_A — прямая сумма равномерных модулей. Так как по лемме 13(7) A_A — неразложимый модуль, то A — равномерное справа антисингулярное справа кольцо и, следовательно, правая область Оре.

Лемма 20. *Для кольца A равносильны следующие условия:*

(1) A — дистрибутивное справа конечномерное слева антисингулярное справа кольцо;

(2) A — дистрибутивное справа конечномерное слева полупервичное кольцо, удовлетворяющее либо условию максимальности для правых аннуляторов, либо условию максимальности для левых аннуляторов;

(3) A — конечное прямое произведение дистрибутивных справа правых и левых областей Оре.

Доказательство. Можно без ограничения общности считать, что A неразложимое кольцо. Импликация (3)$\Rightarrow$(2) проверяется непосредственно. Импликация (2)$\Rightarrow$(1) следует из леммы 18. Импликация (1)$\Rightarrow$(3) следует из лемм 19 и 14(1).

Доказательство теоремы 1. Так как условие (3) симметрично, то достаточно доказать эквивалентность условий (1) и (3), причем можно без ограничения общности считать, что A — неразложимое кольцо. Импликация (1)$\Rightarrow$(3) следует из лемм 20 и 16(5).

Литература

[1] Туганбаев А. А. Дистрибутивные кольца и модули // Матем. заметки. — 1990. — Т. 47. — № 2. — С. 115–123.

[2] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. — М.: Мир, 1977.

[3] Кон П. Свободные кольца и их связи. — М.: Мир, 1975.

[4] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир, 1986.

[5] Barnard A. Multiplication modules // J. Algebra. — 1981. — V. 71. — № 4. — P. 174–180.

[6] Stenström B. Rings of quotients: an introduction to methods of ring theory. — Berlin: Springer Verlag, 1975.

[7] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. — М.: Мир, 1979.

[8] Туганбаев А. А. О левой дистрибутивности дистрибутивных справа колец // Фундаментальная и прикладная математика. — 1995. — Т. 1. — № 1. — С. 289–300.

Статья поступила в редакцию в апреле 1995 г.