А. Н. Паршин, Алгебраические кривые над функциональными полями с конечным полем констант, *Матем. заметки*, 1974, том 15, выпуск 4, 561–570

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 15, № 4 (1974), 561—570

УДК 512

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ НАД ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ С КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ КОНСТАНТ

А. Н. Паршин

Доказывается теорема конечности для кривых рода $g > 1$, определенных над функциональным полем конечной характеристики и имеющих фиксированные инварианты. В качестве применения получается гипотеза Тейта о гомоморфизмах эллиптических кривых над полем функций. Библ. 13 назв.

Настоящая работа, как и предыдущая работа [1], посвящена изучению кривых над функциональными полями. В отличие от [1], мы рассматриваем здесь поля конечной характеристики. Напомним ситуацию, изучавшуюся в [1]. Пусть K — поле алгебраических функций от одной переменной с полем констант k. Каждой кривой X над K, гладкой и геометрически неприводимой, можно сопоставить следующие инварианты: род g и множество S точек поля K, в которых X имеет плохую редукцию. Кривая X называется постоянной, если она определена над полем констант подходящего конечного расширения поля K. Основная гипотеза в этой ситуации состоит в конечности множества непостоянных кривых с заданными K, $g \geqslant 1$ и S. В [1] эта гипотеза рассматривалась в предположении, что поле k замкнуто и $\operatorname{char} k = 0$. В гл. 1 этой работы было показано, что рассматриваемое в гипотезе множество кривых параметризуется точками некоторого алгебраического многообразия. Чтобы получить отсюда требуемый результат, необходима теорема жесткости, доказанная в [1] гл. 2, только для кривых X с пустым множеством S. Для любых кривых теорема жесткости была получена в [2]. Это дает доказательство конечности при указанных условиях на поле констант k.

Обратимся теперь к случаю, когда поле k конечно. Чтобы получить гипотезу для таких полей, достаточно доказать лишь приведенное выше утверждение о параметризации, поскольку множество точек любого алгебраического многообразия, рациональных над k, конечно. При этом можно рассматривать и постоянные кривые. Имеющееся в [1], гл. 1 рассуждение использует существование разложения Ходжа для когомологий и по этой причине не переносится в конечную характеристику. Более того, и сам результат в этой ситуации неверен. Соответствующий контрпример легко извлекается из примера, приведенного в замечании 3 § 3 работы [3].

Теорема конечности, доказываемая в этой работе, использует другой инвариант кривой X над полем K. Пусть $p\colon V \to B$ — минимальное расслоение с общим слоем X, B — кривая над k с полем функций K (см. [1], гл. 1, § 1). В отличие от случая нулевой характеристики, пучок $R^1p_*O_V$, вообще говоря, не локально свободен. Он локально свободен и ранга g, если морфизм p гладок (т. е. множество S пусто), или имеет сечение, или если $g = 2$ ([4], [3], лемма 1, § 2). В этих условиях введем

Определение. $d(X) = -\deg c_1(R^1p_*O_V)$, где c_1 — первый класс Чженя, $\deg$ — его степень.

В дальнейшем рассматривая кривые X и инвариант $d(X)$, будем предполагать, что выполнено одно из указанных условий.

ТЕОРЕМА. *Пусть K — поле алгебраических функций от одной переменной с конечным полем констант k, $g > 1$ и d — целые. Существует лишь конечное число, с точностью до K-изоморфизма, гладких неприводимых кривых X над K, имеющих род g и $d(X) \leqslant d$.*

В работе [3], § 2 эта теорема была доказана для $g = 2$ при сильных дополнительных органичениях, в частности, при $\operatorname{char} k \neq 2$. Используя в § 3 этой работы теорему, получаем следующее

Следствие 1. *Пусть A — абелево многообразие над K. Существует лишь конечное число, с точностью до K-изоморфизма, абелевых многообразий B над K, удовлетворяющих следующим условиям:*

1. *B — произведение якобиевых многообразий кривых, имеющих K-рациональные точки.*

2. *Существует изогения $B \to A$ степени, взаимно простой с $\operatorname{char} k$.*

Если $\dim B \leqslant 3$ и на B есть поляризация степени 1, то условие 1 выполняется всегда и следствие 1 дает гипотезу $T(A, K, 1, l)$, $l \neq \operatorname{char} k$, из [3] (случай $\dim A \leqslant 2$ разобран в § 3 этой работы). Так же как в § 4 [3], получаем

Следствие 2. *Пусть X и Y — эллиптические кривые над K, $l \neq \operatorname{char} k$, $T_l(X)$, $T_l(Y)$ — модули Тейта. Каноническое отображение*

$$\operatorname{Hom}(X, Y) \otimes \mathbf{Z}_l \to \operatorname{Hom}(T_l(X), \quad T_l(Y))$$

биективно.

В [3] это было доказано в предположении $\operatorname{char} k \neq 2$. Приведенные следствия являются частными случаями известных гипотез Тейта (см. [3], § 4). Инвариант $d(X)$ имеет и другие применения (см. ниже замечание 1).

Обозначения: $\bar{k}$ — замыкание поля k, $\bar{V} = V \otimes \bar{k}$ для схем V над k, $C \cdot D$ — индекс пересечения дивизоров или их классов, $p_a(D)$ — арифметический род дивизора D, Ω_V^2 — пучок дифференциалов степени 2 на схеме V, Ω — канонический класс, q — род кривой B.

Доказательство теоремы. Разобьем его на несколько шагов.

Шаг 1. В условии теоремы можно считать, что $q > 1$. В самом деле, если это не так, пусть $t\colon B' \to B$ — накрытие, этальное в точках, где кривая X имеет плохую редукцию, и такое, что род кривой $B' > 1$. Если $K' = k(B')$, то нетрудно показать, что

$$d(X \otimes K') = (\deg t)\, d(X).$$

Следовательно, инвариант d ограничен на множестве кривых вида $X \otimes K'$; применяя теорему, видим, что оно конечно. Чтобы получить отсюда конечность множества кривых X над K, нужно применить обычный спуск в соединении с тем фактом, что группа $\operatorname{Aut} X$ конечна и приведена (ср. лемму 2 § 3 из [3]).

Шаг 2. Обозначим через $p\colon V \to B$ минимальное расслоение кривой X из условия теоремы. Так как X гладка над K, морфизм p сепарабелен. В силу шага 1 можно считать, что род кривой B больше 1. Как известно, существует лишь конечное число сепарабельных сюръективных морфизмов поверхности на кривую рода > 1 [5]. Поскольку морфизм p однозначно определяет кривую X, отсюда получаем, что нам достаточно доказать конечность, с точностью до k-изоморфизма, множества поверхностей V, соответствующих кривым из условия теоремы.

Шаг 3. Пусть Ω — канонический класс поверхности $\overline{V}$, V — поверхность шага 2. Покажем, что

$$\Omega\cdot\Omega > 0$$

и для любого эффективного дивизора $D \subset \overline{V}$

$$\Omega\cdot D \geqslant 0.$$

В силу результатов Д. Мамфорда [6], если это не так, то на поверхности $\overline{V}$ существует или пучок рациональных кривых, или пучок кривых рода 1, или же дивизор 2Ω численно эквивалентен нулю. Последнее невозможно, ибо, если F — гладкий слой морфизма p, то $\Omega\cdot F = 2g - 2 > 0$. Из структуры слоев морфизма p и условия $g > 1$ следует также, что общие кривые указанных пучков должны накрывать базу $\overline{B}$. Поскольку основное поле $\overline{k}$ замкнуто, род накрытия не меньше q и из $q > 1$ получаем требуемое. Эти рассуждения показывают также, что $\overline{V}$ не содержит исключительных кривых 1-го рода.

Шаг 4. Предложение 1. *Существует функция $m = m(\omega^2, \chi, h)$ такая, что для любой $\overline{k}$-гладкой проективной поверхности S, удовлетворяющей условиям:*

1. $\Omega\cdot\Omega = \omega^2$,
2. $\chi(S, O_S) = \chi$,
3. $\dim H^1(S, (\Omega_S^2)^{\otimes 2}) = h$,
4. $\Omega\cdot\Omega > 0$ *и для любого эффективного дивизора* $D \subset S$, $\Omega\cdot D \geqslant 0$,
5. S *не содержит исключительных кривых 1-го рода, пучок* $(\Omega_S^2)^{\otimes m}$ *определяет морфизм* $\varphi\colon S \to \mathbf{P}_M$.

Доказательство основано на работе К. Кодаиры [7], часть которой справедлива и в конечной характеристике. Приведем основные этапы его рассуждений, опуская то, что буквально переносится на наш случай.

ЛЕММА 1. (теорема 1 в [7]). *Пусть C — неприводимая кривая на гладкой проективной поверхности S, $O(F) \in \operatorname{Pic} S$, $x, y \in C$, m и n — кратности кривой C, соответственно в точках x и y. Если $x \neq y$ и*

$$F\cdot C - C\cdot C - \Omega\cdot C > (h - m + 1)^+ m + (k - n + 1)^+ n,$$

то

$$H^1(C, O(F)\,\mathfrak{m}_x^h \mathfrak{m}_y^k|_C) = (0).$$

Здесь $\mathfrak{m}_a$ — пучок идеалов на S, отвечающий точке a, а b^+ равно b при $b \geqslant 0$ и 0 в противном случае.

Доказательство. Сделаем два σ-процесса с центрами в точках x и y. Получаем поверхность S' и морфизм $f: S' \to S$. Имеем коммутативную диаграмму $(\varkappa = \mathfrak{m}_x^h \mathfrak{m}_y^k)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(S, O(F-C)\varkappa) & \to & H^1(S, O(F)\varkappa) & \to & H^1(C, O(F)\varkappa|_C) & \to \\
\downarrow \varphi_{-2} & & \downarrow \varphi_{-1} & & \downarrow \varphi_0 & \\
H^1(S', O(f^*F - C')f^*\varkappa) & \to & H^1(S', O(f^*F)f^*\varkappa) & \to & H^1(C', O(f^*F)f^*\varkappa|_{C'}) & \to
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\to & H^2(S, O(F-C)\varkappa) & \to & H^2(S, O(F)\varkappa) \\
 & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 \\
\to & H^2(S', O(f^*F - C')f^*\varkappa) & \to & H^2(S', O(f^*F)f^*\varkappa)
\end{array}$$

Здесь C' — собственный образ кривой C на поверхности S'.

Поскольку $R^i f_* O_{S'} = (0)$ при $i > 0$ и $f_* O_{S'} = O_S$, находим, что φ_{-2}, φ_{-1}, φ_1 и φ_2 — изоморфизмы. В силу леммы о пяти гомоморфизмах φ_0 — также изоморфизм. Имеем

$$f^*C = C' + mL_1 + nL_2,$$

где L_1 и L_2 — проективные прямые и $L_1^2 = L_2^2 = -1$,

$$f^*\mathfrak{m}_x = O_{S'}(L_1), \quad f^*\mathfrak{m}_y = O_{S'}(L_2).$$

Пучок $O(f^*F) \otimes (f^*\mathfrak{m}_x)^h \otimes (f^*\mathfrak{m}_y)^k = O(f^*F - hL_1 - kL_2)$ обратим на S', следовательно, обратимо и его ограничение на C'. Легко вычислить, что

$$\deg O(f^*F - hL_1 - kL_2)_{C'} = F \cdot C - hm - kn.$$

Так как поверхность S' неособа, на кривой C' имеется теория двойственности, и, в частности, пучок ω, играющий роль канонического класса. Справедливы следующие соотношения:

$$\deg \omega = 2p_a(C') - 2, \quad H^1(C', F) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega)$$

для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на C'. В нашем случае из всех этих формул получаем

$$H^1(C, O(F)\mathfrak{m}_x^h \mathfrak{m}_y^k|_C) \cong H^0(C', \omega \cdot O(-f^*F + hL_1 + kL_2)).$$

Остается учесть, что

$$p_a(C') = p_a(C) - \frac{m(m-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2},$$

$$2p_a(C) - 2 = C\cdot C + \Omega\cdot C$$

и $H^0(C', \mathcal{F}) = (0)$, если $\deg \mathcal{F} < 0$. Это дает требуемое.

Доказательство предложения 1. Заметим прежде всего, что $H^2(S, O(m\Omega)) = 0$ при $m \geqslant 2$. (Это получается из условия 4.) Используя этот факт, теорему Римана — Роха на S и $\Omega\cdot\Omega > 0$, получаем целое e, зависящее только от ω^2 и χ и такое, что $\dim H^0(S, O(e\Omega)) \geqslant 2$.

Основываясь на таком e и используя лемму 1, Кодаира показывает ([7], доказательство леммы 10), что при $m \geqslant e+2$

$$\dim H^1(S, O((m-e)\Omega)) \geqslant \dim H(S, O(m\Omega)).$$

Из этой оценки видно, что найдется m_0:

$$e + 2 \leqslant m_0 \leqslant \dim H^1(S, O(2\Omega)),$$

для которого

$$\dim H^1(V, O((m_0 - e)\Omega)) = \dim H^1(S, O(m_0\Omega)). \qquad (*)$$

Увеличим теперь e так, чтобы $e\Omega\cdot\Omega \geqslant 2$. Получающееся по такому e число m_0 и равенство (*) используются ([7], доказательство теорем 4 и 6), чтобы получить, что пучок $O(m_0\Omega)$ определяет морфизм $\varphi: S \to \mathbf{P}_M$. Это же верно, следовательно, для всех $m = am_0$, $a \geqslant 1$. Предположение следует отсюда очевидным образом.

Шаг 5. Для любой поверхности $\overline{V}$ из шага 3 следующие инварианты оцениваются через m, $d(X)$, g и q:

1) $\chi(\overline{V}, O_{\overline{V}})$; 2) $\Omega\cdot\Omega$; 3) $\dim H^0(\overline{V}, O(m\Omega))$;

4) $\dim H^1(\overline{V}, O(m\Omega))$.

По поводу 1) см. [1] или [3], § 2. Оценка для 2) получается из формулы Нётера $\Omega\cdot\Omega + \chi_{et} = 12\chi(\overline{V}, O_{\overline{V}})$ (χ_{et} — этальная эйлерова характеристика), если учесть 1) и неравенство $\chi_{et} \geqslant 4(g-1)(q-1)$. Последнее следует из формулы для эйлеровой характеристики расслоенной поверхности [8].

Если бы пучок $\Omega^2_{\overline{V}}$ был обилен на поверхности $\overline{V}$, то, как показано в [9], теорема 3, выполнялось бы соотношение

$$\dim H^0(\overline{V}, O(m\Omega)) \leqslant m^2\Omega\cdot\Omega + 2. \qquad (1)$$

Покажем, что в нашем случае оно также выполняется. Рассмотрим кривые $C \subset V$ такие, что $\Omega \cdot C = 0$. Из теоремы Ходжа об индексе и $\Omega \cdot \Omega > 0$ получаем, что род такой кривой равен нулю, а $C \cdot C = -2$. Нетрудно также показать, что таких кривых конечное число [7], [10]. В силу известной теоремы М. Артина [11] существует нормальная поверхность W и бирациональный морфизм $u\colon V \to W$, стягивающий кривые C и только их. Особенности поверхности W будут рациональными, следовательно,

$$R^1 u_* O_V = (0). \tag{2}$$

Кроме того, Ω_W^2 — обратимый пучок на W и

$$u^* \Omega_W^2 = \Omega_V^2. \tag{3}$$

Наконец, Ω_W^2 будет обильным пучком на W (эта конструкция принадлежит Мамфорду, см. [10]). Поскольку теорема 3 в [9] доказана для нормальных схем, получаем на W оценку вида (1) для пучка Ω_W^2. Используя (2) и (3), легко находим, что это эквивалентно оценке (1).

Нам осталось получить 4). Для этого заметим, что, как мы видели в доказательстве предложения 1,

$$H^2 (\bar{V}, O(m \quad)) = (0) \qquad (m \geqslant 2)$$

Отсюда видно, что требуемая оценка вытекает из теоремы Римана — Роха и 3).

Шаг 6. ЛЕММА 2. *Пусть* $|D|$ *— полная линейная система на гладкой проективной поверхности* S, *не имеющая базисных точек, и пусть*

$$D \cdot D > 0, \ \dim H^1 (S, O(mD)) \leqslant f(m).$$

Существует $m_0 = m_0 (D \cdot D, p_a(D))$ *такое, что при* $m \geqslant 2f(m_0)$ *линейная система* $|mD|$ *определяет морфизм в проективное пространство, являющийся в общей точке бирегулярным вложением.*

Доказательство. Из теоремы Бертини [12] выводим, что общий дивизор C линейной системы $|D|$ неприводим. Рассмотрим точную последовательность пучков

$$0 \to O(mD - \alpha C) \to O(mD) \to O(mD)|_T \to 0,$$

где $\alpha = 1, 2$, а $T \subset S$ — подсхема, определяемая дивизором αC. Имеем последовательность когомологий

$$H^0(O(mD)) \to H^0(T, O(mD)|_T) \to H^1(O(mD - \alpha C)) \to$$
$$\to H^1(O(mD)) \to H^1(T, O(mD)|_T). \qquad (*)$$

Применяя предложение из гл. 4 работы [9], найдем такое m_0, зависящее только от $D \cdot D$ и $p_a(D)$, что при $m \geqslant m_0$

$$H^1(T, O(mD)_T) = (0)$$

и пучок $O(mD)$ обилен на T. (В формулировку цитированного предложения входят кратности особых точек кривой C, однако их можно оценить через $p_a(D)$, см. неравенство Нётера [9], стр. 676.) Таким образом, при $m \geqslant m_0$ $\dim H^1(O(mD))$ — невозрастающая функция от m. Существует, следовательно, m_1, $m_0 \leqslant m_1 \leqslant 2 \dim H^1 \cdot (O(m_0 D))$ такое, что

$$\dim H^1(O(m_1 D)) = \dim H^1(O((m_1 - 1)D)) =$$
$$= \dim H^1(O((m_1 - 2)D)).$$

Из точной последовательности $(*)$ получаем, что отображение

$$H^0(O(m_1 D)) \to H^0(T, O(m_1 D)|_T)$$

сюръективно. Стандартные рассуждения ([9], конец гл. 4) показывают, что если $x, y \in S$ и существует неприводимая кривая C из линейной системы $|D|$, содержащая x и y, то сечения из $H^0(O(m_1 D))$ разделяют точки x и y, а морфизм $S \to \mathbf{P}(H^0(O(m_1 D)))$, определяемый линейной системой $|m_1 D|$, бирегулярен в них. Это же верно для всех $m \geqslant m_1$.

Шаг 7. Соберем теперь все вместе. Пусть X — кривая из условия теоремы, $p\colon V \to B$ — минимальное расслоение шага 2. Нам нужно показать, что поверхностей V — конечное число. В силу шага 3 к поверхности $\overline{V}$ применимо предложение 1, а затем и лемма 2 с $D = m\Omega$. Используя оценки шага 5, получаем для $\overline{V}$ (и следовательно, для V) бирациональное вложение в $\mathbf{P}_M$, где M зависит только от $d(X)$, g и q. Степень образа поверхности V оценивается через $\Omega \cdot \Omega$ и, используя снова шаг 5, видим, что образы поверхностей V имеют ограниченную степень. Так как они определены над k, то их — конечное число. Наконец, поскольку поверхность V не линейчата и не имеет исключительных кривых 1-го рода, они однозначно определяется своим бирациональным образом. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы следует, что существует $d_0 = d_0(g, q)$ такое, что для любой кривой X род g и определенный над полем рода q

$$d(X) \geqslant d_0.$$

Если X еще имеет всюду хорошую редукцию, то можно показать, что $d_0 = 0$ и $d(X) = 0$ эквивалентно тому, что кривая постоянна (если char $k = 0$, то это доказано в [1], гл. 2).

З а м е ч а н и е 2. Если пучок Ω_V^2 обилен на V, то нужное нам проективное погружение поверхности V построено в гл. 3 работы [9]. Это условие выполняется, если кривая X имеет всюду хорошую редукцию и $q > 1$. В общем случае на поверхности V, как правило, имеется много кривых C, для которых $\Omega \cdot C = 0$ (это проективные прямые с $C \cdot C = -2$; для случая $g = 2$ см., например, рисунки в § 2 [3]).

З а м е ч а н и е 3. Для поля комплексных чисел Кодаира показал в [7], что в предложении 1 должно быть $m \leqslant 4$. Он использует для этого теорему об обращении в нуль когомологий отрицательных расслоений, известную лишь для нулевой характеристики. Ее справедливость для неособых поверхностей в характеристике $p > 0$ находится под сомнением (см. [13]).

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило
18.V.1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П а р ш и н А. Н., Алгебраические кривые над функциональными полями 1, Изв. АН СССР, Сер. матем., **32** (1968), 1191—1219.

[2] А р а к е л о в С. Ю., Семейства алгебраических кривых с фиксированными вырождениями, Изв. АН СССР, Сер. матем., 35 (1971), 1269—1393.

[3] П а р ш и н А. Н., Минимальные модели кривых рода 2 и гомоморфизмы абелевых многообразий, определенных над полем конечной характеристики, Изв. АН СССР, Сер. матем., 36 (1972), 67—109.

[4] R a y n o u d M., Spécialisation du foncteur Picard, Public. Math. IHES, 39 (1970), 27—76.

[5] S a m u e l P., Compléments a un article de Hans Grauert sur la conjecture de Mordell, Public. Math. IHES, 29 (1966), 311—318.

[6] Mumford D., Enriques' classification of surfaces in chapp, I, Global analysis, Princeton, 1970.
[7] Kodaira K., Pluricanonical systems on algebraic surfaces of general type, J. Math. Soc. Japan, **20** (1968), 170—192.
[8] Долгачев И. В., Эйлерова характеристика семейства алгебраических многообразий, Матем. сб., **89** (1972), 297—312.
[9] Matsusaka T., Mumford D., Two fundamental theorems on deformations of polarized varieties, Amer. J. Math., **86** (1964), 668—684.
[10] Mumford D., The canonical ring of an algebraic surface, Ann. Math., **76** (1962), 612—615.
[11] Arin M., Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces, Amer. J. Math., 84 (1962), 485—496.
[12] Zarisski O., Proof of a theorem of Bertini, Trans. Amer. Math. Soc., **50** (1941), 48—70.
[13] Mumford D., Pathologies III, Amer. J. Math., 89 (1967), 94—104.