

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Люлька, И. Е. Михайлов, Б. Н. Тюмнев, О построении интерполяционных сеточных поверхностей, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2007, том 47, номер 1, 11–15

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

27 марта 2025 г., 08:48:24



УДК 519.652

О ПОСТРОЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СЕТОЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

© 2007 г. **В. А. Люлька**, **И. Е. Михайлов**, **Б. Н. Тюмнев**

(119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН)

e-mail: mikhi@ccas.ru

Поступила в редакцию 03.04.2006 г.
Переработанный вариант 03.08.2006 г.

Предлагается способ построения двумерных интерполяционных сеточных функций, который обладает большей гибкостью по сравнению с классическим двумерным кубическим сплайном, так как позволяет проводить через фиксированные опорные точки различные интерполяционные поверхности за счет изменения некоторых параметров. Он не отличается громоздкостью в реализации и безусловно пригоден для практического применения. Библ. 3. Фиг. 4.

Ключевые слова: интерполяционные сеточные поверхности, интерполяционные кубические полиномы.

1. В настоящее время одним из самых употребительных методов решения задачи интерполяции является метод интерполирования кубическими сплайнами, который в одномерном случае можно описать так: в плоскости Otu требуется построить кривую $u = u(t)$, проходящую через заданные опорные точки (T_i, U_i) , $i = \overline{0, N}$, имеющую такую вторую производную

$$u''(t) = v(t), \quad u(T_i) = U_i, \quad u(T_{i+1}) = U_{i+1}, \quad i = \overline{0, N-1}, \quad (1)$$

что функция $v(t)$ в промежутках между опорными узлами T_i и T_{i+1} распределена по закону, задаваемому решением краевой задачи

$$v''(t) = 0, \quad v(T_i) = M_i, \quad v(T_{i+1}) = M_{i+1}, \quad i = \overline{0, N-1}. \quad (2)$$

Если задать, например, естественные граничные условия $M_0 = M_N = 0$, то остальные числа M_i легко находятся из условий стыковки односторонних первых производных в опорных точках T_i

$$u'(T_i - 0) = u'(T_i + 0), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (3)$$

с помощью метода прогонки (см., например, [1]). Построенная с помощью этих чисел интерполяционная кривая представляет собой на каждом отрезке $[T_i, T_{i+1}]$ кубический многочлен.

В [2], [3] был предложен обобщенный метод кубических сплайнов, в котором вместо уравнений (1), (2) использовались уравнения

$$L_1 u = -[p(t)u']' + q(t)u = -v, \quad (4)$$

$$L_2 v = -[r(t)v']' + s(t)v = g(t), \quad (5)$$

где $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$, $s(t)$, $g(t)$ – некоторые заданные функции, выбор которых может определяться спецификой задачи интерполяции. При непостоянных функциях $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$, $s(t)$, $g(t)$ аналитического решения уравнений (4), (5), как правило, не существует, поэтому интерполяционная кривая, определяемая этими уравнениями, находилась численно на расчетной сетке $\{t_k\}$, $k = \overline{0, n}$, мелкость которой выбиралась из соображений точности интерполяции ϵ . При этом отдельно вычислять числа M_i было не нужно. Для обеспечения прохождения интерполяционной кривой через опорные точки использовался следующий итерационный процесс.

Полагалось, что границы расчетной и опорной сеток совпадают и расчетная и опорная сетки пересекаются в узлах опорной сетки. Задавалось начальное приближение $u^0(t_k) = 0$, $k = \overline{0, n}$. Пусть α – номер итерации, $u^\alpha(t_k)$ – решение задачи на итерации α . Переход на $(\alpha + 1)$ -итерацию состоял из следующих шагов.

Шаг 1. В опорных точках $T_i, i = \overline{1, N-1}$, вычислялись значение $E_i = U_i - u^\alpha(T_i)$ и сеточная функция $V_i = -L_1^h(E_i)$, где L_1^h – разностный оператор, аппроксимирующий оператор L_1 . В случае равномерной опорной сетки

$$L_1^h(E_i) = \frac{p\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right)E_{i-1} - \left[p\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) + p\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right)\right]E_i + p\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right)E_{i+1}}{(t_i - t_{i-1})^2} - q(t_i)E_i. \quad (6)$$

На концах полагалось $V_0 = V_N = 0$.

Шаг 2. На расчетной сетке методом прогонки решалась система разностных уравнений $L_2^h(v(t_k)) = g(t_k), v(T_i) = V_i$. Здесь L_2^h – разностный оператор, аппроксимирующий оператор L_2 . В случае равномерной расчетной сетки он аналогичен (6).

Шаг 3. На расчетной сетке методом прогонки решалась система разностных уравнений $L_1^h(\tilde{u}(t_k)) = -v(t_k)$.

Шаг 4. Вычислялись значения искомой сеточной функции на $(\alpha + 1)$ -итерации: $u^{\alpha+1}(t_k) = u^\alpha(t_k) + \tilde{u}(t_k)$.

Шаги 1–4 повторялись до тех пор, пока не выполнялось неравенство

$$\sum_{i=0}^N |E_i| < \varepsilon.$$

Доказательство сходимости итерационного процесса при $p(t) = \text{const}, q(t) = \text{const}, r(t) \equiv 1, s(t) = g(t) \equiv 0$ приведено в [2].

Предложенный способ построения интерполяционных сеточных функций обладает большей гибкостью по сравнению с кубическим сплайном, так как позволяет проводить через фиксированные опорные точки различные интерполяционные кривые за счет выбора функций $p(t), q(t), r(t), s(t), g(t)$, причем эти функции можно брать разными на разных промежутках $[T_i, T_{i+1}]$.

В настоящей работе этот метод распространяется на двумерный случай. При этом $p(t)$ и $q(t)$ берутся переменными, а $r(t) \equiv 1, s(t) = g(t) \equiv 0$.

2. Пусть на сетке $\{X_i, Y_j\}, i = \overline{0, M}, j = \overline{0, N}$, задана сеточная функция $f(X_i, Y_j)$. Сетку $\{X_i, Y_j\}$ будем называть опорной.

Требуется восполнить значения функции $f(x, y)$ в узлах сетки $\{x_k, y_l\}, k = \overline{0, m}, l = \overline{0, n}$, т.е. построить сеточную функцию $u(x_k, y_l)$, совпадающую в опорных точках с функцией $f(X_i, Y_j)$ с точностью ε . Сетку $\{x_k, y_l\}$ будем называть расчетной.

Далее будем полагать следующее:

границы расчетной и опорной сеток совпадают, т.е. $X_0 = x_0, X_M = x_m, Y_0 = y_0, Y_N = y_n$;

расчетная и опорная сетки пересекаются в узлах опорной сетки, то есть $\forall i, j \exists k^*, l^* : X_i = x_{k^*}, Y_j = y_{l^*}$;

расчетная сетка имеет равномерный по x и y шаг h_x и h_y соответственно.

Для решения поставленной задачи организуем следующий итерационный процесс.

Зададим нулевое приближение $u^0(x_k, y_l) = 0$.

Пусть α – номер итерации, $u^\alpha(x_k, y_l)$ – решение задачи на итерации α .

Шаг 1. Для каждого фиксированного значения $y = Y_j$ мы имеем одномерную задачу по x и с использованием четырех шагов итерационного процесса (см. п. 1) (положив $t = x$) находим сеточную функцию $\tilde{u}(x_k, Y_j), k = \overline{0, m}, j = \overline{0, N}$.

Шаг 2. Для каждого фиксированного значения $x = x_k$ мы имеем одномерную задачу по y и с использованием четырех шагов итерационного процесса (см. п. 1) (положив $t = y$) находим сеточную функцию $\tilde{u}(x_k, y_l), k = \overline{0, m}, l = \overline{0, n}$. При этом, вообще говоря, функции $p(t), q(t), r(t), s(t), g(t)$ могут быть взяты другими по сравнению с шагом 1.

Шаг 3. Вычисляются значения искомой сеточной функции на $(\alpha + 1)$ -итерации:

$$u^{\alpha+1}(x_k, y_l) = u^\alpha(x_k, y_l) + \tilde{u}(x_k, y_l).$$

Условием окончания итерационного процесса является достижение заданной точности ε в опорных точках:

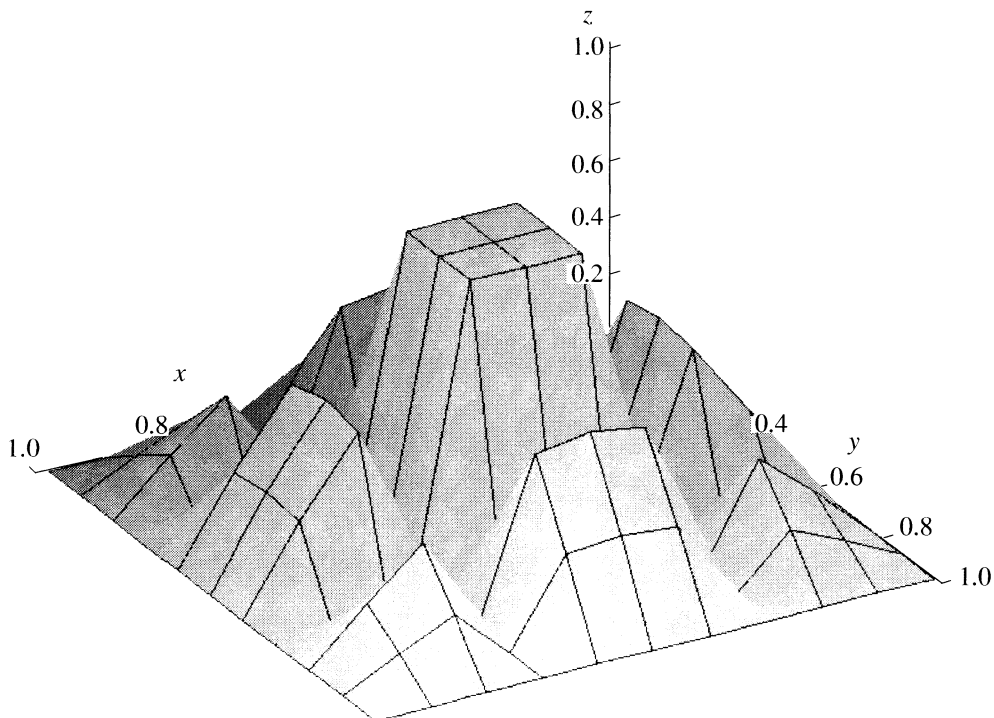
$$\max_{\substack{i = \overline{0, M} \\ j = \overline{0, N}}} |f(X_i, Y_j) - u^\alpha(X_i, Y_j)| < \varepsilon.$$

Полученная в результате итерационного процесса сеточная функция $u^\alpha(x_k, y_l)$ представляет собой искомую двумерную поверхность.

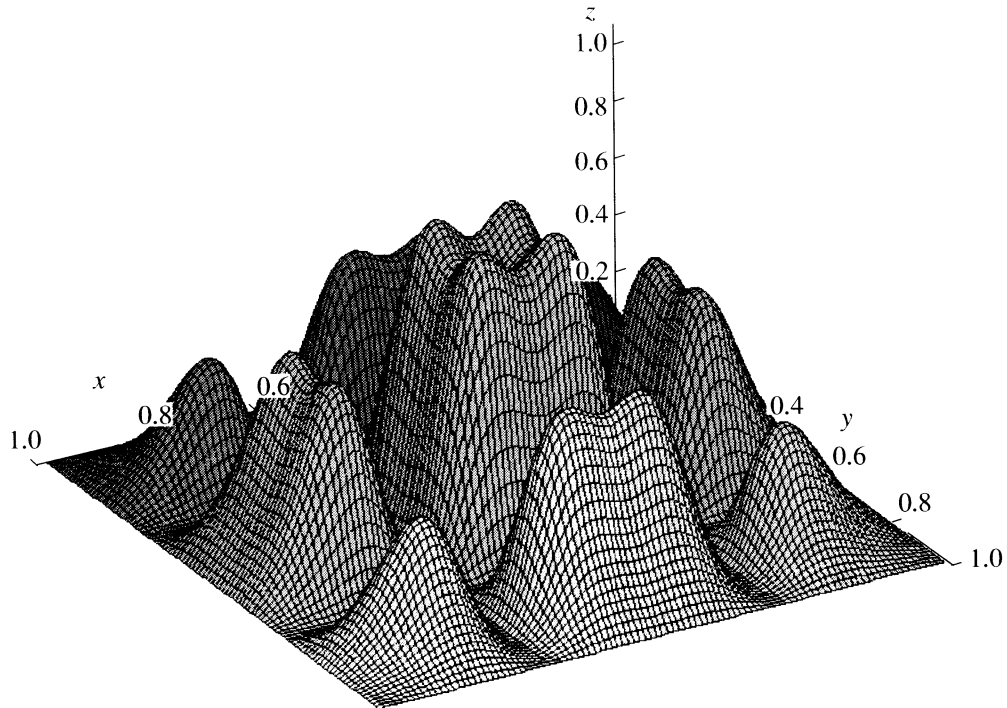
Достоинством предлагаемого метода является возможность изменения вида интерполяционной поверхности за счет выбора различных функций $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$, $s(t)$, $g(t)$ на разных промежутках $[T_i, T_{i+1}]$.

3. Были проведены многочисленные расчеты для исследования влияния функций $p(x, y) > 0$ и $q(x, y) \geq 0$ на скорость сходимости итерационного процесса и вид интерполяционной поверхности. При этом найти пример расходимости итерационного процесса не удалось. Как показали численные эксперименты, скорость сходимости итерационного процесса увеличивается при увеличении $\max_{x, y} q(x, y)$ и уменьшении $\max_{x, y} p(x, y)$. Вид интерполяционной поверхности почти не зависит от вида функции $q(x, y)$ и сильно зависит от $p(x, y)$, при $\max_{x, y} p(x, y) = 1$ получается сплайно-подобная поверхность, а при малом $\max_{x, y} p(x, y)$ – близкая к линейной интерполяционной поверхности.

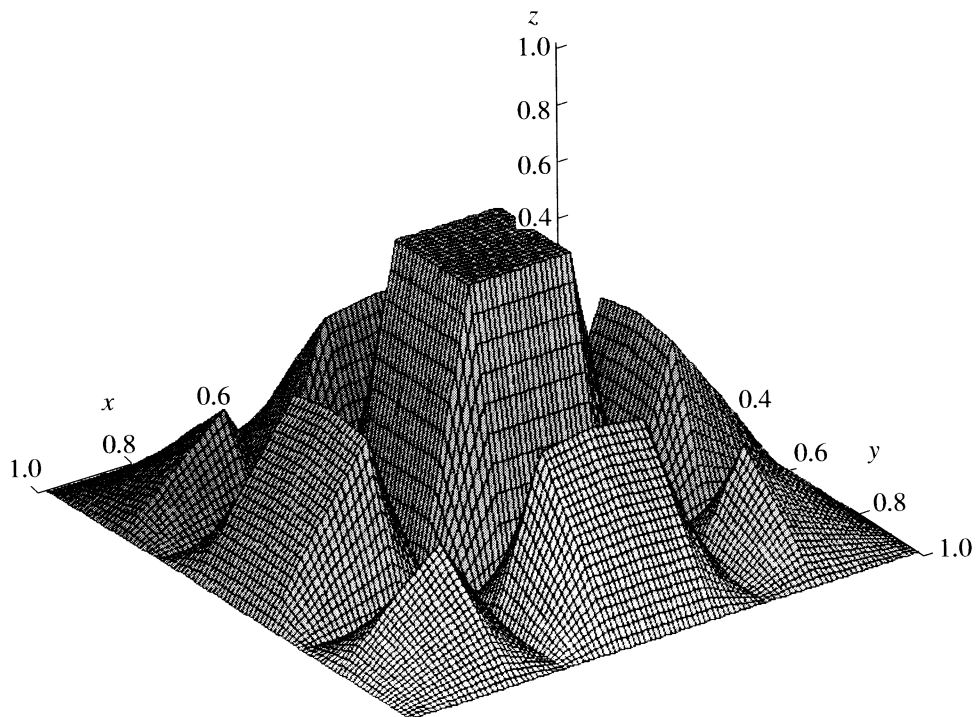
В качестве примера рассмотрим следующую сеточную функцию: $f(X_i, Y_j)$, $i = \overline{0, 10}$, $j = \overline{0, 10}$, заданную в единичном квадрате плоскости Oxy . На линиях $x = y = 0$, $x = y = 0.3$, $x = y = 0.7$, $x = y = 1$ значения функции равны 0. Внутри квадрата, ограниченного линиями $x = y = 0.4$, $x = y = 0.6$, значения функции равны 1. В остальных точках значения функции равны $\sin(\pi x)\sin(\pi y)$. Вид функ-



Фиг. 1.



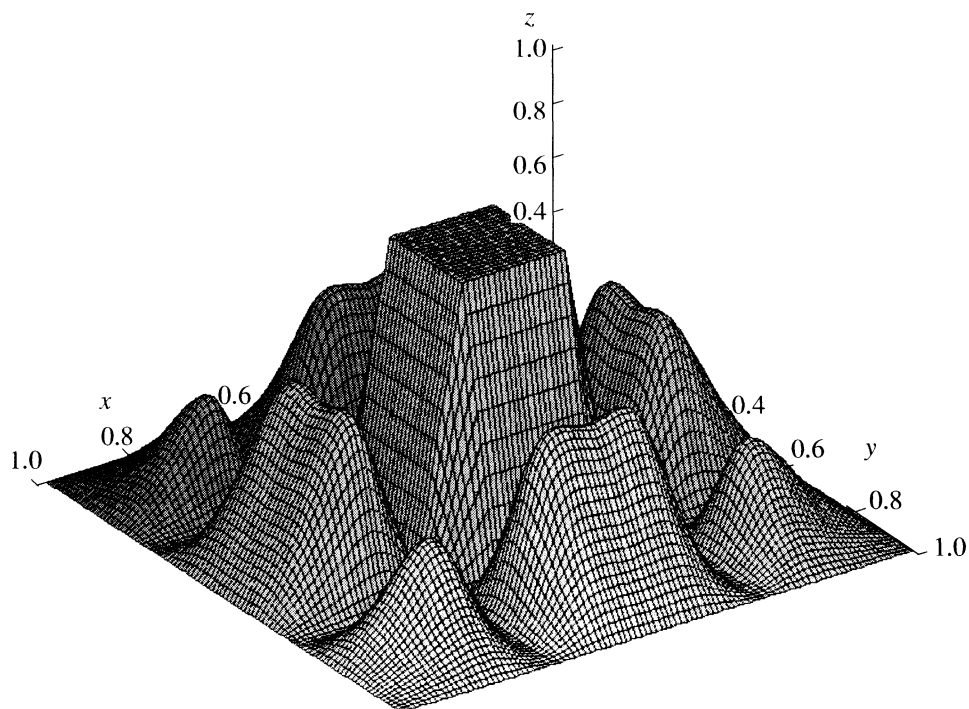
Фиг. 2.



Фиг. 3.

ции изображен на фиг. 1. Для наглядности соседние точки сеточной функции на всех рисунках соединены прямыми.

Вычисления производились на расчетной сетке размером $m \times n = 100 \times 100$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ при $q(t) \equiv r(t) \equiv 1$, $s(t) \equiv g(t) \equiv 0$ в формулах (4), (5).



Фиг. 4.

На фиг. 2 изображена поверхность, полученная с помощью двумерных кубических сплайнов.

На фиг. 3 изображена рассчитанная поверхность, когда $p(x, y) = 10^{-6}(1 + xy)$. Заданная точность была достигнута за 3 итерации.

На фиг. 4 изображена рассчитанная поверхность, когда внутри квадратной “площадки” $p(x, y) = 10^{-6}(1 + xy)$, а вне ее $p(x, y) = 10^{-3}(1 + xy)$. Заданная точность была достигнута за 32 итерации.

Таким образом, возможность менять вид интерполяционной поверхности за счет использования различных кусочно-заданных функций делает данный метод более гибким, чем интерполирование кубическими сплайнами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.
2. Люлька В.А., Романко А.В. Построение интерполяционных кривых методом сеток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 6. С. 827–836.
3. Люлька В.А., Михайлов И.Е. О построении интерполяционных кривых // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 10. С. 1448–1450.