ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 1, с. 50–56

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.977

К СВОЙСТВУ ЛОКАЛЬНОЙ ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

© 2003 г. С. Н. Попова

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с наблюдателем

$$y = C^*(t)x, \quad y \in \mathbb{R}^r, \tag{2}$$

где операторные коэффициенты $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ и $C(\cdot)$ предполагаются ограниченными и кусочно-непрерывными на $\mathbb{R}$ (звездочка означает транспонирование). Обозначим через $X(t,s)$ матрицу Коши соответствующей однородной системы $\dot{x} = A(t)x$.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – канонический базис пространства $\mathbb{R}^n$, норму в $\mathbb{R}^n$ предполагаем евклидовой. Через $\mathrm{M}_{k,l}$ обозначим пространство матриц размерности $k \times l$ с операторной нормой ($\mathrm{M}_{n,n} =: \mathrm{M}_n$), а через $\mathrm{KC}_{k,l}(I)$, где $I \subset \mathbb{R}$, – пространство ограниченных кусочно-непрерывных отображений $U : I \to \mathrm{M}_{k,l}$ с равномерной нормой $\|U\|_C = \sup\limits_{t \in I} \|U(t)\|$. Пусть $E \in \mathrm{M}_n$ – единичная матрица, $\mathrm{B}_\delta(P) := \{H \in \mathrm{M}_{k,l} : \|H - P\| \le \delta\}$ – замкнутый шар, $\mathrm{S}_\delta(P) := \{H \in \mathrm{M}_{k,l} : \|H - P\| = \delta\}$ – сфера радиуса δ с центром в $P \in \mathrm{M}_{k,l}$. Положим $a := \sup\limits_t \|A(t)\|$, $b := \sup\limits_t \|B(t)\|$; $Q(t,s) := X(t,s)B(s)$, $R(t,s) := C^*(t)X(t,s)$.

Предположим, что управление $u(\cdot)$ в системе (1) задано по принципу линейной обратной связи $u = U(t)y$, $U \in \mathrm{KC}_{m,r}(\mathbb{R})$, тогда система (1) переходит в однородную систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t)C^*(t))x, \tag{3}$$

для которой определена матрица Коши $X_U(t,s)$. Возникает вопрос о возможности построения на произвольном отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$ фиксированной длины σ управляющей матрицы $U(\cdot)$ такой, что имеет место равенство

$$X_U(t_0 + \sigma, t_0) = X(t_0 + \sigma, t_0)H \tag{4}$$

с произвольной достаточно близкой к E матрицей H. Это свойство является базой для применения метода поворотов В.М. Миллионщикова [1] (см. также [2]) к линейным управляемым системам. Именно на его основе получены практически все результаты о локальной управляемости асимптотических инвариантов систем вида (1), (2) (подробный обзор этих результатов содержится в [3, 4]). В связи с этим в [5] (см. также [3]) было дано следующее

Определение. Пусть $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{m,r}$ – некоторое множество. Система (1), (2) называется: локально достижимой (относительно $\mathbb{U}$) на отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$, если существует $\delta > 0$ такое, что для любой матрицы $H \in \mathrm{B}_\delta(E) \subset \mathrm{M}_n$ существует кусочно-непрерывное управление $U : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{U}$, гарантирующее выполнение равенства (4); σ-равномерно локально достижимой (относительно $\mathbb{U}$), если система (1), (2) локально достижима (относительно $\mathbb{U}$) на всяком отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$ длины σ, причем δ не зависит от t_0.

Аналогично вводятся понятия локальной и равномерной локальной достижимости системы (1). По определению система (1) называется (равномерно) локально достижимой (относительно множества $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{m,n}$), если система (1), (2) при $r = n$, $C(t) \equiv E$ (равномерно) локально достижима (относительно $\mathbb{U}$). Таким образом, в данном случае равенство (4) должно выполняться для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \tag{5}$$

которая получается при подстановке в систему (1) линейного по фазовым переменным управления $u(t) = U(t)x$, $U(\cdot) \in \mathrm{KC}_{m,n}(\mathbb{R})$.

В работах [6, 7] доказаны следующие утверждения: если система (1), (2) (система (1)) σ-равномерно согласованна (σ-равномерно вполне управляема), то для каждого $\varepsilon > 0$ система (1), (2) (система (1)) является σ-равномерно локально достижимой относительно множества $\mathbb{U} = \mathrm{B}_\varepsilon(0)$. Отсюда сразу вытекает σ-равномерная локальная достижимость системы (1), (2) (системы (1)) относительно всякого множества $\mathbb{U}$, содержащего нуль в своей внутренности.

Аналогичное утверждение установлено в [5] для билинейных управляемых систем

$$\dot{x} = (A(t) + u_1 A_1(t) + u_2 A_2(t) + \ldots + u_p A_p(t))x, \quad u_j \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

На Ижевском городском семинаре по дифференциальным уравнениям и теории управления Е.Л. Тонковым был поставлен вопрос о необходимости условия равномерной согласованности (равномерной полной управляемости) для равномерной локальной достижимости. В работе [4] дан отрицательный ответ на этот вопрос в случае систем вида (6).

Отметим, что всякая система вида (3) может быть записана в виде (6) с $p = mr$, где в качестве скалярных управлений $u_l(t)$, $l = \overline{1,p}$, участвуют элементы $u_{ij}(t)$ матрицы $U(t)$, а в качестве матриц $A_l(t)$, $l = \overline{1,p}$, – $n \times n$-матрицы $b_i(t)c_j^*(t)$, построенные по столбцам $b_i(t) \in \mathbb{R}^n$ ($i = \overline{1,m}$) матрицы $B(t)$ и столбцам $c_j(t) \in \mathbb{R}^n$ ($j = \overline{1,r}$) матрицы $C(t)$:

$$\dot{x} = \left(A(t) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r} u_{ij}(t)(b_i(t)c_j^*(t))\right)x. \tag{6'}$$

В свою очередь всякая система вида (5) может быть записана в виде (3), где $r = n$, $C(t) \equiv E$. При этом согласованность управляемой системы с наблюдателем (1), (2) эквивалентна согласованности билинейной системы (6′) [4], а управляемость системы (1) эквивалентна согласованности системы (1), (2) с $C(t) \equiv E$ [8].

Построенный в работе [4] пример несогласованной локально достижимой билинейной системы вида (6) не отвечает никакой линейной управляемой системе с наблюдателем вида (1), (2). Поэтому вопрос о необходимости свойства согласованности системы (1), (2) (управляемости системы (1)) для локальной достижимости этих систем до настоящего времени оставался открытым.

В настоящей работе поставленный вопрос полностью решен. Доказано, что свойство равномерной полной управляемости системы (1) в случае ограниченного множества $\mathbb{U}$ необходимо для ее равномерной локальной достижимости (относительно $\mathbb{U}$), причем условие ограниченности $\mathbb{U}$ существенно. Показано также, что свойство равномерной согласованности системы (1), (2) не является необходимым для ее равномерной локальной достижимости.

Управляемость и достижимость. Всюду на протяжении этого пункта через $X_U(t,s)$ будем обозначать матрицу Коши системы (5).

Напомним [9], что система (1) называется σ-равномерно вполне управляемой, если существует такое положительное число α, что матрица управляемости (матрица Калмана) $W(t_0, t_0 + \sigma) = \int_{t_0}^{t_0+\sigma} Q(t_0,s)Q^*(t_0,s)\,ds$ при всяком $t_0 \in \mathbb{R}$ и любом $\xi \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет неравенству $\xi^* W(t_0, t_0 + \sigma)\xi \geq \alpha\|\xi\|^2$.

Имеет место следующий критерий равномерной полной управляемости [10]: система (1) σ-равномерно вполне управляема в том и только в том случае, когда существует такое число $\gamma > 0$, что для произвольных $t_0 \in \mathbb{R}$ и $H \in \mathrm{M}_n$ найдется функция $W \in \mathrm{KC}_{m,n}([t_0, t_0 + \sigma])$, $\|W\|_C \leq \gamma\|H - E\|$, обеспечивающая для решения $Z(\cdot)$ матричной задачи Коши

$$\dot{Z} = Q(t_0,t)W(t), \quad Z(t_0) = E \tag{7}$$

равенство $Z(t_0 + \sigma) = H$.

Зафиксируем на числовой прямой отрезок $[t_0, t_0 + \sigma]$ и применим к системе (5) преобразование $x = X(t,t_0)z$, $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$. Обозначим $V(t) = U(t)X(t,t_0)$, тогда $\dot{z} = (X(t_0,t)x)^{\cdot} =$

$= -X(t_0,t)\dot{X}(t,t_0)X(t_0,t)x + X(t_0,t)\dot{x} = -X(t_0,t)A(t)x + X(t_0,t)A(t)x + X(t_0,t)B(t)U(t)x =$ $= Q(t_0,t)U(t)x = Q(t_0,t)V(t)z$, т.е. z удовлетворяет линейной однородной системе

$$\dot{z} = Q(t_0,t)V(t)z, \quad t \in [t_0, t_0+\sigma]. \tag{8}$$

Пусть $Z_V(t,t_0)$ – матрица Коши системы (8), $t \in [t_0, t_0+\sigma]$. Тогда

$$X_U(t,t_0) = X(t,t_0)Z_V(t,t_0). \tag{9}$$

Лемма 1. *Пусть* $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{m,n}$ *– ограниченное множество. Если система (1) локально достижима (относительно* $\mathbb{U}$*) на* $[t_0, t_0+\sigma]$, *то существуют такие* $\delta_1 > 0$ *и* $l > 0$, *что для любой матрицы* $H \in \mathrm{B}_{\delta_1}(E)$ *найдется управление* $U \in \mathrm{KC}_{m,n}([t_0, t_0+\sigma])$, $\|U\|_C \le l\|H-E\|$, *обеспечивающее равенство (4).*

Доказательство. Так как множество $\mathbb{U}$ ограничено, то существует $\nu > 0$ такое, что $\|P\| \le \nu$ для всякой $P \in \mathbb{U}$. Пусть $\delta_1 := (\delta/2)(1+\exp(b\nu\sigma e^{2a\sigma}))^{-1}$, где δ – величина из определения локальной достижимости. Возьмем произвольную $H \in \mathrm{B}_{\delta_1}(E)$ и обозначим $\varepsilon = \|H-E\|/\delta$, тогда $\varepsilon \le \delta_1/\delta$. По выбранной матрице H построим $G = E + (H-E)/\varepsilon$ (при $H = E$ берем $G = E$, $\varepsilon = 0$). Тогда $H = E + \varepsilon(G-E)$; при $H \ne E$: $\|G-E\| = \|H-E\|/\varepsilon = \delta$; при $H = E$: $\|G-E\| = 0$, т.е. в любом случае $G \in \mathrm{B}_\delta(E)$. Из локальной достижимости системы (1) вытекает существование управления $U_1 : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{U}$ такого, что $X_{U_1}(t_0+\sigma, t_0) = X(t_0+\sigma, t_0)G$. Положим $V_1(t) = U_1(t)X(t,t_0)$. Из (9) следует, что матрица Коши $Z_{V_1}(t,t_0)$ системы $\dot{z} = Q(t_0,t)V_1(t)z$ удовлетворяет равенству $Z_{V_1}(t,t_0) = X(t_0,t)X_{U_1}(t,t_0)$, поэтому $Z_{V_1}(t_0+\sigma,t_0) = X(t_0,t_0+\sigma)X_{U_1}(t_0+\sigma,t_0) = X(t_0,t_0+\sigma)X(t_0+\sigma,t_0)G = G$.

Обозначим $W_1(t) = V_1(t)Z_{V_1}(t,t_0)$. Отметим, что $\dot{Z}_{V_1}(t,t_0) = Q(t_0,t)W_1(t)$, следовательно, $Z_{V_1}(t,t_0) = E + \int_{t_0}^t Q(t_0,s)W_1(s)\,ds$.

Пусть $W(t) := \varepsilon W_1(t)$, $Z(\cdot)$ – решение матричной задачи Коши (7), т.е. $Z(t) = E + \int_{t_0}^t Q(t_0,s)W(s)\,ds$. Тогда

$$Z(t) - E = \int_{t_0}^t Q(t_0,s)W(s)\,ds = \varepsilon\int_{t_0}^t Q(t_0,s)W_1(s)\,ds = \varepsilon(Z_{V_1}(t,t_0) - E). \tag{10}$$

Из оценки сверху на ε, неравенств

$$\|Z_{V_1}(t,t_0) - E\| \le 1 + \|Z_{V_1}(t,t_0)\| \le 1 + \exp(\|Q(\cdot,t_0)\|_C\,\|V_1\|_C\sigma) \le$$

$$\le 1 + \exp(b\,e^{a\sigma}\,\|U_1\|_C\,e^{a\sigma}\,\sigma) \le 1 + \exp(b\nu\sigma e^{2a\sigma})$$

и соотношения (10) получим $\|Z(t)-E\| \le 1/2$, откуда следуют [11, с. 363] обратимость матрицы $Z(t)$ при всех $t \in [t_0, t_0+\sigma]$ и оценки $\|Z^{-1}(t)\| \le 1 + \|Z^{-1}(t)-E\| \le 1 + \|Z^{-1}(t)\|\,\|Z(t)-E\| \le$ $\le 1 + \|Z^{-1}(t)\|/2$, т.е. $\|Z^{-1}(t)\| \le 2$.

Возьмем $V(t) = W(t)Z^{-1}(t)$. Тогда $W(t) = V(t)Z(t)$, поэтому $Z(\cdot)$ удовлетворяет однородному уравнению $\dot{Z} = Q(t_0,t)V(t)Z$ и начальному условию $Z(t_0) = E$. Следовательно, $Z(t) = Z_V(t,t_0)$ – матрица Коши системы (8) с выбранным $V(\cdot)$. Из (10) получаем $Z_V(t_0+\sigma,t_0) = E + \varepsilon(Z_{V_1}(t_0+\sigma,t_0) - E) = E + \varepsilon(G-E) = H$.

Пусть $U(t) = V(t)X(t_0,t)$. Тогда $\|U\|_C \le \|X(t_0,\cdot)\|_C\,\|V\|_C \le e^{a\sigma}\|W\|_C\,\|Z^{-1}\|_C \le$ $\le 2e^{a\sigma}\|W\|_C = 2e^{a\sigma}\|W_1\|_C\,\varepsilon \le 2e^{a\sigma}\|V_1\|_C\,\|Z_{V_1}(\cdot,t_0)\|\,\varepsilon \le 2e^{a\sigma}\|U_1\|_C\,\|X(\cdot,t_0)\|_C\exp(b\nu\sigma e^{2a\sigma})\,\varepsilon \le$ $\le 2\nu\exp(2a\sigma + b\nu\sigma e^{2a\sigma})\,\varepsilon = 2\nu\exp(2a\sigma + b\nu\sigma e^{2a\sigma})\delta^{-1}\,\|H-E\| =: l\|H-E\|$. Наконец, из (9) вытекает, что для матрицы Коши $X_U(t,t_0)$ системы (5) с выбранным управлением $U(\cdot)$ справедливо равенство $X_U(t_0+\sigma,t_0) = X(t_0+\sigma,t_0)Z_V(t_0+\sigma,t_0) = X(t_0+\sigma,t_0)H$. Лемма доказана.

Поскольку найденные при доказательстве леммы величины l и δ_1 не зависят от выбора $t_0 \in \mathbb{R}$, то имеет место

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{m,n}$ *– ограниченное множество. Если система (1)* σ*-равномерно локально достижима (относительно* $\mathbb{U}$*), то существуют такие* $\delta_1 > 0$ *и* $l > 0$, *что для*

любых $t_0 \in \mathbb{R}$ *и* $H \in \mathrm{B}_{\delta_1}(E)$ *найдется управление* $U \in \mathrm{KC}_{m,n}([t_0, t_0+\sigma])$, $\|U\|_C \le l\|H-E\|$, *обеспечивающее равенство (4).*

Таким образом, из σ-равномерной локальной достижимости системы (1) относительно ограниченного множества $\mathbb{U}$ следует существование управляющей матрицы $U(\cdot)$ с липшицевой оценкой $\|U\|_C$ в зависимости от $\|H-E\|$.

Теорема 2. *Для σ-равномерной локальной достижимости (относительно $\mathbb{U}$) системы (1) в случае ограниченности множества $\mathbb{U}$ необходимо, чтобы система (1) была σ-равномерно вполне управляема.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{m,n}$ – ограниченное множество и система (1) σ-равномерно локально достижима (относительно $\mathbb{U}$). Из доказательства леммы 1 следует существование таких $\delta_1 > 0$ и $\gamma > 0$, что для всяких $t_0 \in \mathbb{R}$ и $H \in \mathrm{B}_{\delta_1}(E)$ найдется $W(\cdot) \in \mathrm{KC}_{m,n}([t_0, t_0+\sigma])$, $\|W\|_C \le \gamma\|H-E\|$, такое, что решение $Z(t) = E + \int_{t_0}^{t} Q(t_0,s)W(s)\,ds$ задачи Коши (7) удовлетворяет равенству $Z(t_0+\sigma) = H$.

Возьмем произвольную постоянную матрицу $F \in \mathrm{M}_n$ и любое $t_0 \in \mathbb{R}$. Пусть $H \in \mathrm{S}_{\delta_1}(E)$ такова, что $F - E = \alpha(H-E)$, где $\alpha \ge 0$. Поскольку $\|F-E\| = \alpha\|H-E\| = \alpha\delta_1$, то $\alpha = \|F-E\|/\delta_1$, т.е. H определяется по $F \ne E$ единственным образом равенством $H = E + (F-E)/\alpha$ (при $F = E$ берем $\alpha = 0$ и любую $H \in \mathrm{S}_{\delta_1}(E)$). Положим $V(t) = \alpha W(t)$, $t \in [t_0, t_0+\sigma]$. Тогда $\|V\|_C = \alpha\|W\|_C \le \alpha\gamma\|H-E\| = \alpha\gamma\delta_1 = \gamma\|F-E\|$. Пусть $Z_1(\cdot)$ – решение задачи Коши $\dot{Z}_1 = Q(t_0,t)V(t)$, $Z_1(t_0) = E$. Тогда $Z_1(t) = E + \int_{t_0}^{t} Q(t_0,s)V(s)\,ds = E + \alpha\int_{t_0}^{t} Q(t_0,s)W(s)\,ds = E + \alpha(Z(t)-E)$, поэтому $Z_1(t_0+\sigma) = E + \alpha(H-E) = F$. Из приведенного выше критерия равномерной полной управляемости [10] следует, что система (1) σ-равномерно вполне управляема. Теорема доказана.

Отметим, что условие ограниченности множества $\mathbb{U}$ в теоремах 1 и 2 существенно.

Пример. Рассмотрим систему (1) при $n = m = 1$, $A(t) \equiv 0$, $B(t) =: b(t) \equiv 1$ при $t \le 1$ и $b(t) = 1/t$ при $t > 1$. Тогда $X(t,s) \equiv 1$, а система (1) принимает вид

$$\dot{x} = b(t)u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{1'}$$

Пусть $\sigma = 1$. Условие σ-равномерной полной управляемости системы (1′) имеет вид $W(t_0, t_0+1) = \int_{t_0}^{t_0+1} b^2(t)\,dt \ge \alpha$, где $\alpha > 0$ не зависит от t_0. Но для $t_0 > 1$ $\int_{t_0}^{t_0+1} b^2(t)\,dt = 1/(t_0(t_0+1)) \to 0$ при $t_0 \to +\infty$, поэтому система (1′) не является σ-равномерно вполне управляемой.

Пусть $\mathbb{U} = \mathbb{R}$. Система (5) для рассматриваемого случая имеет вид $\dot{x} = b(t)u(t)x$, а ее матрица Коши $X_U(t,s) = \exp\int_s^t b(\tau)u(\tau)\,d\tau$. Возьмем $\delta = 1/2$ и любую $H \in \mathrm{B}_\delta(1) \subset \mathbb{R}$, т.е. $H = 1+h$, где $|h| \le 1/2$. Выберем на произвольном отрезке $[t_0, t_0+1]$ в качестве управления функцию $u(t) = \ln(1+h)/b(t)$, тогда

$$\exp\int_{t_0}^{t_0+1} b(\tau)u(\tau)\,d\tau = 1+h, \tag{4'}$$

т.е. условие (4) выполнено.

Итак, система (1′) является σ-равномерно локально достижимой (относительно множества $\mathbb{U} = \mathbb{R}$). Следовательно, условие ограниченности $\mathbb{U}$ в теореме 2 существенно.

Этот же пример доказывает существенность ограниченности $\mathbb{U}$ и в теореме 1, так как если бы существовало управление $u(\cdot)$, гарантирующее выполнение (4′) и удовлетворяющее оценке $\|u\|_C \le l\,|h|$ с не зависящей от t_0 и от h величиной l, то из (4′) при $t_0 \ge 1$ вытекало бы неравенство $|\ln(1+h)| = |\int_{t_0}^{t_0+1} b(\tau)u(\tau)\,d\tau| \le \|u\|_C \max\{b(t) : t \in [t_0, t_0+1]\} = \|u\|_C/t_0 \le l\,|h|/t_0$, т.е. $l \ge t_0|\ln(1+h)|/|h|$, что невозможно.

Согласованность и достижимость. Напомним [8], что система (1), (2) называется: согласованной на $[t_0, t_0+\sigma]$, если существует $l > 0$ такое, что для всякой $H \in \mathrm{M}_n$ найдется управление $U \in \mathrm{KC}_{m,r}([t_0, t_0+\sigma])$, $\|U\|_C \le l\|H\|$, для которого решение задачи Коши

$\dot{Z} = A(t)Z + B(t)U(t)R(t,t_0)$, $Z(t_0) = 0$ удовлетворяет равенству $Z(t_0+\sigma) = H$; σ-равномерно согласованной, если система (1), (2) согласованна на всяком отрезке $[t_0, t_0+\sigma]$, причем величина l не зависит от t_0.

Для системы (1), (2) на $[t_0, t_0+\sigma]$ построим совокупность n^2 функций $U_{ij}(t) = Q^*(t_0,t)e_ie_j^*R^*(t,t_0)$, $i,j = \overline{1,n}$. Известно [8], что система (1), (2) согласованна на $[t_0, t_0+\sigma]$ в том и только в том случае, когда функции $\{U_{ij}(\cdot)\}_{i,j=1}^n$ линейно независимы на $[t_0, t_0+\sigma]$.

Рассмотрим систему (1), (2) в случае $n = 2$, $m = r = 1$, $A(t) \equiv 0$. Тогда $X(t,s) \equiv E$; $B(t) =: b(t) = (b_1(t), b_2(t))^*$, $C(t) =: c(t) = (c_1(t), c_2(t))^*$ – вектор-столбцы; $Q(t_0,t) = b(t)$, $R(t,t_0) = c^*(t)$ и $U_{ij}(t) = b^*(t)e_ie_j^*c(t) = b_i(t)c_j(t)$, $i,j \in \{1,2\}$. Система (1), (2) в данном случае приобретает вид

$$\dot{x} = b(t)u, \quad y = c^*(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

а ее согласованность на $[t_0, t_0+\sigma]$ эквивалентна линейной независимости на этом отрезке совокупности функций $\{b_i(\cdot)c_j(\cdot)\}_{i,j=1}^2$.

Всюду далее будем предполагать, что $b(\cdot)$ и $c(\cdot)$ – периодические с периодом 3 вектор-функции, определенные на $[0,3[$ равенствами: $b_1(t) = c_2(t) = 1$, $b_2(t) = c_1(t) = 0$ при $t \in [0,1[$; $b_1(t) = c_2(t) = b_2(t) = 1$, $c_1(t) = 0$ при $t \in [1,2[$; $b_1(t) = c_2(t) = 0$, $b_2(t) = c_1(t) = 1$ при $t \in [2,3[$. Тогда: при $t \in [0,1[$ $b_1(t)c_2(t) = 1$, $b_2(t)c_1(t) = 0$, $b_2(t)c_2(t) = 0$; при $t \in [1,2[$ $b_1(t)c_2(t) = 1$, $b_2(t)c_1(t) = 0$, $b_2(t)c_2(t) = 1$ и при $t \in [2,3[$ $b_1(t)c_2(t) = 0$, $b_2(t)c_1(t) = 1$, $b_2(t)c_2(t) = 0$; $b_1(t)c_1(t) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$, поэтому совокупность функций $\{b_i(\cdot)c_j(\cdot)\}_{i,j=1}^2$ линейно зависима на всяком отрезке $[t_0, t_0+\sigma]$, следовательно, система (11) не является согласованной ни на каком отрезке $[t_0, t_0+\sigma]$. Ниже мы покажем, что система (11) является равномерно локально достижимой (относительно множества $\mathbb{U} = [-\varepsilon, \varepsilon]$) на отрезках длины 12, где $\varepsilon > 0$ любое.

Построим для рассматриваемого случая систему (3). Так как $m = r = 1$, то управляющая матрица $U(t) \in \mathrm{M}_{m,r}$ здесь превращается в скаляр $u(t)$, поэтому система (3) принимает вид

$$\dot{x} = b(t)c^*(t)u(t)x = \begin{pmatrix} b_1(t)c_1(t) & b_1(t)c_2(t) \\ b_2(t)c_1(t) & b_2(t)c_2(t) \end{pmatrix} u(t)x = \begin{pmatrix} 0 & b_1(t)c_2(t) \\ b_2(t)c_1(t) & b_2(t)c_2(t) \end{pmatrix} u(t)x.$$

Обозначим через $X_u(t,s)$ матрицу Коши этой системы.

Лемма 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $m_1 > 0$ такое, что для всяких $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{B}_{m_1}(0) \subset \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{Z}$ найдется управление $u : [3k, 3k+3[\to \mathbb{R}$, $\|u\|_C \le \varepsilon$, для которого*

$$X_u(3k+3, 3k) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1+\gamma \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in]0,1]$ любое. Положим $m_1(\varepsilon) = \varepsilon/3$, выберем произвольные α, β, $\gamma \in \mathrm{B}_{m_1}(0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Возьмем $u(t) \equiv u_j$ при $t \in [3k+j-1, 3k+j[$, $j = 1,2,3$ (выбор u_j уточним ниже) и обозначим $v_2 = \exp(u_2) - 1$. Тогда

$$X_u(3k+3, 3k) = X_{u_3}(3k+3, 3k+2)X_{u_2}(3k+2, 3k+1)X_{u_1}(3k+1, 3k) =$$

$$= \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_3 & 0 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & u_2 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & u_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & v_2 \\ 0 & 1+v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & u_1+v_2 \\ u_3 & 1+v_2+u_1u_3+v_2u_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для нахождения величин u_j по заданным α, β, γ получаем систему уравнений $\alpha = u_1 + v_2$, $\beta = u_3$, $\gamma = v_2 + u_1u_3 + v_2u_3$. Отсюда $u_1 = \alpha - \gamma + \alpha\beta$, $u_3 = \beta$, $v_2 = \gamma - \alpha\beta$, т.е. $u_2 = \ln(1+\gamma-\alpha\beta)$. Оценим $|u_j|$. Имеем $|u_1| \le |\alpha| + |\gamma| + |\alpha|\,|\beta| \le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 +$

$+(\varepsilon/3)(1/3) < \varepsilon$, $|u_3| = |\beta| \le \varepsilon/3 < \varepsilon$. Для оценки $|u_2|$ воспользуемся известными неравенствами $0 \le \ln(1+x) \le x$ при $x \ge 0$ и $0 > \ln(1+x) > x/(1+x)$ при $x \in]-1,0[$. Следовательно, $|\ln(1+x)| \le |x|/(1-|x|)$ при $x \in]-1,1[$, поэтому $|u_2| \le |\gamma - \alpha\beta|/(1-|\gamma-\alpha\beta|) \le$ $\le (|\gamma| + |\alpha|\,|\beta|)/(1-|\gamma|-|\alpha|\,|\beta|) \le (\varepsilon/3 + (\varepsilon/3)(1/3))/(1-1/3-1/9) < 2(\varepsilon/3+(\varepsilon/3)(1/3)) =$ $= 8\varepsilon/9 < \varepsilon$.

Итак, норма построенного управления $u(\cdot)$ удовлетворяет неравенству $\|u\|_C < \varepsilon$.

При $\varepsilon > 1$ берем $m_1(\varepsilon) = 1/3$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $m_2 > 0$ такое, что для всяких $\lambda \in \mathrm{B}_{m_2}(1) \subset \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{Z}$ найдется управление $u : [3k, 3k+6[\to \mathbb{R}$, $\|u\|_C \le \varepsilon$ такое, что $X_u(3k+6, 3k) = \lambda E$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon \in]0,1]$ любое. Положим $m_2(\varepsilon) = \varepsilon^2/36$, выберем произвольные $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathrm{B}_{m_2}(1)$. Тогда $\lambda \in [1-1/36, 1+1/36]$, поэтому $1/2 < \lambda < 2$. В соответствии с леммой 2 построим на $[3k, 3k+6[$ управление $u(\cdot)$ так, чтобы выполнялись равенства

$$X_u(3k+3j, 3k+3(j-1)) = H_j, \quad H_j = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_j \\ \beta_j & 1+\gamma_j \end{pmatrix}, \quad j = 1,2, \tag{13}$$

выбор α_j, β_j, γ_j уточним ниже. Тогда $X_u(3k+6,3k) = X_u(3k+6,3k+3)X_u(3k+3,3k) =$ $= H_2H_1 = \begin{pmatrix} 1+\alpha_2\beta_1 & \alpha_1+\alpha_2(1+\gamma_1) \\ \beta_2+\beta_1(1+\gamma_2) & 1+\alpha_1\beta_2+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_1\gamma_2 \end{pmatrix}$. Следовательно, для нахождения величин α_j, β_j, γ_j по заданному λ получаем систему уравнений $\alpha_2\beta_1 = \lambda-1$, $\alpha_1+\alpha_2(1+\gamma_1) = 0$, $\beta_2+\beta_1(1+\gamma_2) = 0$, $\alpha_1\beta_2+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_1\gamma_2 = \lambda-1$.

Возьмем $\alpha_2 = \sqrt{|\lambda-1|}$, $\beta_1 = \sqrt{|\lambda-1|}\,\mathrm{sign}(\lambda-1)$, тогда первое уравнение этой системы выполнено, а из второго и третьего уравнений получаем $\alpha_1 = -\alpha_2(1+\gamma_1) = -\sqrt{|\lambda-1|}(1+\gamma_1)$, $\beta_2 = -\beta_1(1+\gamma_2) = -\sqrt{|\lambda-1|}(1+\gamma_2)\,\mathrm{sign}(\lambda-1)$, поэтому $\alpha_1\beta_2 = (\lambda-1)(1+\gamma_1)(1+\gamma_2) =$ $= \lambda-1+(\lambda-1)(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_1\gamma_2)$. Из последнего уравнения выписанной системы имеем $\lambda-1+$ $+(\lambda-1)(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_1\gamma_2)+(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_1\gamma_2) = \lambda-1$, т.е. $\lambda(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_1\gamma_2) = 0$. Так как $\lambda \ne 0$, то $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_1\gamma_2 = 0$. Возьмем $\gamma_1 = \lambda-1$, тогда $\gamma_2 = -\gamma_1/(1+\gamma_1) = (1-\lambda)/\lambda$, $\alpha_1 = -\lambda\sqrt{|\lambda-1|}$, $\beta_2 = -\sqrt{|\lambda-1|}\,\mathrm{sign}(\lambda-1)/\lambda$. Оценим величины $|\alpha_j|$, $|\beta_j|$, $|\gamma_j|$. Поскольку $\sqrt{|\lambda-1|} \le \varepsilon/6$, то $|\alpha_1| = \lambda\sqrt{|\lambda-1|} < 2\varepsilon/6 = \varepsilon/3$, $|\alpha_2| = \sqrt{|\lambda-1|} \le \varepsilon/6$, $|\beta_1| = \sqrt{|\lambda-1|} \le \varepsilon/6$, $|\beta_2| =$ $= \sqrt{|\lambda-1|}/\lambda < 2\varepsilon/6 = \varepsilon/3$, $|\gamma_1| = |\lambda-1| \le \varepsilon^2/36 \le \varepsilon/36$, $|\gamma_2| = |\lambda-1|/\lambda \le 2\varepsilon^2/36 =$ $= \varepsilon^2/18 \le \varepsilon/18$.

Из доказательства леммы 2 следует, что норма управления $u(\cdot)$, обеспечивающего равенства (13) с найденными α_j, β_j, γ_j, удовлетворяет неравенству $\|u\|_C < 3\max\{|\alpha_j|, |\beta_j|, |\gamma_j| : j = 1,2\}$, поэтому $\|u\|_C < 3\varepsilon/3 = \varepsilon$.

При $\varepsilon > 1$ берем $m_2(\varepsilon) = 1/36$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Свойство σ-равномерной согласованности системы (1), (2) не является необходимым для ее σ-равномерной локальной достижимости.*

Доказательство. Выше было отмечено, что 3-периодическая система (11) не является σ-равномерно согласованной ни при каком $\sigma > 0$. Покажем, что система (11) равномерно локально достижима (относительно множества $\mathbb{U} = [-\varepsilon, \varepsilon]$) на отрезках длины 12 при любом $\varepsilon > 0$.

Надо доказать следующее утверждение: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякой матрицы $H \in \mathrm{B}_\delta(E) \subset \mathrm{M}_2$ и всякого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется управление $u : [t_0, t_0+12] \to \mathbb{R}$, $\|u\|_C \le \varepsilon$ такое, что $X_u(t_0+12, t_0) = H$.

Пусть $\varepsilon \in]0,1]$ любое. Обозначим $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2/(36\sqrt{2})$, возьмем произвольные $t_0 \in \mathbb{R}$ и $H = \begin{pmatrix} 1+h_1 & h_2 \\ h_3 & 1+h_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{B}_\delta(E)$. Оценим величины $|h_j|$. Пусть $\|P\|_1 = \max\{|p_{11}|+|p_{21}|, |p_{12}|+$ $+|p_{22}|\}$ – максимальная столбцовая норма [11, с. 356] матрицы $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^2 \in \mathrm{M}_2$. Тогда [11, с. 366] $\max\limits_{P\ne 0} \|P\|_1/\|P\| = \sqrt{2}$, поэтому $\|P\|_1 \le \sqrt{2}\|P\|$ для любой $P \in \mathrm{M}_2$. Следовательно, для каждого $j \in \{1,2,3,4\}$ выполнено $|h_j| \le \max\{|h_1|+|h_3|, |h_2|+|h_4|\} = \|H-E\|_1 \le$ $\le \sqrt{2}\|H-E\| \le \sqrt{2}\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2/36$.

Пусть $k \in \mathbb{Z}$ таково, что $3k \in [t_0, t_0+3[$. Тогда $[3k, 3k+9[\subset [t_0, t_0+3+9[\subset [t_0, t_0+12]$. Положим $u(t) \equiv 0$ для $t \in [t_0, t_0+12] \setminus [3k, 3k+9[$. В соответствии с леммой 2 на $[3k, 3k+3[$ построим управление $u(\cdot)$ так, чтобы было выполнено равенство (12) с $\alpha = h_2/(1+h_1)$, $\beta = h_3/(1+h_1)$, $\gamma = (h_4 - h_1)/(1+h_1)$. Отметим, что $|\alpha| \le |h_2|/(1-|h_1|) \le 2\varepsilon^2/36 < \varepsilon/3$, $|\beta| \le |h_3|/(1-|h_1|) < \varepsilon/3$, $|\gamma| \le (|h_1|+|h_4|)/(1-|h_1|) \le 4\varepsilon^2/36 < \varepsilon/3$, поэтому на $[3k, 3k+3[$ имеет место неравенство $\|u\|_C < 3\max\{|\alpha|, |\beta|, |\gamma|\} < \varepsilon$.

Пользуясь леммой 3, на $[3k+3, 3k+9[$ строим $u(\cdot)$ так, чтобы $X_u(3k+9, 3k+3) = (1+h_1)E$. Из доказательства этой леммы следует, что $\|u\|_C < 3 \cdot 2\sqrt{|h_1|} = 6\varepsilon/6 = \varepsilon$.

Итак, построенное на $[t_0, t_0+12]$ управление $u(\cdot)$ удовлетворяет оценке $\|u\|_C < \varepsilon$ и гарантирует выполнение равенства $X_u(t_0+12, t_0) = X_u(3k+9, 3k) = X_u(3k+9, 3k+3)X_u(3k+3, 3k) =$

$$= (1+h_1)\begin{pmatrix} 1 & h_2/(1+h_1) \\ h_3/(1+h_1) & 1+(h_4-h_1)/(1+h_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+h_1 & h_2 \\ h_3 & 1+h_1+h_4-h_1 \end{pmatrix} = H.$$

Для $\varepsilon > 1$ полагаем $\delta(\varepsilon) = 1/(36\sqrt{2})$. Теорема доказана.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 99-01-00454) и Конкурсным центром Министерства образования Российской Федерации (грант E00-1.0-5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Миллионщиков В.М.* // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10. № 1. С. 99–104.
2. *Изобов Н.А.* // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1974. Т. 12. С. 71–146.
3. *Tonkov E.L.* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Suppl. 1. 2000. P. S228–S253.
4. *Зайцев В.А.* Согласованность, достижимость и управление показателями Ляпунова: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ижевск, 2000.
5. *Зайцев В.А., Тонков Е.Л.* // Изв. вузов. Математика. 1999. № 2 (441). С. 45–56.
6. *Попова С.Н., Тонков Е.Л.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 15. № 11. С. 1949–1957.
7. *Попова С.Н.* // Вестн. Удмурт. ун-та. Ижевск, 1992. Вып. 1. С. 23–39.
8. *Попова С.Н., Тонков Е.Л.* // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.
9. *Kalman R.E.* // Bol. Soc. mathem. mexic. 1960. V. 5. № 1. P. 102–119.
10. *Макаров Е.К., Попова С.Н.* // Докл. НАН Беларуси. 1998. Т. 42. № 6. С. 13–16.
11. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М., 1989.

Институт математики и информатики при Удмуртском государственном университете, г. Ижевск

Поступила в редакцию 23.10.2001 г.