Y. A. Rovba, P. G. Patseika, Letter to the editors,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 2021, Number 1, 97–99

https://www.mathnet.ru/eng/ivm9643

Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2021, №1, с. 97–99 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

Е.А. РОВБА, П.Г. ПОЦЕЙКО

В нашей работе «Приближения сопряженных функций частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева–Маркова» из № 9, с. 68–84, (2020), были замечены недостатки, допущенные по вине авторов. Последнюю формулу на с. 70 и первую формулу на с. 72 следует трактовать как суммы соответствующих рядов в обобщенном смысле ([1], с. 526). Такое допущение не влияет на правильность результатов теоремы 2 и дальнейших, однако в строгом изложении авторы вносят следующие исправления:

a) Предложение с формулой (4) на с. 70 следует переписать так: Сопряженным рядом Фурье по системе алгебраических дробей Чебышева–Маркова по аналогии с ([2], с. 518) будем называть выражение вида

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{2n} N_{2n}(x), \quad N_{2n}(x) = \sin n \arccos\left(x\sqrt{\frac{1+a^2}{1+a^2x^2}}\right), \ n = 1, 2, \dots, \tag{4}$$

где c_{2n} определена в (3).

b) Между формулой (4) и теоремой 1 на с. 70 следует вставить предложение:

Функция $\hat{f}(x)$, сопряженная к четной функции $f(x)$, заданной на интервале $(-1,\ 1)$ и интегрируемой с весом $(1-x^2)^{-1/2}$, определяется как

$$\hat{f}(x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t)}{t^2 - x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in (-1, 1), \tag{5}$$

где сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

c) Формулу (8) с комментариями со с. 71 вставить после определения сопряженной функции на с. 70. Присвоить ей номер (6). Все ссылки по тексту на формулу(8) заменить ссылками на формулу (6).

d) Теорему 1 и ее доказательство переписать в следующей трактовке:

Теорема 1. *Для частичной суммы $\hat{s}_{2n}(f,\ x),\ n = 1, 2, \dots,$ имеет место представление*

$$\hat{s}_{2n}(f,\ x) = \hat{f}(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(t)\rho(t,\ a)\hat{D}_{2n}(t,\ x)\, dt, \quad x \in (-1,\ 1), \tag{7}$$

где

$$\hat{D}_{2n}(t,\ x) = \frac{M_{2n+2}(t)N_{2n}(x) - M_{2n}(t)N_{2n+2}(x)}{M_2(t) - M_2(x)}$$

— сопряженное ядро Дирихле. Интеграл в (7) понимается в смысле главного значения по Коши.

Поступило в редакцию 13.11.2020.

Доказательство. В (6) вместо $c_{2k}, k = 1, \dots, n$, подставим их интегральные представления. Тогда

$$\hat{s}_{2n}(f,\ x) = \frac{4}{\pi} \int\limits_0^1 f(t)\rho(t,\ a)\hat{D}_{2n}(t,\ x)\, dt, \tag{8}$$

где

$$\hat{D}_{2n}(t,\ x) = \sum_{k=1}^{n} \cos 2k\tau \sin 2k\theta, \quad t\sqrt{\frac{1+a^2}{1+a^2t^2}} = \cos\tau,\ x\sqrt{\frac{1+a^2}{1+a^2x^2}} = \cos\theta,\ n = 1, 2, \dots .$$

Преобразуем сумму $\hat{D}_{2n}(t,\ x)$. Учитывая, что

$$\hat{D}_{2n}(t,\ x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin 2k(\theta+\tau) + \sin 2k(\theta-\tau)\right],$$

после некоторых алгебраических преобразований, получим

$$\hat{D}_{2n}(t,\ x) = \frac{\sin 2\theta - [\sin(2n+2)\theta\cos 2n\tau - \sin 2n\theta\cos(2n+2)\tau]}{2(\cos 2\tau - \cos 2\theta)}. \tag{9}$$

Подставив (9) в (8), будем иметь

$$\hat{s}_{2n}(f,\ x) = \frac{2}{\pi}\sin 2\theta \int\limits_0^1 f(t)\rho(t,\ a)\frac{dt}{\cos 2\tau - \cos 2\theta} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 f(t)\rho(t,\ a)\frac{M_{2n+2}(t)N_{2n}(x) - M_{2n}(t)N_{2n+2}(x)}{\cos 2\tau - \cos 2\theta}\, dt,$$

где каждый по отдельности интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Подробное обоснование данного действия приведено, например, в ([2], с. 520). Учитывая, что $\cos 2\tau = M_2(t)$, $\cos 2\theta = M_2(x)$, выражение для $\rho(t,\ a)$, а также, что $\sin 2\theta = 2M_1(x)N_1(x)$, чтобы прийти к представлению (7), достаточно в последнем выражении провести несложные алгебраические преобразования. □

e) Первое и второе предложения в доказательстве теоремы 2 до формулы (14) включительно заменить следующим:

Из (11) и теоремы 1 вытекает

$$\hat{\varepsilon}_{2n}(x,\ \alpha) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 f(t)\rho(t,\ a)\hat{D}_{2n}(t,\ x)dt, \quad x \in (-1,\ 1), \tag{14}$$

где $\hat{D}_{2n}(t,\ x)$ определено в (7).

f) В замечании 2 на с. 73 приводится функция, сопряженная к $|x|^s$ в смысле Лежандра–Юнга–Фенхеля ([3], с. 98).

Отметим, что указанные неточности не влияют на правильность полученных результатов о приближениях сопряженных функций на отрезке частичными суммами сопряженных рядов по системе алгебраических дробей Чебышёва–Маркова.

Авторы благодарят профессора А.А. Пекарского за полезные замечания и внимание к работе и приносят извинения читателям журнала за допущенные неточности.

Е.А. Ровба, П.Г. Поцейко

Литература

[1] King F.W. *Hilbert Transforms*, Vol. 1, Encyclopedia of Math. and its Appl. (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009).
[2] Бари Н.К. *Тригонометрические ряды* (Физматлит, М., 1961).
[3] Половинкин, Е.С., Балашов М.В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа* (Физматлит, М., 2004).