Е. В. Стефанюк, В. П. Радченко, Теплопроводность в пластине при переменных во времени граничных условиях третьего рода. Температура среды – экспоненциальная функция времени, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004, выпуск 26, 21–25

DOI: 10.14498/vsgtu172

УДК 536.2

Е.В. Стефанюк, В.П. Радченко

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ПЛАСТИНЕ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ТРЕТЬЕГО РОДА. ТЕМПЕРАТУРА СРЕДЫ – ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ВРЕМЕНИ

Путем совместного использования методов Л. В. Канторовича и ортогонального метода Бубнова-Галеркина получено приближенное аналитическое решение задачи теплопроводности для бесконечно протяженной пластины при переменных во времени граничных условиях 3–го рода.

Математическая постановка задачи при наличии переменных во времени граничных условий существенно усложняется. Применение точных аналитических методов для решения таких задач оказывается затруднительным. Для их решения весьма полезным может быть применение комбинации точных (Фурье, интегральных преобразований и др.) и приближенных аналитических (вариационных, взвешенных невязок, коллокаций и др.) методов [1-5].

Рассмотрим совместное использование метода Л.В. Канторовича и ортогонального метода Бубнова-Галеркина применительно к решению задачи теплопроводности для бесконечно-протяженной пластины при экспоненциальном изменении температуры среды. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\frac{\partial T(h,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T(h,t)}{\partial h^2} \quad (t>0;\ 0\le h<d); \tag{1}$$

$$T(h,0) = T_0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial h} = 0; \tag{3}$$

$$l\,\frac{\partial T(d,t)}{\partial h} + a\left[T(d,t) - T_{ср}(t)\right] = 0, \tag{4}$$

где T – температура; T_0 – начальная температура; $T_{ср}(t) = T_м - (T_м - T_0)e^{-bt}$ – температура среды; h – координата; t – время; d – толщина пластины; a – коэффициент теплоотдачи; l – коэффициент теплопроводности; a – коэффициент температуропроводности; b – коэффициент; $T_м$ – максимальная температура внешней среды.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta = (T(x,Fo) - T_0)/(T_м - T_0); \quad Bi = ad/l; \quad x = h/d; \quad Fo = at/d^2, \quad Pd = bd^2/a, \tag{5}$$

где Θ – относительная избыточная температура; x – безразмерная координата; Fo – число Фурье; Bi – число Био; Pd – критерий Предводителева.

С учетом принятых обозначений задача (1) – (4) примет вид

$$\frac{\partial\Theta(x,Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2\Theta(x,Fo)}{\partial x^2} \quad (Fo>0;\ 0\le x<1); \tag{6}$$

$$\Theta(x,0) = 0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,Fo)}{\partial x} = 0; \tag{8}$$

$$\frac{\partial\Theta(1,Fo)}{\partial x} - Bi\left[1 - \exp(-PdFo) - \Theta(1,Fo)\right] = 0. \tag{9}$$

Следуя методу Л.В. Канторовича, решение задачи (6) – (9) в первом приближении [4] принимается в виде

$$\Theta(x,Fo) = 1 - \exp(-PdFo)\,f(Fo)\,j(x), \tag{10}$$

где $f(Fo)$ – неизвестная функция времени; $j(x) = \dfrac{Bi+2}{Bi} - x^2$ – координатная функция.

Благодаря принятой конструкции координатной функции $j(x)$ соотношение (10) точно удовлетворяет граничным условиям (8), (9). Для нахождения неизвестной функции времени $f(Fo)$ в нулевом приближении составляется интеграл взвешенной невязки дифференциального уравнения (6), т.е.

$$\int_0^1 \left[Pd\exp(-PdFo) - \frac{\partial f(Fo)}{\partial Fo} j(x) + f(Fo)\frac{\partial^2 j(x)}{\partial x^2} \right] dx = 0\,. \qquad (11)$$

Вычисляя интегралы в (11), относительно неизвестной функции времени приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению 1– го порядка:

$$Pd + f_1'(Fo)\left(\frac{Bi+2}{Bi} - \frac{1}{3}\right) + 2f_1(Fo) = 0 \qquad f'(Fo) + Df(Fo) - 0.5DPd\cos(PdFo) = 0\,, \qquad (12)$$

где $D = \dfrac{5(Bi)^2 + 15Bi}{2(Bi)^2 + 10Bi + 15}$ – коэффициент.

Для решения уравнения (12) воспользуемся методом варьирования произвольной постоянной [1]. Для этого найдем сначала решение однородного уравнения

$$f'(Fo) + Df(Fo) = 0\,, \qquad (13)$$

которое имеет вид

$$f(Fo) = C\exp(-DFo)\,. \qquad (14)$$

Решение для уравнения (12) будем разыскивать в виде

$$f(Fo) = C(Fo)\exp(-DFo)\,, \qquad (15)$$

считая C не постоянной, а функцией времени. Подставляя решение (15) в уравнение (12), получим

$$C'(Fo) = 0{,}5\,D\,Pd\,\cos(PdFo)\exp(DFo)\,. \qquad (16)$$

Определяя интеграл в (16), получим

$$C(Fo) = \frac{D\,Pd\,\exp(DFo)}{2(D^2 + Pd^2)}\left[D\cos(PdFo) + Pd\sin(PdFo)\right] + C_1\,, \qquad (17)$$

где C_1 – постоянная интегрирования. Подставляя (17), (15) в (10), получим

$$\Theta(x, Fo) = \sin(PdFo) - \left[\frac{D\,Pd\,\exp(DFo)}{2(D^2 + Pd^2)}\left[D\cos(PdFo) + Pd\sin(PdFo)\right] + C_1\right]\exp(-DFo)j(x)\,. \quad (18)$$

Для определения постоянной интегрирования C_1 составляется интеграл взвешенной невязки начального условия, т.е.

$$\int_0^1 \left(\sin(Pd\cdot 0) - f(0)j(x)\right) j(x)dx = 0\,. \qquad (19)$$

Отсюда $C_1 = -\dfrac{D^2 Pd}{2(D^2 + Pd^2)}$. С учетом найденного значения C_1 соотношение (18) в первом приближении принимает вид

$$\Theta(x, Fo) = \sin(PdFo) - \left[\frac{D\,Pd\exp(DFo)}{2(D^2 + Pd^2)}\left[D\cos(PdFo) + Pd\sin(PdFo)\right] - \frac{D^2 Pd}{2(D^2 + Pd^2)}\right] \times$$
$$\times\exp(-DFo)j(x)\,. \qquad (20)$$

Соотношение (20) полностью совпадает с решением в первом приближении задачи (6)–(9), полученным в работе [1] путем совместного использования интегральных преобразований Лапласа и ортогонального метода Бубнова – Галеркина.

Решение задачи (6) – (9) при любом числе приближений находится в виде

$$\Theta(x, Fo) = \sin(PdFo) - \sum_{k=1}^{n} f_k(Fo)j_k(x)\,, \qquad (21)$$

где $j_k(x) = \dfrac{Bi + 2k}{Bi} - x^{2k}$ - координатные функции. При использовании таких координатных функций соотношение (21) в любом приближении удовлетворяет граничным условиям (8), (9). Найдем решение задачи во втором приближении. Для нахождения $f_k(Fo)$ ($k = 1{,}2$) из условия ортогональности невязки уравнения (6) к координатным функциям $j_1(x)$ и $j_2(x)$ получим

$$\int_0^1 \left[Pd - \sum_{k=1}^{2}\left(f_k'(Fo)j_k(x) - f_k(Fo)j_k''(x)\right)\right] j_j(x)dx = 0 \;\; (j = 1{,}2\,). \qquad (22)$$

Определяя интегралы, относительно неизвестных функций времени приходим к следующей системе двух неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} A_{11} f_1' + A_{12} f_2' + B_{11} f_1 + B_{12} f_2 + R_1 = 0; \\ A_{21} f_1' + A_{22} f_2' + B_{21} f_1 + B_{22} f_2 + R_2 = 0, \end{cases} \tag{23}$$

где $\quad A_{jk} = \int_0^1 j_k(x) j_j(x) dx$; $B_{jk} = -\int_0^1 j_k''(x) j_j(x) dx$; $R_k = Pd \int_0^1 j_k(x) dx$.($j = k = 1{,}2$).

Решение системы уравнений (23) разыскивается в виде

$$f_1(Fo) = \overline{f}_1(Fo) + f_1^*(Fo); \tag{24}$$

$$f_2(Fo) = \overline{f}_2(Fo) + f_2^*(Fo), \tag{25}$$

где $\overline{f_1}(Fo)$, $\overline{f_2}(Fo)$ – частные решения неоднородной системы уравнений (23); $f_1^*(Fo)$, $f_2^*(Fo)$ – общие решения соответствующей однородной системы, т.е. при $R_1 = R_2 = 0$.

Общие решения соответствующей однородной системы находятся в виде

$$f_1^*(Fo) = D_1 e^{mFo}; \qquad f_2^*(Fo) = D_2 e^{mFo}, \tag{26}$$

где D_1, D_2, m – некоторые пока неизвестные постоянные. Подставляя (26) в (23) и положив $R_1 = R_2 = 0$, получим следующую систему двух однородных алгебраических линейных уравнений:

$$\begin{cases} D_1(A_{11}m + B_{11}) + D_2(A_{12}m + B_{12}) = 0; \\ D_1(A_{21}m + B_{21}) + D_2(A_{22}m + B_{22}) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Однородная система имеет нетривиальное решение в случае, если ее определитель равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} A_{11}m + B_{11} & A_{12}m + B_{12} \\ A_{21}m + B_{21} & A_{22}m + B_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, относительно m_k получим алгебраический полином 2-ой степени. Так как элементы матрицы положительны и симметричны относительно главной диагонали, то корни m_k $(k = 1{,}2)$ должны быть действительными отрицательными числами. Эти корни являются приближенными значениями собственных чисел краевой задачи Штурма – Лиувилля для уравнения теплопроводности с переменными во времени граничными условиями 3–го рода [2].

Подставляя m_k $(k = 1{,}2)$ в (25), для каждого собственного числа находятся неизвестные коэффициенты D_{kj} $(k = j = 1{,}2)$. При этом в однородной системе следует положить $D_{k1} = 1$ ($k = 1{,}2$). Неизвестные функции времени $f_k^*(Fo)$ находятся из (26).

С учетом найденных значений D_{kj} $(k = j = 1{,}2)$ соотношения (25) примут вид

$$f_1^*(Fo) = D_{11}\exp(m_1 Fo) + D_{21}\exp(m_2 Fo); \tag{28}$$

$$f_2^*(Fo) = D_{12}\exp(m_1 Fo) + D_{22}\exp(m_2 Fo). \tag{29}$$

Умножая в (28), (29) слагаемые, соответствующие корню m_1, на произвольную постоянную C_1 и корню m_2 – на C_2, а также учитывая, что $D_{11} = D_{21} = 1$, получим

$$f_1^*(Fo) = C_1\exp(m_1 Fo) + C_2\exp(m_2 Fo); \tag{30}$$

$$f_2^*(Fo) = C_1 D_{12}\exp(m_1 Fo) + C_2 D_{22}\exp(m_2 Fo), \tag{31}$$

где C_1 и C_2 находятся из начального условия (7) (см. ниже формулу (43)). Соотношения (30), (31) представляют общее решение системы уравнений (23) при $R_1 = R_2 = 0$.

Частные решения системы уравнений (23) разыскиваются в виде (30), (31), считая C_1 и C_2 не постоянными, а функциями времени, т.е.

$$\overline{f}_1(Fo) = C_1(Fo)\exp(m_1 Fo) + C_2(Fo)\exp(m_2 Fo); \tag{32}$$

$$\overline{f}_2(Fo) = C_1(Fo)D_{12}\exp(m_1 Fo) + C_2(Fo)D_{22}\exp(m_2 Fo)\,. \qquad (33)$$

Подставляя (32), (33) в (23), найдем

$$\begin{cases} C_1' v_1 (A_{11} + A_{12}D_{12}) + C_2' v_2 (A_{11} + A_{12}D_{22}) + R_1 = 0\,; & (34) \\ C_1' v_1 (A_{21} + A_{22}D_{12}) + C_2' v_2 (A_{21} + A_{22}D_{22}) + R_2 = 0\,. & (35) \end{cases}$$

Решая систему уравнений (34), (35), получим

$$C_1' = -\frac{7}{624}\frac{(33+26D_{22})}{v_1(D_{12}-D_{22})}\,;\; C_2' = \frac{7}{624}\frac{(33+26D_{12})}{v_2(D_{12}-D_{22})}\,. \qquad (36)$$

Интегрируя (36), найдем

$$C_1(Fo) = \frac{7}{624}\frac{(33+26D_{22})}{v_1 m_1(D_{12}-D_{22})} + x\,;\, C_2(Fo) = -\frac{7}{624}\frac{(33+26D_{12})}{v_2 m_2(D_{12}-D_{22})} + x\,, \qquad (37)$$

где x_1, x_2 – постоянные интегрирования (так как находятся частные решения, то можно принять $x_1 = x_2 = 0$).

Подставляя (37) в (32), (33), получим

$$\overline{f}_1(Fo) = \frac{7}{624}\frac{(33+26D_{22})}{m_1(D_{12}-D_{22})} - \frac{7}{624}\frac{(33+26D_{12})}{m_2(D_{12}-D_{22})}\,; \qquad (38)$$

$$\overline{f}_2(Fo) = \frac{7D_{12}}{624}\frac{(33+26D_{22})}{m_1(D_{12}-D_{22})} - \frac{7D_{22}}{624}\frac{(33+26D_{12})}{m_2(D_{12}-D_{22})}\,. \qquad (39)$$

Подставляя соотношения (30), (31), (38), (39) в (24), (25), найдем

$$f_1(Fo) = C_1\exp(m_1 Fo) + C_2\exp(m_2 Fo) + \frac{7}{624}\frac{(33+26D_{22})}{m_1(D_{12}-D_{22})} - \frac{7}{624}\frac{(33+26D_{12})}{m_2(D_{12}-D_{22})}\,; \qquad (40)$$

$$f_2(Fo) = D_{12}C_1\exp(m_1 Fo) + D_{22}C_2\exp(m_2 Fo) + \frac{7D_{12}}{624}\frac{(33+26D_{22})}{m_1(D_{12}-D_{22})} - \frac{7D_{22}}{624}\frac{(33+26D_{12})}{m_2(D_{12}-D_{22})}\,. \qquad (41)$$

Подставляя (40), (41) в (21), получим

$$\Theta(x,Fo) = PdFo + \left[C_1\exp(m_1 Fo) + C_2\exp(m_2 Fo) + \frac{7}{624}\frac{(33+26D_{22})}{m_1(D_{12}-D_{22})} - \frac{7}{624}\frac{(33+26D_{12})}{m_2(D_{12}-D_{22})}\right] j_1(x) +$$

$$+\left[D_{12}C_1\exp(m_1 Fo) + D_{22}C_2\exp(m_2 Fo) + \frac{7D_{12}}{624}\frac{(33+26D_{22})}{m_1(D_{12}-D_{22})} - \frac{7D_{22}}{624}\frac{(33+26D_{12})}{m_2(D_{12}-D_{22})}\right] j_2(x)\,. \qquad (42)$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 составляется невязка начального условия (7) и требуется ортогональность невязки к координатным функциям $j_1(x)$ и $j_2(x)$, т.е.

$$\int_0^1 \Theta(x,0)\, j_j(x)dx = 0 \;\; (j = 1,2\,). \qquad (43)$$

Из решения системы двух алгебраических линейных уравнений (43) находятся постоянные C_1 и C_2. После их определения решение задачи (6) – (9) в замкнутом виде находится из (42).

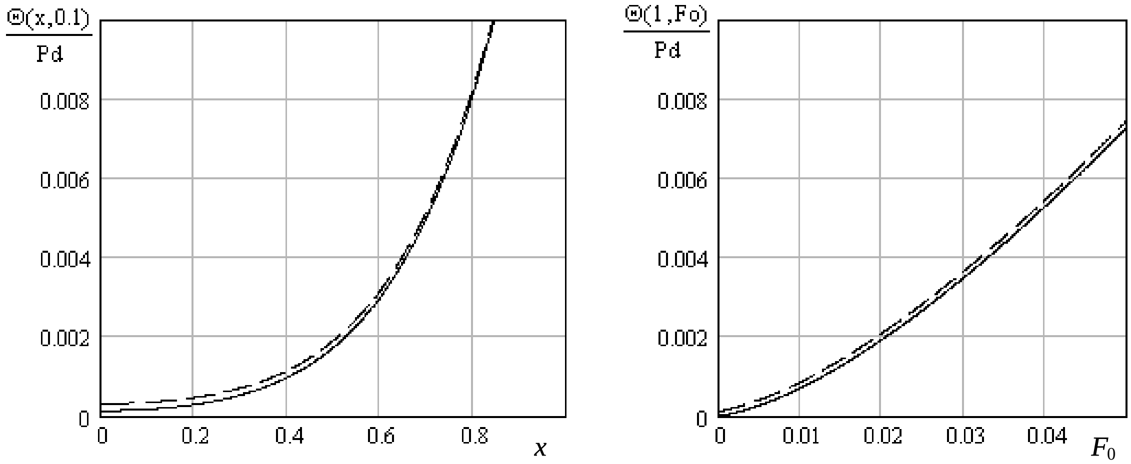
Результаты расчетов относительной избыточной температуры по формуле (22) в сравнении с точным решением [2] представлены на рис.1. В точном решении было взято 30 членов ряда (формула (9), с. 289, [2]).

Собственные числа для двух и четырех приближений при $Bi = 1$, а также точные их значения представлены в таблице.

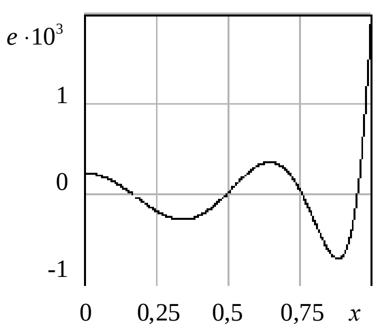
Анализируя изменение невязки e уравнения (6) по координате x при $Fo = 0{,}01$ (рис. 2), можно заметить, что максимальное значение она принимает в точке $x = 1$. Анализ изменения невязки уравнения (6) во времени в точках $x = 0$ и $x = 1$ (рис. 3 и 4) показывает, что при $Fo \geq 0{,}01$ она становится практически равной нулю. Невязка начального условия во всем диапазоне координаты x равна нулю. Отметим, что нулевая невязка начального условия имеет место уже в первом приближении (см. формулу (20)).

Значения собственных чисел

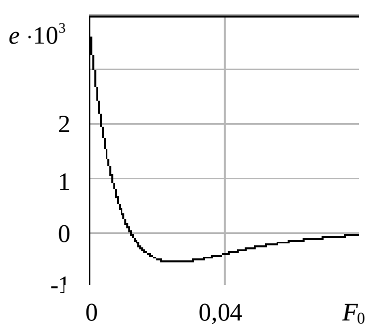
l	Число приближений		Точные значения [2]
	2	4	
l_1	0,86033361831	0,860333589028290	0,86033358901938148
l_2	3,464594611	3,42561892126255	3,425618459481728
l_3		6,44986878307776	6,4372981791719471
l_4		10,71473561814056	9,5293344053619636



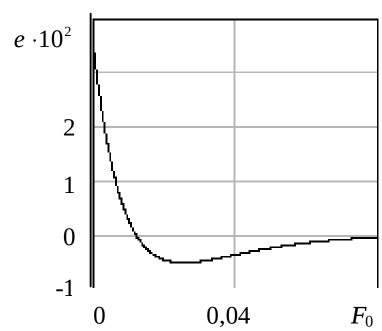
Р и с. 1. Графики распределения относительной избыточной температуры от времени ($Bi = 1$, $Fo = 0{,}1$, $x = 1$): — – расчет по формуле (21) (четвертое приближение); – – – точное решение [2]



Р и с. 2. Изменение невязки e уравнения (6) от координаты x при $n = 4$ (четыре приближения): $Fo = 0{,}01$, $Bi = 1$



Р и с. 3. Изменение невязки e уравнения (6) во времени для $n = 4$ в точке $x = 0$ при $Bi = 1$



Р и с. 4. Изменение невязки e уравнения (6) во времени для $n = 4$ в точке $x = 1$ при $Bi = 1$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Цой П.В.* Методы решения отдельных задач тепломассопереноса. М.: Энергия. 1971. 384 с.
2. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. *Кудинов В.А., Карташов Э.М. и др.* Тепломассоперенос и термоупругость в многослойных конструкциях. М.: Энергоатомиздат, 1997, 425 с.
4. *Кудинов В.А.* Аналитические методы решения краевых задач для многослойных конструкций (Обзор) Изв. АН. Энергетика. №5, 1999. С.86-107.
5. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа. 2001. 550 с.

Поступила 2.02.2004 г.