М. А. Дородный, Т. А. Суслина, Операторные оценки погрешности при усреднении гиперболических уравнений, *Функц. анализ и его прил.*, 2020, том 54, выпуск 1, 69–74

DOI: 10.4213/faa3738

УДК 517.956.3

Операторные оценки погрешности при усреднении гиперболических уравнений[1]

© 2020. М. А. Дородный, Т. А. Суслина

DOI: https://doi.org/10.4213/faa3738

Работа посвящена усреднению (гомогенизации) решений гиперболических уравнений с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами.

1. Класс операторов. Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$, Ω — элементарная ячейка решетки Γ. Для функций в $\mathbb{R}^d$ полагаем $f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор (ДО) второго порядка вида

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ есть Γ-периодическая эрмитова $(m\times m)$-матрица-функция, такая, что $g, g^{-1} \in L_\infty$ и $g(\mathbf{x}) > 0$. ДО первого порядка $b(\mathbf{D})$, $\mathbf{D} = -i\nabla$, имеет вид $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$. Здесь b_j — постоянные $(m\times n)$-матрицы, причем $m \geqslant n$. Предполагается, что символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^d b_j \xi_j$ имеет максимальный ранг: $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$ при $0 \ne \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Оператор (1) порождается замкнутой квадратичной формой $(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Примером оператора вида (1) является оператор акустики $A_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$; в этом случае $n=1$, $m=d$. Оператор теории упругости также допускает запись в виде (1); см. [1].

2. Операторные оценки погрешности. Задачи усреднения для оператора (1) изучались в цикле работ Бирмана и Суслиной [1]–[3] с помощью теоретико-операторного (спектрального) подхода. Было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится к резольвенте эффективного оператора A^0 по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, причем норма разности резольвент имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. Аналогичный результат был получен в [4], [5] для полугруппы $e^{-A_\varepsilon \tau}$, $\tau > 0$. Аппроксимации резольвенты и полугруппы оператора A_ε по «энергетической» норме (т. е. $(L_2 \to H^1)$-норме) были найдены в [3] и [6] соответственно; в этих аппроксимациях учитываются корректоры.

Оценки погрешности по операторной норме называют *операторными оценками погрешности* в теории усреднения. Другой подход к получению таких оценок был предложен Жиковым и Пастуховой в [7], [8]; см. также обзор [9].

К уравнениям типа Шрёдингера и гиперболического типа теоретико-операторный подход применялся в работе [10], где изучались экспонента $e^{-iA_\varepsilon\tau}$ и косинус $\cos(A_\varepsilon^{1/2}\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Выяснилось, что для этих операторов не удается получить приближения по операторной $(L_2 \to L_2)$-норме. Приходится менять

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01069).

тип нормы. Сформулируем результат работы [10] для операторного косинуса:

$$\| \cos(A_\varepsilon^{1/2}\tau) - \cos((A^0)^{1/2}\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{2}$$

Аналогичный результат для оператора $A_\varepsilon^{-1/2}\sin(A_\varepsilon^{1/2}\tau)$ вместе с аппроксимацией по «энергетической» норме получен Мешковой ([11], [12]):

$$\|A_\varepsilon^{-1/2}\sin(A_\varepsilon^{1/2}\tau) - (A^0)^{-1/2}\sin((A^0)^{1/2}\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{3}$$

$$\|A_\varepsilon^{-1/2}\sin(A_\varepsilon^{1/2}\tau) - (A^0)^{-1/2}\sin((A^0)^{1/2}\tau) - \varepsilon K(\varepsilon;\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{4}$$

Здесь $K(\varepsilon;\tau)$ — подходящий корректор; см. определение (7) ниже.

В [13], [14] показано, что в общем случае оценки (2), (3) точны в отношении типа операторной нормы, но при дополнительных предположениях их можно усилить: заменить H^2 на $H^{3/2}$ в оценке (2) и H^1 на $H^{1/2}$ в оценке (3). Аналогичные результаты для экспоненты $e^{-iA_\varepsilon\tau}$ получены в [15], [16].

В настоящей работе мы представляем новые результаты: выяснено, что оценки (2)–(4) точны как в отношении типа нормы, так и в отношении зависимости от параметра τ (при большом $|\tau|$). Показано, что при дополнительных предположениях результаты допускают усиление.

Похожие результаты для экспоненты $e^{-iA_\varepsilon\tau}$ получены в препринте [17].

3. Эффективные характеристики. Определим постоянную положительную $(m\times m)$-матрицу g^0, называемую *эффективной матрицей*.

Пусть $(n\times m)$-матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ является Γ-периодическим решением задачи $b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x})+\mathbf{1}_m)=0$, $\int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0$. Положим $\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x})+\mathbf{1}_m)$. Тогда $g^0=|\Omega|^{-1}\int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$. *Эффективный оператор* задается выражением $A^0=b(\mathbf{D})^*g^0b(\mathbf{D})$ на области определения $H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

В силу теории Флоке–Блоха оператор $A=b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})$ унитарно эквивалентен прямому интегралу $\int_{\widetilde{\Omega}}\oplus A(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}$ операторов $A(\mathbf{k})$, действующих в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Здесь $\widetilde{\Omega}$ — центральная зона Бриллюена двойственной решетки $\widetilde{\Gamma}$. Параметр $\mathbf{k}$ называют *квазиимпульсом*. Оператор $A(\mathbf{k})$ задается выражением $A(\mathbf{k})=b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ при периодических граничных условиях.

Спектр оператора $A(\mathbf{k})$ дискретен. Применим теорию возмущений. Очевидно, что $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A(0)=\{\mathbf{u}\in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n) : \mathbf{u}=\mathbf{c}\in\mathbb{C}^n\}$. Это означает, что число $\lambda=0$ является изолированным собственным значением кратности n «невозмущенного» оператора $A(0)$. Тогда при $|\mathbf{k}|\leqslant t_0$ у «возмущенного» оператора $A(\mathbf{k})$ на промежутке $[0,\delta]$ ровно n собственных значений (с учетом кратностей), а промежуток $(\delta,3\delta)$ свободен от спектра. (Числа δ и t_0 контролируются явно.) Положим $\mathbf{k}=t\boldsymbol{\theta}$, где $t:=|\mathbf{k}|$, $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. В силу аналитической теории возмущений (см. [18]) при $t\leqslant t_0$ существуют вещественно-аналитические (по t) ветви собственных значений $\lambda_l(t;\boldsymbol{\theta})$ и собственных элементов $\varphi_l(t;\boldsymbol{\theta})$ оператора $A(\mathbf{k}) =: A(t;\boldsymbol{\theta})$, $l=1,\dots,n$. При этом векторы $\varphi_l(t;\boldsymbol{\theta})$, $l=1,\dots,n$, образуют ортонормированный базис в собственном подпространстве оператора

$A(t;\boldsymbol{\theta})$, отвечающем промежутку $[0,\delta]$. При малом t справедливы сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l(t;\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \nu_l(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots, \tag{5}$$

$$\varphi_l(t;\boldsymbol{\theta}) = \omega_l(\boldsymbol{\theta}) + t\psi_l(\boldsymbol{\theta}) + \dots \tag{6}$$

при $l = 1,\dots,n$. Легко проверить, что $\gamma_l(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* > 0$. «Зародыши» $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,\dots,n$, образуют ортонормированный базис в подпространстве $\mathfrak{N}$. Матрицу $S(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})$ называют *спектральным ростком* операторного семейства $A(t;\boldsymbol{\theta})$ при $t = 0$. Как проверено в [1], числа $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$ являются собственными для ростка: $S(\boldsymbol{\theta})\omega_l(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,\dots,n$.

Нам понадобится оператор $N(\boldsymbol{\theta})\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$, заданный выражением $N(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})$, где $L(\boldsymbol{\theta}) := |\Omega|^{-1}\int_\Omega (\Lambda(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})\Lambda(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}$. Оператор $N(\boldsymbol{\theta})$ можно описать и в терминах коэффициентов степенных разложений (5) и (6): $N(\boldsymbol{\theta}) = N_0(\boldsymbol{\theta}) + N_*(\boldsymbol{\theta})$, где первый член справа диагонален в базисе $\omega_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,\omega_n(\boldsymbol{\theta})$ и имеет вид $N_0(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^n \mu_l(\boldsymbol{\theta})(\,\cdot\,,\omega_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)}\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, а второй член $N_*(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^n \gamma_l(\boldsymbol{\theta})((\,\cdot\,,P\psi_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)}\omega_l(\boldsymbol{\theta}) + (\,\cdot\,,\omega_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)}P\psi_l(\boldsymbol{\theta}))$ имеет нулевую диагональ в этом базисе. Здесь P — ортопроектор на $\mathfrak{N}$.

4. Основные результаты. Положим

$$K(\varepsilon;\tau) := \Lambda^\varepsilon \Pi_\varepsilon b(\mathbf{D})(A^0)^{-1/2}\sin((A^0)^{1/2}\tau), \tag{7}$$

где $(\Pi_\varepsilon f)(\mathbf{x}) = \int_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i\langle \mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}$, а $\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})$ — фурье-образ функции f.

Оценки (2)–(4) допускают усиление при одном из следующих двух условий.

Условие 1. *Пусть* $N(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при любом* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Условие 2. *Пусть* $N_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при любом* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, *т.е.* $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$ *при* $l = 1,\dots,n$. *Кроме того, предположим, что число p различных собственных значений спектрального ростка* $S(\boldsymbol{\theta})$ *не зависит от* $\boldsymbol{\theta}$.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* 1 *либо условие* 2. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\|\cos(A_\varepsilon^{1/2}\tau) - \cos((A^0)^{1/2}\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{8}$$

$$\|A_\varepsilon^{-1/2}\sin(A_\varepsilon^{1/2}\tau) - (A^0)^{-1/2}\sin((A^0)^{1/2}\tau)\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\|A_\varepsilon^{-1/2}\sin(A_\varepsilon^{1/2}\tau) - (A^0)^{-1/2}\sin((A^0)^{1/2}\tau) - \varepsilon K(\varepsilon;\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}&\\ \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.&\end{aligned} \tag{10}$$

Некоторые достаточные условия, гарантирующие выполнение условия 1 или условия 2, можно найти в [2, §4].

Следствие 4. *Пусть* $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, *где* $g(\mathbf{x})$ *— симметричная матрица с вещественными элементами. Тогда выполнено условие* 1 *и в силу теоремы* 3 *справедливы оценки* (8)–(10).

Следствие 5. *Предположим, что матрицы* $g(\mathbf{x})$ *и* $b(\boldsymbol{\theta})$ *имеют вещественные элементы. Предположим, что спектр ростка* $S(\boldsymbol{\theta})$ *простой при всех*

$\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. *Тогда выполнено условие* 2 *и в силу теоремы* 3 *справедливы оценки* (8)–(10).

Далее мы подтверждаем точность результатов (2)–(4) в общей ситуации — как в отношении типа нормы, так и в отношении зависимости оценок от τ.

Теорема 6. *Пусть* $N_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *при некотором* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ (*т.е.* $\mu_l(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *при некоторых* l *и* $\boldsymbol{\theta}_0$).

1°. *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $s < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(\tau) > 0$, *чтобы при малом* ε *выполнялось неравенство*

$$\|\cos(A_\varepsilon^{1/2}\tau) - \cos((A^0)^{1/2}\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon. \tag{11}$$

2°. *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $r < 1$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(\tau) > 0$, *чтобы при малом* ε *выполнялось неравенство*

$$\|A_\varepsilon^{-1/2}\sin(A_\varepsilon^{1/2}\tau) - (A^0)^{-1/2}\sin((A^0)^{1/2}\tau)\|_{H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon. \tag{12}$$

3°. *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $s < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(\tau) > 0$, *чтобы при малом* ε *выполнялось неравенство*

$$\|A_\varepsilon^{-1/2}\sin(A_\varepsilon^{1/2}\tau) - (A^0)^{-1/2}\sin((A^0)^{1/2}\tau) - \varepsilon K(\varepsilon;\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon. \tag{13}$$

4°. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $C(\tau)$, *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ *и при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и малом* ε *выполняется неравенство* (11).

5°. *Пусть* $r \geqslant 1$. *Не существует положительной функции* $C(\tau)$, *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ *и при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и малом* ε *выполняется неравенство* (12).

6°. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $C(\tau)$, *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ *и при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и малом* ε *выполняется неравенство* (13).

Построены примеры операторов, удовлетворяющих условию теоремы 6; см. [2, п. 10.4], [16, пример 8.7], [14, п. 14.3].

Наконец, мы показываем, что результаты теоремы 3 тоже неулучшаемы.

Теорема 7. *Пусть* $N_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ (*т.е.* $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$ *при* $l = 1, \dots, n$). *Пусть* $\nu_j(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *при некоторых* j *и* $\boldsymbol{\theta}_0$.

1°. *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $s < 3/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(\tau) > 0$, *чтобы при малом* ε *выполнялось неравенство* (11).

2°. *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $r < 1/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(\tau) > 0$, *чтобы при малом* ε *выполнялось неравенство* (12).

3°. *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $s < 3/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(\tau) > 0$, *чтобы при малом* ε *выполнялось неравенство* (13).

4°. *Пусть* $s \geqslant 3/2$. *Не существует положительной функции* $C(\tau)$, *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и малом* ε *выполняется неравенство* (11).

5°. *Пусть* $r \geqslant 1/2$. *Не существует положительной функции* $C(\tau)$, *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и малом* ε *выполняется неравенство* (12).

6°. *Пусть* $s \geqslant 3/2$. *Не существует положительной функции* $C(\tau)$, *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и малом* ε *выполняется неравенство* (13).

Замечание 8. Согласно [17, лемма 5.8], в одномерном случае для оператора $A_\varepsilon = -\frac{d}{dx} g^\varepsilon(x) \frac{d}{dx}$ разложение вида (5) для $\lambda_1(k)$ имеет вид $\lambda_1(k) = \gamma k^2 + \nu k^4 + \dots$, причем $\nu \neq 0$, если периодическая функция $g(x)$ непостоянна. Поэтому авторы полагают, что и в многомерном случае, как правило, $\nu_j(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$.

5. Приложения. Результаты можно применить к вопросу о поведении решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\tau \in \mathbb{R}$, задачи Коши для гиперболического уравнения

$$\partial_\tau^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = -A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \tag{14}$$

где $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Решение представимо в виде

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,\tau) = \cos(A_\varepsilon^{1/2}\tau)\boldsymbol{\phi} + A_\varepsilon^{-1/2}\sin(A_\varepsilon^{1/2}\tau)\boldsymbol{\psi}. \tag{15}$$

Усредненная задача имеет вид

$$\partial_\tau^2 \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) = -A^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \partial_\tau \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}). \tag{16}$$

Имеем

$$\mathbf{u}_0(\,\cdot\,,\tau) = \cos((A^0)^{1/2}\tau)\boldsymbol{\phi} + (A^0)^{-1/2}\sin((A^0)^{1/2}\tau)\boldsymbol{\psi}. \tag{17}$$

Из представлений (15) и (17), применяя оценки (2)–(4) и теорему 3, получаем следующий результат.

Теорема 9. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{u}_0$ — *решения задач* (14) *и* (16) *соответственно. Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{u}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon \Pi_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0$.

1°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\boldsymbol{\psi} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, *то справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,\tau) - \mathbf{u}_0(\,\cdot\,,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}).$$

Если $\boldsymbol{\phi} = 0$ *и* $\boldsymbol{\psi} \in H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, *то*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,\tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\,\cdot\,,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}.$$

2°. *Пусть выполнено условие* 1 *либо условие* 2. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in H^{3/2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\boldsymbol{\psi} \in H^{1/2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, *то справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,\tau) - \mathbf{u}_0(\,\cdot\,,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)} + \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)}).$$

Если $\boldsymbol{\phi} = 0$ *и* $\boldsymbol{\psi} \in H^{3/2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, *то*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\,\cdot\,,\tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\,\cdot\,,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)}.$$

Замечание 10. 1. Применяя интерполяционные соображения, можно получать оценки для $\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2}$ при $\boldsymbol{\phi} \in H^s$ и $\boldsymbol{\psi} \in H^r$, где $0 \leqslant s \leqslant 2$ и $0 \leqslant r \leqslant 1$

в условиях п. 1° и $0 \leqslant s \leqslant 3/2$ и $0 \leqslant r \leqslant 1/2$ в условиях п. 2°. Возможно получение интерполяционных оценок и для $\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1}$, если $\boldsymbol{\phi} = 0$.

2. Можно устанавливать квалифицированные оценки погрешности при больших значениях времени: рассматривать $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, где $0 < \alpha < 1$ в условиях п. 1° и $0 < \alpha < 2$ в условиях п. 2°.

Задача акустики имеет вид (14) при $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, где матрица-функция $g(\mathbf{x})$ симметричная с вещественными элементами. Применима теорема 9(2°). Другое приложение — задача теории упругости, для которой в общем случае нет усиления результатов (даже в модели изотропной упругости) и можно применять лишь теорему 9(1°).

Литература

[1] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, Алгебра и анализ, **15**:5 (2003), 1–108. **[2]** М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, Алгебра и анализ, **17**:6 (2005), 1–104. **[3]** М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, Алгебра и анализ, **18**:6 (2006), 1–130. **[4]** Т. А. Суслина, Функц. анализ и его прил., **38**:4 (2004), 86–90. **[5]** T. A. Suslina, in: *Nonlinear Equations and Spectral Theory*, American Mathematical Society Translations, Ser. 2, vol. 220, 2007, 201–233. **[6]** T. A. Suslina, Math. Model. Nat. Phenom., **5**:4 (2010), 390–447. **[7]** V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, Russ. J. Math. Phys., **12**:4 (2005), 515–524. **[8]** V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, Russ. J. Math. Phys., **13**:2 (2006), 224–237. **[9]** В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, УМН, **71**:3 (2016), 27–122. **[10]** М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, Алгебра и анализ, **20**:6 (2008), 30–107. **[11]** Ю. М. Мешкова, Матем. заметки, **105**:6 (2019), 937–942. **[12]** Yu. M. Meshkova, arXiv: 1705.02531. **[13]** М. А. Дородный, Т. А. Суслина, Функц. анализ и его прил., **50**:4 (2016), 91–96. **[14]** M. A. Dorodnyi, T. A. Suslina, J. Differential Equations, **264**:12 (2018), 7463–7522. **[15]** Т. А. Суслина, Функц. анализ и его прил., **50**:3 (2016), 90–96. **[16]** T. A. Suslina, J. Math. Anal. Appl., **446**:2 (2017), 1466–1523. **[17]** M. A. Dorodnyi, arXiv: 1905.04583. **[18]** Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

М. А. Дородный
Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mdorodni@yandex.ru

Т. А. Суслина
Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: t.suslina@spbu.ru

Поступила в редакцию
20 октября 2019 г.
После доработки
29 октября 2019 г.
Принята к публикации
31 октября 2019 г.