



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Д. Филонов, Оператор Максвелла в цилиндре с коэффициентами, не зависящими от поперечных переменных, *Алгебра и анализ*, 2020, том 32, выпуск 1, 187–207

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.84

17 марта 2025 г., 21:03:45



ОПЕРАТОР МАКСВЕЛЛА В ЦИЛИНДРЕ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, НЕ ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ПОПЕРЕЧНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

© Н. Д. ФИЛОНОВ

Мы рассматриваем оператор Максвелла в трехмерном цилиндре, сечение которого — односвязная ограниченная область с липшицевой границей. Предполагаем, что коэффициенты — скалярные функции, зависящие только от продольной переменной. Мы показываем, что квадрат такого оператора унитарно эквивалентен ортогональной сумме четырех скалярных эллиптических операторов второго порядка. В случае, когда коэффициенты периодичны вдоль оси цилиндра, спектр оператора Максвелла абсолютно непрерывен.

Введение

Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная ограниченная область с липшицевой границей, $\Pi = U \times \mathbb{R}$ — трехмерный цилиндр. Мы исследуем самосопряженный оператор Максвелла \mathcal{M} в цилиндре Π с условиями идеальной проводимости на границе. Это матричный дифференциальный оператор первого порядка с коэффициентами $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$, описывающими диэлектрическую и магнитную проницаемости среды, заполняющей цилиндр. Точное определение будет дано ниже, см. определение 1.2. В общем случае естественно предполагать, что коэффициенты ε и μ — (3×3) -матрично-значные функции, ограниченные и положительно определенные,

$$0 < \varepsilon_0 \mathbb{1} \leq \varepsilon(x) \leq \varepsilon_1 \mathbb{1}, \quad 0 < \mu_0 \mathbb{1} \leq \mu(x) \leq \mu_1 \mathbb{1}. \quad (0.1)$$

В §2 мы покажем, что в спектре такого оператора есть лакуна с центром в нуле, см. ниже лемму 2.3. В остальном тексте мы будем предполагать, что ε и μ — скалярные функции (в цилиндре изотропная среда), и что они *не зависят от поперечных переменных* x_1 и x_2 ,

$$\varepsilon(x) = \varepsilon(x_3), \quad \mu(x) = \mu(x_3). \quad (0.2)$$

Ключевые слова: оператор Максвелла, односвязный цилиндр, абсолютная непрерывность спектра.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского Научного Фонда №17-11-01069.

В этих предположениях мы докажем, что квадрат оператора Максвелла \mathcal{M}^2 унитарно эквивалентен ортогональной сумме четырех скалярных эллиптических операторов второго порядка, см. ниже теорему 1.3. Скалярные эллиптические операторы проще для исследования. В частности, мы рассмотрим случай, когда коэффициенты ε и μ еще и периодичны вдоль оси цилиндра,

$$\varepsilon(x_3 + a) = \varepsilon(x_3), \quad \mu(x_3 + a) = \mu(x_3), \quad (0.3)$$

и достаточно гладкие. Мы покажем на основе теоремы 1.3, что в этой ситуации спектр оператора Максвелла абсолютно непрерывен, см. теорему 1.5. Ранее абсолютная непрерывность оператора Максвелла в цилиндре была установлена в следующих ситуациях:

- ε и μ — скалярные достаточно гладкие функции, периодичные вдоль оси цилиндра; сечение U — прямоугольник или круг, см. [7];
- ε и μ — матрично-значные ограниченные функции, не зависящие от продольной переменной, $\varepsilon(x) = \varepsilon(x_1, x_2)$, $\mu(x) = \mu(x_1, x_2)$; U — ограниченная область с липшицевой границей, см. [4].

§1. Формулировка результатов

Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная ограниченная область, $\partial U \in \text{Lip}$, $\Pi = U \times \mathbb{R}$. Граничные условия, входящие в определение оператора Максвелла, мы будем понимать в смысле интегральных тождеств.

Определение 1.1. Пусть $u \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3)$.

ν) Если $\text{div } u \in L_2(\Pi)$, то

$$u_\nu|_{\partial\Pi} = 0 \iff \int_{\Pi} \langle u, \nabla \omega \rangle dx = - \int_{\Pi} \text{div } u \bar{\omega} dx \quad \forall \omega \in W_2^1(\Pi).$$

τ) Если $\text{rot } u \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3)$, то

$$u_\tau|_{\partial\Pi} = 0 \iff \int_{\Pi} \langle u, \text{rot } z \rangle dx = \int_{\Pi} \langle \text{rot } u, z \rangle dx \\ \forall z \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3) : \text{rot } z \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3).$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение в \mathbb{C}^3 . Нам понадобится также несколько функциональных пространств. Пусть ε, μ удовлетворяют (0.1). Подпространства соленоидальных функций:

$$J(\tau, \varepsilon) = \{u \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3, \varepsilon) : \text{div}(\varepsilon u) = 0\},$$

$$J(\nu, \mu) = \{v \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3, \mu) : \text{div}(\mu v) = 0, (\mu v)_\nu|_{\partial\Pi} = 0\}.$$

Кроме того, введем пространство

$$F(\Pi, s) = \{u \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3) : \operatorname{rot} u \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3), \operatorname{div}(su) \in L_2(\Pi)\},$$

с нормой

$$\|u\|_{F(\Pi, s)}^2 = \|\operatorname{rot} u\|_{L_2(\Pi)}^2 + \|\operatorname{div}(su)\|_{L_2(\Pi)}^2 + (su, u)_{L_2(\Pi)}, \quad s = \varepsilon \text{ или } \mu,$$

и его подпространства

$$F(\tau, \varepsilon) = \{u \in F(\Pi, \varepsilon) : u_\tau|_{\partial\Pi} = 0\},$$

$$F(\nu, \mu) = \{v \in F(\Pi, \mu) : (\mu v)_\nu|_{\partial\Pi} = 0\}.$$

Наконец, введем обозначения

$$\Phi(\tau, \varepsilon) = F(\tau, \varepsilon) \cap J(\tau, \varepsilon), \quad \Phi(\nu, \mu) = F(\nu, \mu) \cap J(\nu, \mu).$$

Определение 1.2. Оператор Максвелла действует в гильбертовом пространстве $J(\tau, \varepsilon) \oplus J(\nu, \mu)$ по формуле

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} H \\ -i\mu^{-1} \operatorname{rot} E \end{pmatrix}$$

на области определения

$$\operatorname{Dom} \mathcal{M} = \Phi(\tau, \varepsilon) \oplus \Phi(\nu, \mu).$$

Легко показать, что оператор Максвелла самосопряжен, $\mathcal{M} = \mathcal{M}^*$, см., например, [1]. Он имеет блочную структуру

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & R^* \\ R & 0 \end{pmatrix},$$

где взаимно сопряженные операторы

$$R = -i\mu^{-1} \operatorname{rot}, \quad R^* = i\varepsilon^{-1} \operatorname{rot}$$

заданы на

$$\operatorname{Dom} R = \Phi(\tau, \varepsilon), \quad \operatorname{Dom} R^* = \Phi(\nu, \mu).$$

Из такой структуры вытекает, что операторы \mathcal{M} и $-\mathcal{M}$ унитарно эквивалентны, и спектр оператора \mathcal{M} симметричен относительно нуля.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1.3. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная ограниченная область, $\partial U \in \operatorname{Lip}$, $\Pi = U \times \mathbb{R}$. Пусть коэффициенты ε и μ — скалярные функции, удовлетворяющие условиям (0.1) и (0.2). Тогда квадрат оператора Максвелла \mathcal{M}^2 унитарно эквивалентен ортогональной сумме

$$\mathcal{A}_D \oplus \mathcal{A}_D \oplus \mathcal{A}_N \oplus \mathcal{A}_N.$$

Здесь \mathcal{A}_D и \mathcal{A}_N — самосопряженные эллиптические операторы, $\mathcal{A}_D = -\mu^{-1}(\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla \cdot))$ с краевым условием Дирихле в $L_2(\Pi, \mu)$;

$\mathcal{A}_N = -\varepsilon^{-1}(\operatorname{div}(\mu^{-1}\nabla\cdot))$ с краевым условием Неймана в гильбертовом пространстве

$$\left\{ \varphi \in L_2(\Pi, \varepsilon) : \int_U \varphi(x) dx_1 dx_2 = 0 \text{ при п.в. } x_3 \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1.1)$$

Замечание 1.4. Оператор \mathcal{A}_D отвечает положительной квадратичной форме

$$\int_{\Pi} \varepsilon^{-1} |\nabla \varphi|^2 dx, \quad \varphi \in \mathring{W}_2^1(\Pi),$$

в пространстве $L_2(\Pi, \mu)$; оператор \mathcal{A}_N — положительной квадратичной форме

$$\int_{\Pi} \mu^{-1} |\nabla \varphi|^2 dx, \quad \varphi \in W_2^1(\Pi), \quad \int_U \varphi(x) dx_1 dx_2 = 0 \text{ при п.в. } x_3 \in \mathbb{R},$$

в гильбертовом пространстве (1.1).

Теорема 1.5. Пусть в условиях теоремы 1.3 функции ε и μ удовлетворяют условию (0.3) при некотором $a > 0$, и

$$\varepsilon, \mu \in W_{r, \text{loc}}^2(\mathbb{R}), \quad r > 1. \quad (1.2)$$

Тогда спектр оператора \mathcal{M} абсолютно непрерывен.

§2. Обратимость оператора Максвелла

Тот факт, что оператор Максвелла в цилиндре с односвязным сечением имеет ограниченный обратный, известен (см. ниже замечание 2.6). Мы приводим необходимые факты для удобства читателя.

Введем ортогональные проекторы $P(\tau, \varepsilon)$ (соответственно $P(\nu, \mu)$) в пространстве $L_2(\Pi, \varepsilon)$ (соответственно $L_2(\Pi, \mu)$) на подпространство $J(\tau, \varepsilon)$ (соответственно $J(\nu, \mu)$). Следующая лемма доказана в [1, лемма 1.1a) и лемма 1.8a)].

Лемма 2.1. Пусть матрицы-функции $\varepsilon, \tilde{\varepsilon}, \mu$ и $\tilde{\mu}$ удовлетворяют (0.1). Оператор $P(\tau, \varepsilon)$ (соответственно $P(\nu, \mu)$) непрерывно и взаимнооднозначно переводит пространство $J(\tau, \tilde{\varepsilon})$ в $J(\tau, \varepsilon)$ (соответственно $J(\nu, \tilde{\mu})$ в $J(\nu, \mu)$) и пространство $\Phi(\tau, \tilde{\varepsilon})$ в $\Phi(\tau, \varepsilon)$ (соответственно $\Phi(\nu, \tilde{\mu})$ в $\Phi(\nu, \mu)$). Обратное отображение дается оператором $P(\tau, \tilde{\varepsilon})$ (соответственно $P(\nu, \tilde{\mu})$).

Лемма 2.2 (см. [4, теорема 10.3]). Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная ограниченная область с липшицевой границей, $\varepsilon(x) \equiv \mu(x) \equiv \mathbb{1}$. Тогда

$$\sigma(\mathcal{M}) = \left(-\infty, -\sqrt{\lambda_2^N} \right] \cup \left[\sqrt{\lambda_2^N}, \infty \right),$$

где λ_2^N — второе собственное значение (первое ненулевое) оператора Лапласа задачи Неймана в области U .

Лемма 2.3. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная ограниченная область, $\partial U \in \text{Lip}$. Пусть матрицы-функции ε, μ удовлетворяют (0.1). Тогда в спектре оператора \mathcal{M} есть лагуна с центром в нуле $(-\delta(\varepsilon, \mu), \delta(\varepsilon, \mu))$, где

$$\delta(\varepsilon, \mu) \geq \sqrt{\frac{\lambda_2^N}{\|\varepsilon\|_{L_\infty} \|\mu\|_{L_\infty}}}.$$

В частности, оператор Максвелла имеет ограниченный обратный оператор в $J(\tau, \varepsilon) \oplus J(\nu, \mu)$.

Доказательство. Из определения оператора Максвелла вытекает, что

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{M} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|^2 &= \|Ru\|_{L_2(\Pi, \mu)}^2 + \|R^*v\|_{L_2(\Pi, \varepsilon)}^2 \\ &= (\mu^{-1} \text{rot } u, \text{rot } u)_{L_2(\Pi)} + (\varepsilon^{-1} \text{rot } v, \text{rot } v)_{L_2(\Pi)} \\ &= (\mu^{-1} \text{rot}(P(\tau, \mathbb{1})u), \text{rot}(P(\tau, \mathbb{1})u))_{L_2(\Pi)} \\ &\quad + (\varepsilon^{-1} \text{rot}(P(\nu, \mathbb{1})v), \text{rot}(P(\nu, \mathbb{1})v))_{L_2(\Pi)} \\ &\geq \|\mu\|_{L_\infty}^{-1} \|\text{rot}(P(\tau, \mathbb{1})u)\|_{L_2(\Pi)}^2 + \|\varepsilon\|_{L_\infty}^{-1} \|\text{rot}(P(\nu, \mathbb{1})v)\|_{L_2(\Pi)}^2. \end{aligned}$$

Теперь из леммы 2.2 вытекает, что

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{M} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|^2 &\geq \lambda_2^N \left(\|\mu\|_{L_\infty}^{-1} \|P(\tau, \mathbb{1})u\|_{L_2(\Pi)}^2 + \|\varepsilon\|_{L_\infty}^{-1} \|P(\nu, \mathbb{1})v\|_{L_2(\Pi)}^2 \right) \\ &\geq \lambda_2^N \|\varepsilon\|_{L_\infty}^{-1} \|\mu\|_{L_\infty}^{-1} \left(\|P(\tau, \mathbb{1})u\|_{L_2(\Pi, \varepsilon)}^2 + \|P(\nu, \mathbb{1})v\|_{L_2(\Pi, \mu)}^2 \right) \\ &\geq \lambda_2^N \|\varepsilon\|_{L_\infty}^{-1} \|\mu\|_{L_\infty}^{-1} \left(\|u\|_{L_2(\Pi, \varepsilon)}^2 + \|v\|_{L_2(\Pi, \mu)}^2 \right), \end{aligned}$$

так как

$$u = P(\tau, \varepsilon)P(\tau, \mathbb{1})u, \quad v = P(\nu, \mu)P(\nu, \mathbb{1})v$$

в силу леммы 2.1. □

Следствие 2.4. В условиях леммы 2.3 ядра операторов R и R^* тривиальны, $\ker R = \{0\}$, $\ker R^* = \{0\}$.

Замечание 2.5. Леммы 2.2 и 2.3 имеются уже в [2]. Однако эта работа практически недоступна, поэтому мы привели доказательство леммы 2.3 и дали другую ссылку для леммы 2.2. Кроме того, у Дунаева в [2] вместо λ_2^N фигурирует число $\delta := \min(\lambda_1^D, \lambda_2^N)$, где λ_1^D — первое собственное значение оператора Лапласа задачи Дирихле в области U . Теперь известно, что $\lambda_2^N < \lambda_1^D$ для любой области U (см. [9] или [3]).

Замечание 2.6. Тот факт, что в спектре оператора Максвелла есть лакуна в случае, когда коэффициенты тривиальны, $\varepsilon(x) \equiv \mu(x) \equiv \mathbb{1}$ (в цилиндре вакуум), сечение односвязно (если сечение многосвязно, то лакуны нет), и граница гладкая, хорошо известен, см. [12, §91]. В работе [4] это утверждение обобщено на случай липшицевых границ.

§3. Функциональные пространства

Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная ограниченная область с липшицевой границей, $\partial U \in \text{Lip}$, $\Pi = U \times \mathbb{R}$.

Лемма 3.1. *Имеют место ортогональные разложения*

$$L_2(U, \mathbb{C}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi \\ \partial_2 \varphi \end{pmatrix} : \varphi \in \mathring{W}_2^1(U) \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} \partial_2 \psi \\ -\partial_1 \psi \end{pmatrix} : \psi \in W_2^1(U) \right\},$$

$$L_2(U, \mathbb{C}^2) = \left\{ \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi \\ \partial_2 \varphi \end{pmatrix} : \varphi \in W_2^1(U) \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} \partial_2 \psi \\ -\partial_1 \psi \end{pmatrix} : \psi \in \mathring{W}_2^1(U) \right\}.$$

Доказательство. Первое равенство доказано в [4, лемма 10.1]. Второе получается из первого поворотом на 90 градусов. \square

Пусть ε и μ — скалярные функции в цилиндре Π , удовлетворяющие условиям (0.1) и (0.2). Введем обозначения

$$\mathcal{H}(\tau, \varepsilon) := L_2(\mathbb{R}, \mathring{W}_2^1(U)), \quad \|\varphi\|_{\mathcal{H}(\tau, \varepsilon)}^2 = \int_{\Pi} (|\partial_1 \varphi|^2 + |\partial_2 \varphi|^2) \varepsilon(x_3) dx,$$

$$\mathcal{H}(\nu, \mu) := L_2(\mathbb{R}, W_2^1(U) \ominus \{\text{const}\}), \quad \|\varphi\|_{\mathcal{H}(\nu, \mu)}^2 = \int_{\Pi} (|\partial_1 \varphi|^2 + |\partial_2 \varphi|^2) \mu(x_3) dx.$$

Мы будем писать просто $\mathcal{H}(\tau)$, $\mathcal{H}(\nu)$, когда нам будет неважно, какая норма введена в этих пространствах.

Лемма 3.2. *Пространство $C_0^\infty(\Pi)$ плотно в $\mathcal{H}(\tau, \varepsilon)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{H}(\tau, \varepsilon)$. Положим

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \varphi(x), & |x_3| < N, \\ 0, & |x_3| > N. \end{cases}$$

Ясно, что $\varphi_N \in \mathcal{H}(\tau, \varepsilon)$ и что $\varphi_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \varphi$ в $\mathcal{H}(\tau, \varepsilon)$. Далее, пусть $\varphi_{N,\rho}$ — усреднение функции φ_N по переменной x_3 с параметром ρ . Ясно, что

$$\varphi_{N,\rho} \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \dot{W}_2^1(U)) \subset \dot{W}_2^1(\Pi) \quad \text{и} \quad \varphi_{N,\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \varphi_N \quad \text{в} \quad \mathcal{H}(\tau, \varepsilon).$$

Следовательно, $\dot{W}_2^1(\Pi)$, а значит и $C_0^\infty(\Pi)$, плотно в $\mathcal{H}(\tau, \varepsilon)$. □

Введем теперь пространства

$$K(\tau) = \left\{ \begin{pmatrix} \partial_2 \psi \\ -\partial_1 \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi \in \mathcal{H}(\nu) \right\} \equiv \left\{ \text{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \psi \in \mathcal{H}(\nu) \right\},$$

$$K(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \partial_2 \psi \\ -\partial_1 \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi \in \mathcal{H}(\tau) \right\} \equiv \left\{ \text{rot} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \psi \in \mathcal{H}(\tau) \right\},$$

$$L(\sigma) = \left\{ \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi \\ \partial_2 \varphi \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathcal{H}(\sigma), \quad \omega \in L_2(\Pi) \right\}, \quad \sigma = \tau \quad \text{или} \quad \nu.$$

Ясно, что $K(\nu) \subset K(\tau)$ и $L(\tau) \subset L(\nu)$. В силу леммы 3.1 имеем

$$K(\tau) \oplus_\varepsilon L(\tau) = L_2(\Pi, \mathbb{C}^3, \varepsilon), \quad K(\nu) \oplus_\mu L(\nu) = L_2(\Pi, \mathbb{C}^3, \mu). \quad (3.1)$$

Отметим, что эти равенства выполняются для всех скалярных функций ε, μ , удовлетворяющих (0.1), (0.2), в частности, для $\varepsilon \equiv \mathbb{1}$ и для $\mu \equiv \mathbb{1}$. Когда мы будем рассматривать пространства K и L как подпространства гильбертовых пространств $L_2(\Pi, \mathbb{C}^3, \varepsilon)$, то будем писать $K(\tau, \varepsilon)$ и т. п.

Лемма 3.3. *Имеют место равенства:*

$$K(\tau) = \{f \in J(\tau, \varepsilon) : f_3 = 0\}, \quad K(\nu) = \{f \in J(\nu, \mu) : f_3 = 0\}.$$

Доказательство. По определению условие $f \in J(\tau, \varepsilon)$ при $f_3 = 0$ эквивалентно тому, что

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^2), \quad \int_{\Pi} \varepsilon(x_3)(f_1 \partial_1 \varphi + f_2 \partial_2 \varphi) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \dot{W}_2^1(\Pi).$$

Выберем в $\dot{W}_2^1(U)$ какой-нибудь ортонормированный базис $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$. Если $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, то $\varphi(x) := \varphi_m(x_1, x_2)\psi(x_3) \in \dot{W}_2^1(\Pi)$. Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_U (f_1 \partial_1 \varphi_m + f_2 \partial_2 \varphi_m) dx_1 dx_2 \right) \varepsilon(x_3) \psi(x_3) dx_3 = 0 \quad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

откуда

$$\int_U (f_1 \partial_1 \varphi_m + f_2 \partial_2 \varphi_m) dx_1 dx_2 = 0 \quad \text{при п.в. } x_3 \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, для функций $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^2)$ следующие условия эквивалентны:

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} \varepsilon(x_3) (f_1 \partial_1 \varphi + f_2 \partial_2 \varphi) dx &= 0 \quad \forall \varphi \in \mathring{W}_2^1(\Pi) \\ \iff \text{при п.в. } x_3 \in \mathbb{R} \int_U (f_1 \partial_1 \varphi + f_2 \partial_2 \varphi) dx_1 dx_2 &= 0 \quad \forall \varphi \in \mathring{W}_2^1(U) \end{aligned}$$

(мы доказали “ \Rightarrow ”; обратная импликация очевидна). Последнее соотношение в силу леммы 3.1 эквивалентно тому, что $f \in K(\tau)$.

Равенство $K(\nu) = \{f \in J(\nu, \mu) : f_3 = 0\}$ доказывается совершенно аналогично. \square

Следствие 3.4. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} K(\tau) \cap \Phi(\tau, \varepsilon) &= \{f \in \Phi(\tau, \varepsilon) : f_3 = 0\}, \\ K(\nu) \cap \Phi(\nu, \mu) &= \{f \in \Phi(\nu, \mu) : f_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Лемма 3.5. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} L(\tau) \cap \Phi(\tau, \varepsilon) &= \{f \in \Phi(\tau, \varepsilon) : (\text{rot } f)_3 = 0\}, \\ L(\nu) \cap \Phi(\nu, \mu) &= \{f \in \Phi(\nu, \mu) : (\text{rot } f)_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Оба включения \subset очевидны.

Пусть поле $f \in \Phi(\tau, \varepsilon)$ таково, что $(\text{rot } f)_3 = 0$. Пусть $\psi \in \mathcal{H}(\nu)$. Тогда

$$(f, \text{rot } z)_{L_2(\Pi)} = (\text{rot } f, z)_{L_2(\Pi)} = 0 \quad \text{при } z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

откуда $f \perp K(\tau)$. Следовательно, $f \in L(\tau)$ в силу (3.1) при $\varepsilon = \mathbb{I}$. Тем самым

$$\{f \in \Phi(\tau, \varepsilon) : (\text{rot } f)_3 = 0\} \subset L(\tau) \cap \Phi(\tau, \varepsilon).$$

Пусть теперь $f \in \Phi(\nu, \mu)$, $(\text{rot } f)_3 = 0$. Тогда (3.2) имеет место для всех $\psi \in C_0^\infty(\Pi)$. В силу леммы 3.2 соотношение (3.2) выполняется и для всех $\psi \in \mathcal{H}(\tau)$, откуда $f \perp K(\nu)$, и следовательно, $f \in L(\nu)$ в силу (3.1) при $\mu = \mathbb{I}$. Тем самым

$$\{f \in \Phi(\nu, \mu) : (\text{rot } f)_3 = 0\} \subset L(\nu) \cap \Phi(\nu, \mu). \quad \square$$

§4. Преобразование Фурье вдоль оси

Введем преобразование Фурье по переменной x_3 :

$$\widehat{u}(x_1, x_2, k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx_3} u(x) dx_3.$$

Лемма 4.1. Пусть

$$u \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3), \quad \text{rot } u \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3), \quad u_\tau|_{\partial\Pi} = 0.$$

Тогда

$$\widehat{u}_3(\cdot, \cdot, k) \in \dot{W}_2^1(U) \quad \text{при п.в. } k \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Доказательство. Имеем

$$(\text{rot } u)^\wedge(x_1, x_2, k) = \begin{pmatrix} \partial_2 \widehat{u}_3 - ik \widehat{u}_2 \\ ik \widehat{u}_1 - \partial_1 \widehat{u}_3 \\ \partial_1 \widehat{u}_2 - \partial_2 \widehat{u}_1 \end{pmatrix}.$$

По условию $u, \text{rot } u \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3)$, следовательно, $\widehat{u}, (\text{rot } u)^\wedge \in L_2(\Pi, \mathbb{C}^3)$ и

$$\widehat{u}_3(\cdot, \cdot, k) \in W_2^1(U) \quad \text{при п.в. } k \in \mathbb{R}.$$

Далее, пусть $z = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega \in W_2^1(\Pi)$. Тогда $(u, \text{rot } z)_{L_2(\Pi)} = (\text{rot } u, z)_{L_2(\Pi)}$

в силу определения 1.1 τ). Следовательно,

$$\int_{\Pi} \langle \widehat{u}, (\text{rot } z)^\wedge \rangle dx_1 dx_2 dk = \int_{\Pi} \langle (\text{rot } u)^\wedge, \widehat{z} \rangle dx_1 dx_2 dk. \quad (4.2)$$

Поскольку

$$(\text{rot } z)^\wedge = \begin{pmatrix} 0 \\ ik \widehat{\omega} \\ -\partial_2 \widehat{\omega} \end{pmatrix},$$

то

$$\int_{\Pi} \left(-ik \widehat{u}_2 \overline{\widehat{\omega}} - \widehat{u}_3 \partial_2 \overline{\widehat{\omega}} \right) dx_1 dx_2 dk = \int_{\Pi} (\partial_2 \widehat{u}_3 - ik \widehat{u}_2) \overline{\widehat{\omega}} dx_1 dx_2 dk$$

и

$$\int_{\Pi} \left(\partial_2 \widehat{u}_3 \overline{\widehat{\omega}} + \widehat{u}_3 \partial_2 \overline{\widehat{\omega}} \right) dx_1 dx_2 dk = 0.$$

Дальше действуем аналогично доказательству леммы 3.3. Выберем в $W_2^1(U)$ какой-нибудь ортонормированный базис $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$. Если $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

то

$$\omega(x) := \overline{\psi_m(x_1, x_2)} \varphi(x_3) \in W_2^1(\Pi) \quad \text{и} \quad \widehat{\omega}(x_1, x_2, k) = \overline{\psi_m(x_1, x_2)} \widehat{\varphi}(k).$$

Следовательно,

$$\int_{\Pi} (\partial_2 \widehat{u}_3 \psi_m + \widehat{u}_3 \partial_2 \psi_m) \overline{\widehat{\varphi}(k)} dx_1 dx_2 dk = 0.$$

Ввиду произвольности $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ получаем

$$\int_U (\partial_2 \widehat{u}_3 \psi_m + \widehat{u}_3 \partial_2 \psi_m) dx_1 dx_2 = 0 \quad \text{при п.в. } k \in \mathbb{R},$$

и

$$\text{при п.в. } k \in \mathbb{R} \quad \int_U (\partial_2 \widehat{u}_3 \psi + \widehat{u}_3 \partial_2 \psi) dx_1 dx_2 = 0 \quad \forall \psi \in W_2^1(U).$$

Аналогично, подставляя в (4.2) поля вида $z = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix}$ при $\omega \in W_2^1(\Pi)$, получим

$$\text{при п.в. } k \in \mathbb{R} \quad \int_U (\partial_1 \widehat{u}_3 \psi + \widehat{u}_3 \partial_1 \psi) dx_1 dx_2 = 0 \quad \forall \psi \in W_2^1(U).$$

Отсюда вытекает, что $\widehat{u}_3|_{\partial U} = 0$ при почти всех $k \in \mathbb{R}$. Тем самым выполняется (4.1). \square

Лемма 4.2. Пусть $u \in \Phi(\tau, \Pi)$, $\text{rot } u \in L(\nu)$. Тогда $u_3 \equiv 0$.

Доказательство. Условие $\text{rot } u \in L(\nu)$ означает, что

$$\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 = \partial_1 \varphi, \quad \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 = \partial_2 \varphi$$

при некоторой $\varphi \in \mathcal{H}(\nu)$. Снова сделаем преобразование Фурье по x_3 . Получим

$$\partial_2 \widehat{u}_3 - ik \widehat{u}_2 = \partial_1 \widehat{\varphi}, \quad ik \widehat{u}_1 - \partial_1 \widehat{u}_3 = \partial_2 \widehat{\varphi}, \quad (4.3)$$

где $\widehat{\varphi} \in \mathcal{H}(\nu)$. Кроме того, по условию

$$\int_{\Pi} \langle u, \nabla \omega \rangle dx = 0 \quad \forall \omega \in \mathring{W}_2^1(\Pi),$$

откуда

$$\int_{\Pi} \left(\widehat{u}_1 \partial_1 \overline{\widehat{\omega}} + \widehat{u}_2 \partial_2 \overline{\widehat{\omega}} - ik \widehat{u}_3 \overline{\widehat{\omega}} \right) dx_1 dx_2 dk = 0 \quad \forall \omega \in \mathring{W}_2^1(\Pi).$$

Аналогично рассуждениям в доказательстве леммы 3.3 или леммы 4.1 выводим, что

$$\text{при п.в. } k \in \mathbb{R} \quad \int_U (\hat{u}_1 \partial_1 \psi + \hat{u}_2 \partial_2 \psi - ik \hat{u}_3 \psi) dx_1 dx_2 = 0 \quad \forall \psi \in \mathring{W}_2^1(U).$$

Домножая это равенство на ik и используя формулы (4.3), получим

$$\int_U ((\partial_1 \hat{u}_3 + \partial_2 \hat{\varphi}) \partial_1 \psi + (\partial_2 \hat{u}_3 - \partial_1 \hat{\varphi}) \partial_2 \psi + k^2 \hat{u}_3 \psi) dx_1 dx_2 = 0.$$

С другой стороны, при почти всех $k \in \mathbb{R}$

$$\int_U (\partial_2 \hat{\varphi} \partial_1 \psi - \partial_1 \hat{\varphi} \partial_2 \psi) dx_1 dx_2 = 0 \quad \forall \psi \in C_0^\infty(U),$$

и следовательно, для любой $\psi \in \mathring{W}_2^1(U)$. Поэтому

$$\text{при п.в. } k \in \mathbb{R} \quad \int_U (\partial_1 \hat{u}_3 \partial_1 \psi + \partial_2 \hat{u}_3 \partial_2 \psi + k^2 \hat{u}_3 \psi) dx_1 dx_2 = 0 \quad \forall \psi \in \mathring{W}_2^1(U).$$

В силу предыдущей леммы $\hat{u}_3(\cdot, \cdot, k) \in \mathring{W}_2^1(U)$ при почти всех $k \in \mathbb{R}$. Подставляя в последнее равенство $\psi = \overline{\hat{u}_3}$, получим $\hat{u}_3 = 0$ почти везде, и следовательно, $u_3 \equiv 0$. \square

Лемма 4.3. Пусть $u \in \Phi(\tau, \varepsilon)$, ε удовлетворяет условию (0.2), $\text{rot } u \in L(\nu)$. Тогда $u \in K(\tau)$.

Доказательство. Положим $u_0 = P(\tau, \mathbb{1})u$. По лемме 2.1 $u_0 \in \Phi(\tau, \mathbb{1})$ и

$$u = u_0 + \nabla \varphi, \quad \varphi \in \mathring{W}_2^1(\Pi), \quad \text{rot } u = \text{rot } u_0.$$

По лемме 4.2 отсюда вытекает, что $(u_0)_3 = 0$. Следовательно,

$$\int_{\Pi} ((u_0)_1 \partial_1 \omega + (u_0)_2 \partial_2 \omega) dx = 0 \quad \forall \omega \in \mathring{W}_2^1(\Pi).$$

Отсюда точно так же, как при доказательстве леммы 3.3, вытекает, что

$$\text{при п.в. } x_3 \in \mathbb{R} \quad \int_U ((u_0)_1 \partial_1 \psi + (u_0)_2 \partial_2 \psi) dx_1 dx_2 = 0 \quad \forall \psi \in \mathring{W}_2^1(U).$$

Следовательно,

$$\int_{\Pi} \varepsilon \langle u_0, \nabla \psi \rangle dx = 0 \quad \forall \psi \in \mathring{W}_2^1(\Pi).$$

Кроме того, по условию

$$\int_{\Pi} \varepsilon \langle u, \nabla \psi \rangle dx = 0 \quad \forall \psi \in \mathring{W}_2^1(\Pi),$$

откуда

$$\int_{\Pi} \varepsilon \langle \nabla \varphi, \nabla \psi \rangle dx = 0 \quad \forall \psi \in \mathring{W}_2^1(\Pi).$$

Подставляя $\psi = \varphi$, получаем $\varphi \equiv 0$. Тем самым $u = u_0$ и $u_3 = 0$. Теперь согласно следствию 3.4 $u \in K(\tau)$. \square

§5. Инвариантные подпространства оператора Максвелла

Введем пространства

$$V_D := (L(\tau) \cap J(\tau, \varepsilon)) \oplus K(\nu), \quad V_N := K(\tau) \oplus (L(\nu) \cap J(\nu, \mu)).$$

Тогда

$$J(\tau, \varepsilon) \oplus J(\nu, \mu) = V_D \oplus_{\varepsilon, \mu} V_N. \quad (5.1)$$

Напомним, что в силу леммы 2.3 оператор Максвелла ограниченно обратим.

Лемма 5.1. V_N — инвариантное подпространство оператора \mathcal{M}^{-1} .

Доказательство. Пусть $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in V_N$, то есть

$$f \in K(\tau), \quad g \in L(\nu) \cap J(\nu, \mu).$$

Пусть

$$\mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Тогда $v \in \Phi(\nu, \mu)$, $i\varepsilon^{-1} \operatorname{rot} v = f$. При этом $(\operatorname{rot} v)_3 = 0$. По лемме 3.5 $v \in L(\nu) \cap J(\nu, \mu)$. Кроме того, $u \in \Phi(\tau, \varepsilon)$, $-i\mu^{-1} \operatorname{rot} u = g$, откуда $\operatorname{rot} u \in L(\nu)$.

По лемме 4.3 $u \in K(\tau)$. Тем самым $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in V_N$. \square

Из этой леммы вытекает следующая теорема.

Теорема 5.2. Пусть ε, μ — скалярные функции, удовлетворяющие (0.2). Тогда разложение (5.1) приводит оператор Максвелла \mathcal{M} .

Положим

$$\mathcal{M}_D := \mathcal{M}|_{V_D}, \quad \mathcal{M}_N := \mathcal{M}|_{V_N}.$$

Тогда

$$\mathcal{M}_D = \begin{pmatrix} 0 & iR_D(\nu) \\ -iR_D(\tau) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_N = \begin{pmatrix} 0 & iR_N(\nu) \\ -iR_N(\tau) & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} R_D(\tau) &= \mu^{-1} \text{rot}, & \text{Dom } R_D(\tau) &= L(\tau) \cap \Phi(\tau, \varepsilon), \\ R_D(\nu) &= \varepsilon^{-1} \text{rot}, & \text{Dom } R_D(\nu) &= K(\nu) \cap \Phi(\nu, \mu), \\ R_N(\tau) &= \mu^{-1} \text{rot}, & \text{Dom } R_N(\tau) &= K(\tau) \cap \Phi(\tau, \varepsilon), \\ R_N(\nu) &= \varepsilon^{-1} \text{rot}, & \text{Dom } R_N(\nu) &= L(\nu) \cap \Phi(\nu, \mu). \end{aligned}$$

Ясно, что операторы $R_D(\tau)$ и $R_D(\nu)$ взаимно сопряжены, и что операторы $R_N(\tau)$ и $R_N(\nu)$ взаимно сопряжены. Отметим, что разложение (5.1) приводит также оператор \mathcal{M}^2 , при этом

$$\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}_D^2 \oplus \mathcal{M}_N^2, \tag{5.2}$$

и

$$\lambda \in \sigma(\mathcal{M}) \iff \lambda^2 \in \sigma(\mathcal{M}_D^2) \cup \sigma(\mathcal{M}_N^2).$$

§6. Оператор \mathcal{M}_D^2

По построению

$$\mathcal{M}_D^2 = \begin{pmatrix} R_D(\nu)R_D(\tau) & 0 \\ 0 & R_D(\tau)R_D(\nu) \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

В силу следствия 2.4 ядра операторов $R_D(\tau)$ и $R_D(\nu)$ тривиальны, поэтому произведения $R_D(\nu)R_D(\tau)$ и $R_D(\tau)R_D(\nu)$ унитарно эквивалентны. Оператор \mathcal{M}_D^2 унитарно эквивалентен ортогональной сумме двух операторов $R_D(\tau)R_D(\nu)$, и

$$\sigma(\mathcal{M}_D^2) = \sigma(R_D(\tau)R_D(\nu)).$$

Далее, положительный самосопряженный оператор $R_D(\tau)R_D(\nu)$ отвечает квадратичной форме a_D в пространстве $K(\nu, \mu)$,

$$a_D[v] = \|R_D(\nu)v\|_{L_2(\Pi, \varepsilon)}^2 = (\varepsilon^{-1} \text{rot } v, \text{rot } v)_{L_2(\Pi)},$$

$$\text{Dom } a_D = K(\nu) \cap \Phi(\nu, \mu)$$

$$= \left\{ v = \begin{pmatrix} \partial_2 \psi \\ -\partial_1 \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \psi \in \mathcal{H}(\tau) : \partial_1 \partial_3 \psi, \partial_2 \partial_3 \psi, (\partial_1^2 + \partial_2^2) \psi \in L_2(\Pi) \right\}.$$

Чтобы установить унитарную эквивалентность оператора $R_D(\tau)R_D(\nu)$ и некоторого скалярного эллиптического оператора, введем вспомогательный оператор

$$B_D := \sqrt{-\Delta_D}, \quad \text{Dom } B_D = \mathring{W}_2^1(U),$$

где $-\Delta_D$ — оператор Лапласа задачи Дирихле в $L_2(U)$. Ясно, что

$$\text{Ran } B_D = L_2(U)$$

и

$$\|B_D\varphi\|_{L_2(U)} = \|\nabla\varphi\|_{L_2(U)} \quad \forall \varphi \in \mathring{W}_2^1(U). \quad (6.2)$$

Лемма 6.1. Пусть $\psi \in \mathcal{H}(\tau)$. Тогда

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi \in L_2(\Pi) \iff B_D\psi \in \mathcal{H}(\tau), \quad (6.3)$$

и в этой ситуации

$$\begin{aligned} & (\varepsilon^{-1}(\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi, (\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi)_{L_2(\Pi)} \\ &= (\varepsilon^{-1}\partial_1(B_D\psi), \partial_1(B_D\psi))_{L_2(\Pi)} + (\varepsilon^{-1}\partial_2(B_D\psi), \partial_2(B_D\psi))_{L_2(\Pi)}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Доказательство. Поскольку $\psi \in \mathcal{H}(\tau)$, то $\psi(\cdot, \cdot, x_3) \in \mathring{W}_2^1(U)$ при почти всех $x_3 \in \mathbb{R}$. Следовательно, при почти всех $x_3 \in \mathbb{R}$ имеют место эквивалентности

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi \in L_2(U) \iff \psi \in \text{Dom } B_D^2 \iff B_D\psi \in \text{Dom } B_D = \mathring{W}_2^1(U),$$

откуда вытекает (6.3), и

$$\|(\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi\|_{L_2(U)} = \|B_D(B_D\psi)\|_{L_2(U)} = \|\nabla(B_D\psi)\|_{L_2(U)}$$

в силу (6.2). Возводя последнее равенство в квадрат и интегрируя по x_3 с весом $\varepsilon^{-1}(x_3)$, получим (6.4). \square

Лемма 6.2. Пусть $\psi \in \mathcal{H}(\tau)$. Тогда

$$\widehat{\psi} \in \mathcal{H}(\tau) \quad \text{и} \quad (B_D\psi)^\wedge = B_D\widehat{\psi}.$$

Эта лемма очевидна.

Лемма 6.3. Пусть $\psi \in \mathcal{H}(\tau)$, $\partial_1\partial_3\psi, \partial_2\partial_3\psi \in L_2(\Pi)$. Тогда

$$\partial_3\psi \in \mathcal{H}(\tau), \quad \partial_3(B_D\psi) \in L_2(\Pi), \quad \partial_3(B_D\psi) = B_D(\partial_3\psi).$$

Доказательство. Рассмотрим преобразование Фурье $\widehat{\psi}$ функции ψ . Ясно, что

$$\widehat{\psi} \in \mathcal{H}(\tau) \quad \text{и} \quad k\partial_1\widehat{\psi}, k\partial_2\widehat{\psi} \in L_2(\Pi).$$

Отсюда следует, что $k\widehat{\psi} \in \mathcal{H}(\tau)$, поэтому и $\partial_3\psi \in \mathcal{H}(\tau)$. Далее,

$$\begin{aligned} k(B_D\widehat{\psi}) \in L_2(\Pi) &\implies \partial_3(B_D\psi) \in L_2(\Pi), \\ (\partial_3(B_D\psi))^\wedge &= ikB_D\widehat{\psi} = B_D(ik\widehat{\psi}) = (B_D(\partial_3\psi))^\wedge, \end{aligned}$$

откуда $\partial_3(B_D\psi) = B_D(\partial_3\psi)$. □

Объединяя леммы 6.1 и 6.3, получаем для функции

$$v = \begin{pmatrix} \partial_2\psi \\ -\partial_1\psi \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Dom } a_D$$

цепочку равенств

$$\begin{aligned} a_D[v] &= (\varepsilon^{-1} \text{rot } v, \text{rot } v)_{L_2(\Pi)} = \int_{\Pi} \varepsilon^{-1} (|\partial_1\partial_3\psi|^2 + |\partial_2\partial_3\psi|^2 + |\partial_1^2\psi + \partial_2^2\psi|^2) dx \\ &= \int_{\Pi} \varepsilon^{-1} (|\partial_3B_D\psi|^2 + |\partial_1B_D\psi|^2 + |\partial_2B_D\psi|^2) dx = \int_{\Pi} \varepsilon^{-1} |\nabla(B_D\psi)|^2 dx. \end{aligned}$$

Теорема 6.4. *Оператор $R_D(\tau)R_D(\nu)$ унитарно эквивалентен самосопряженному оператору*

$$\mathcal{A}_D = -\mu^{-1}(\text{div}(\varepsilon^{-1}\nabla\cdot))$$

с краевым условием Дирихле в $L_2(\Pi, \mu)$.

Доказательство. Оператор $R_D(\tau)R_D(\nu)$ соответствует квадратичной форме a_D в гильбертовом пространстве $K(\nu, \mu)$. Оператор, сопоставляющий

$$v = \begin{pmatrix} \partial_2\psi \\ -\partial_1\psi \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto B_D\psi, \quad \psi \in \mathcal{H}(\tau),$$

осуществляет изоморфизм $K(\nu, \mu) \rightarrow L_2(\Pi, \mu)$,

$$\int_{\Pi} \mu (|\partial_1\psi|^2 + |\partial_2\psi|^2) dx = \int_{\Pi} \mu |B_D\psi|^2 dx.$$

При этом в силу лемм 6.1 и 6.3 область определения $\text{Dom } a_D$ переходит в множество $\dot{W}_2^1(\Pi)$, и

$$a_D[v] = \int_{\Pi} \varepsilon^{-1} |\nabla(B_D\psi)|^2 dx.$$

Тем самым $R_D(\tau)R_D(\nu)$ унитарно эквивалентен самосопряженному оператору, отвечающему квадратичной форме

$$\int_{\Pi} \varepsilon^{-1} |\nabla \varphi|^2 dx, \quad \varphi \in \dot{W}_2^1(\Pi),$$

в гильбертовом пространстве $L_2(\Pi, \mu)$, то есть оператору \mathcal{A}_D . \square

§7. Оператор \mathcal{M}_N^2

Изучение оператора \mathcal{M}_N^2 проводится аналогично изучению \mathcal{M}_D^2 . По построению

$$\mathcal{M}_N^2 = \begin{pmatrix} R_N(\nu)R_N(\tau) & 0 \\ 0 & R_N(\tau)R_N(\nu) \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

В силу следствия 2.4 ядра операторов $R_N(\tau)$ и $R_N(\nu)$ тривиальны, поэтому произведения $R_N(\nu)R_N(\tau)$ и $R_N(\tau)R_N(\nu)$ унитарно эквивалентны, и оператор \mathcal{M}_N^2 унитарно эквивалентен ортогональной сумме двух операторов $R_N(\tau)R_N(\nu)$,

$$\sigma(\mathcal{M}_N^2) = \sigma(R_N(\tau)R_N(\nu)).$$

Положительный самосопряженный оператор $R_N(\tau)R_N(\nu)$ отвечает квадратичной форме a_N в пространстве $K(\tau, \varepsilon)$,

$$a_N[u] = \|R_N(\nu)u\|_{L_2(\Pi, \mu)}^2 = (\mu^{-1} \operatorname{rot} u, \operatorname{rot} u)_{L_2(\Pi)},$$

$$\operatorname{Dom} a_N = K(\tau) \cap \Phi(\tau, \varepsilon)$$

$$= \left\{ u = \begin{pmatrix} \partial_2 \psi \\ -\partial_1 \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \psi \in \mathcal{H}(\nu) : \partial_1 \partial_3 \psi, \partial_2 \partial_3 \psi, (\partial_1^2 + \partial_2^2) \psi \in L_2(\Pi) \right\}.$$

Рассмотрим оператор Лапласа задачи Неймана $-\Delta_N$ в гильбертовом пространстве

$$\left\{ \varphi \in L_2(U) : \int_U \varphi(x) dx_1 dx_2 = 0 \right\},$$

и положим

$$B_N := \sqrt{-\Delta_N}, \quad \operatorname{Dom} B_N = \left\{ \varphi \in W_2^1(U) : \int_U \varphi(x) dx_1 dx_2 = 0 \right\}.$$

Ясно, что

$$\operatorname{Ran} B_N = \left\{ \varphi \in L_2(U) : \int_U \varphi(x) dx_1 dx_2 = 0 \right\}, \quad \|B_N \varphi\|_{L_2(U)} = \|\nabla \varphi\|_{L_2(U)}.$$

Следующие три леммы аналогичны леммам 6.1, 6.2, 6.3.

Лемма 7.1. Пусть $\psi \in \mathcal{H}(\nu)$. Тогда

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi \in L_2(\Pi) \iff B_N\psi \in \mathcal{H}(\nu),$$

и

$$\begin{aligned} & (\mu^{-1}(\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi, (\partial_1^2 + \partial_2^2)\psi)_{L_2(\Pi)} \\ &= (\mu^{-1}\partial_1(B_N\psi), \partial_1(B_N\psi))_{L_2(\Pi)} + (\mu^{-1}\partial_2(B_N\psi), \partial_2(B_N\psi))_{L_2(\Pi)}. \end{aligned}$$

Лемма 7.2. Пусть $\psi \in \mathcal{H}(\nu)$. Тогда

$$\widehat{\psi} \in \mathcal{H}(\nu) \quad \text{и} \quad (B_N\psi)^\wedge = B_N\widehat{\psi}.$$

Лемма 7.3. Пусть $\psi \in \mathcal{H}(\nu)$, $\partial_1\partial_3\psi, \partial_2\partial_3\psi \in L_2(\Pi)$. Тогда

$$\partial_3\psi \in \mathcal{H}(\nu), \quad \partial_3(B_N\psi) \in L_2(\Pi), \quad \partial_3(B_N\psi) = B_N(\partial_3\psi).$$

Оператор, сопоставляющий

$$u = \begin{pmatrix} \partial_2\varphi \\ -\partial_1\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto B_N\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{H}(\nu),$$

осуществляет изоморфизм

$$K(\tau, \varepsilon) \rightarrow \left\{ w \in L_2(\Pi, \varepsilon) : \int_U w(x) dx_1 dx_2 = 0 \quad \text{п.в.} \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

При этом

$$\int_{\Pi} \varepsilon (|\partial_1\varphi|^2 + |\partial_2\varphi|^2) dx = \int_{\Pi} \varepsilon |B_N\varphi|^2 dx$$

и

$$\begin{aligned} a_N[u] &= \int_{\Pi} \mu^{-1} (|\partial_1\partial_3\varphi|^2 + |\partial_2\partial_3\varphi|^2 + |\partial_1^2\varphi + \partial_2^2\varphi|^2) dx \\ &= \int_{\Pi} \mu^{-1} (|\partial_3 B_N\varphi|^2 + |\partial_1 B_N\varphi|^2 + |\partial_2 B_N\varphi|^2) dx = \int_{\Pi} \mu^{-1} |\nabla(B_N\varphi)|^2 dx. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали следующий результат.

Теорема 7.4. Оператор $R_N(\tau)R_N(\nu)$ унитарно эквивалентен самосопряженному оператору

$$\mathcal{A}_N = -\varepsilon^{-1}(\operatorname{div}(\mu^{-1}\nabla \cdot))$$

с краевым условием Неймана в гильбертовом пространстве (1.1).

Из разложения (5.2), соотношений (6.1), (7.1) и теорем 6.4 и 7.4 вытекает теорема 1.3.

§8. Абсолютная непрерывность спектра

В этом параграфе мы обсудим ситуацию, когда коэффициенты ε и μ (не зависящие от поперечных переменных) периодичны вдоль оси цилиндра. Цель — доказать теорему 1.5.

Мы будем использовать следующий известный факт. Пусть дан дифференциальный оператор с периодическими коэффициентами. Рассмотрим его сужение на ячейку периодов с квазипериодическими граничными условиями. Предположим, что соответствующая резольвента компактна в пространстве L_2 на ячейке периодов. Тогда в спектре исходного оператора сингулярно непрерывная компонента отсутствует (см. [10, 6] или [11]).

Кроме того, нам понадобится

Теорема 8.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область, $\partial U \in \text{Lip}$. Пусть V — вещественнозначная функция в цилиндре $\Pi = U \times \mathbb{R}$,

$V(x_1, x_2, x_3 + a) = V(x_1, x_2, x_3)$ почти везде, $V \in L_r((0, a), L_2(U))$, $r > 1$.

Тогда спектры операторов Шрёдингера $H = -\Delta + V$ задач Дирихле и Неймана в $L_2(\Pi)$ абсолютно непрерывны.

Приведем также результат про оператор Шрёдингера с третьим краевым условием.

Теорема 8.2. Пусть U и V удовлетворяют условиям предыдущей теоремы. Пусть σ — вещественная функция на границе $\partial\Pi$, не зависящая от x_3 , и

$$\sigma \in L_r(\partial U), \quad r > 1.$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$h[u] = \int_{\Pi} (|\nabla u(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2) dx + \int_{\partial\Pi} \sigma(x_1, x_2)|u(x)|^2 dS(x),$$

$$\text{Dom } h = W_2^1(\Pi).$$

Тогда спектр самосопряженного оператора, отвечающего квадратичной форме h , абсолютно непрерывен.

Теоремы 8.1 и 8.2 содержатся в работе [5, см. теорема 3.3, следствия 3.4 и 3.5, и §7.1].

Лемма 8.3. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная ограниченная область, $\partial U \in \text{Lip}$. Пусть коэффициенты ε и μ — скалярные функции, удовлетворяющие условиям (0.1), (0.2) и (0.3) при некотором $a > 0$, и $\varepsilon, \mu \in W_{r, \text{loc}}^2(\mathbb{R})$, $r > 1$. Тогда спектр оператора A_D , определенного в теореме 1.3, абсолютно непрерывен.

Доказательство. Достаточно показать, что в спектре оператора \mathcal{A}_D нет собственных значений. Предположим, что функция $\varphi \in \dot{W}_2^1(\Pi)$ и число λ таковы, что

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\varepsilon^{-1}\nabla\varphi) = \lambda\mu\varphi, \\ \varphi|_{\partial\Pi} = 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

Введем функцию $f(x) = \varepsilon(x_3)^{-1/2}\varphi(x)$. Тогда

$$\frac{\nabla\varphi}{\varepsilon} = \frac{\nabla f}{\varepsilon^{1/2}} + \frac{\varepsilon'(x_3)f e_3}{2\varepsilon^{3/2}},$$

и уравнение (8.1) переписывается как

$$-\frac{\Delta f}{\varepsilon^{1/2}} - \left(\frac{\varepsilon'}{2\varepsilon^{3/2}}\right)' f = \lambda\mu\varepsilon^{1/2}f.$$

Следовательно, функция $f \in \dot{W}_2^1(\Pi)$ является собственной функцией (отвечающей собственному числу ноль) оператора Шрёдингера в цилиндре с краевым условием Дирихле и с периодическим потенциалом

$$V = -\varepsilon^{1/2} \left(\frac{\varepsilon'}{2\varepsilon^{3/2}}\right)' - \lambda\mu\varepsilon.$$

При этом $V \in L_{r,\text{loc}}(\mathbb{R})$ в силу условия $\varepsilon, \mu \in W_{r,\text{loc}}^2(\mathbb{R})$. По теореме 8.1 отсюда вытекает, что $f \equiv 0$ и $\varphi \equiv 0$. \square

Лемма 8.4. *В условиях леммы 8.3 спектр оператора \mathcal{A}_N , определенного в теореме 1.3, абсолютно непрерывен.*

Доказательство. Аналогично предыдущей лемме. Предположим, что функция $\psi \in W_2^1(\Pi)$ и число λ таковы, что

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mu^{-1}\nabla\psi) = \lambda\varepsilon\psi, \\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|_{\partial\Pi} = 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

Введем функцию $g(x) = \mu(x_3)^{-1/2}\psi(x)$. Тогда

$$\begin{cases} -\Delta g + Wg = 0, \\ \left.\frac{\partial g}{\partial\nu}\right|_{\partial\Pi} = 0, \end{cases}$$

где

$$W = -\mu^{1/2} \left(\frac{\mu'}{2\mu^{3/2}}\right)' - \lambda\mu\varepsilon \in L_{r,\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

Функция $g \in W_2^1(\Pi)$ является собственной функцией оператора Шрёдингера в цилиндре с краевым условием Неймана и с периодическим потенциалом W . По теореме 8.1 отсюда вытекает, что $g \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$. \square

Теперь из лемм 8.3 и 8.4 и теоремы 1.3 вытекает теорема 1.5.

Замечание 8.5. В случае “хорошей” границы теорема 1.5 вытекает из результатов работы [7]. В этой работе рассмотрен оператор Максвелла со скалярными коэффициентами в цилиндре $\Pi = U \times \mathbb{R}$. Про сечение $U \subset \mathbb{R}^2$ предполагалось, что это — ограниченная область с C^2 -гладкой границей, или что U ограничена, выпукла и граница ∂U — кусочно C^2 -гладкая. Доказано (см. [7, теорема 1.4 и замечание 1.9]), что абсолютная непрерывность оператора Максвелла вытекает из отсутствия собственных значений в спектре матричного оператора Шрёдингера $-\Delta + V$, действующего на функции $\Phi \in W_2^1(\Pi, \mathbb{C}^6)$ с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \Phi_\tau^{(1)} \Big|_{\partial\Pi} &= 0, & \Phi_\nu^{(2)} \Big|_{\partial\Pi} &= 0, \\ \left(\partial_\nu \Phi^{(1)} + (\Sigma\Phi)^{(1)} \right)_\nu \Big|_{\partial\Pi} &= 0, & \left(\partial_\nu \Phi^{(2)} + (\Sigma\Phi)^{(2)} \right)_\tau \Big|_{\partial\Pi} &= 0, \end{aligned}$$

где $\Phi^{(1)} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, $\Phi^{(2)} = (\Phi_4, \Phi_5, \Phi_6)$,

$$V = \begin{pmatrix} W(\varepsilon) - \varepsilon\mu\lambda^2 I_3 & -2i\lambda F \\ 2i\lambda F & W(\mu) - \varepsilon\mu\lambda^2 I_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$W_{jk}(\mu) = ((2\mu)^{-1}\Delta\mu - (4\mu^2)^{-1}|\nabla\mu|^2)\delta_{jk} + \mu^{-2}\partial_j\mu\partial_k\mu - \mu^{-1}\partial_j\partial_k\mu,$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3(\varepsilon\mu)^{1/2} & \partial_2(\varepsilon\mu)^{1/2} \\ \partial_3(\varepsilon\mu)^{1/2} & 0 & -\partial_1(\varepsilon\mu)^{1/2} \\ -\partial_2(\varepsilon\mu)^{1/2} & \partial_1(\varepsilon\mu)^{1/2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} (\kappa(x) + (2\varepsilon)^{-1}\partial_\nu\varepsilon) I_3 & 0 \\ 0 & \kappa(x)P_{e_3^\perp} - (2\mu)^{-1}\partial_\nu\mu I_3 \end{pmatrix},$$

$\kappa(x_1, x_2, x_3)$ — кривизна кривой ∂U в точке (x_1, x_2) , $P_{e_3^\perp}$ — проектор на плоскость, ортогональную оси цилиндра. Если ε и μ зависят только от x_3 , то $\partial_\nu\varepsilon = 0$, $\partial_\nu\mu = 0$ и коэффициент в краевом условии $\Sigma(x)$, наоборот, не зависит от x_3 . Тем самым этот оператор попадает под действие теоремы 8.2 (в теореме 8.2 утверждается отсутствие собственных значений скалярного оператора Шрёдингера; доказательство переносится на случай матричного оператора Шрёдингер дословно). Мы снова получаем, что при выполнении условия (1.2) спектр оператора Максвелла абсолютно непрерывен. Теорема 1.5 более общая, так как требует от сечения U только липшицевость границы.

Замечание 8.6. Пусть коэффициенты ε и μ — скалярные функции, удовлетворяющие условиям (0.1), (0.2), (0.3) и, кроме того, четные,

$$\varepsilon(-x_3) = \varepsilon(x_3), \quad \mu(-x_3) = \mu(x_3).$$

Тогда уравнения (8.1) и (8.2) имеют только тривиальные решения уже при $\varepsilon, \mu \in \text{Lip}(\mathbb{R})$ в силу [8, теорема 2.4 и замечание 2.3]. В этой ситуации и теорема 1.5 выполняется при более слабых, чем (1.2), условиях гладкости на коэффициенты: $\varepsilon, \mu \in \text{Lip}(\mathbb{R})$.

Список литературы

- [1] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Самосопряженный оператор Максвелла в произвольных областях*, Алгебра и анализ **1** (1989), №1, 96–110.
- [2] Дунаев К. О., *Оператор Максвелла с периодическими характеристиками среды*, дипломная работа, Физ. фак. ЛГУ, Л., 1989.
- [3] Филонов Н., *Об одном неравенстве на собственные числа задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа*, Алгебра и анализ **16** (2004), №2, 172–176.
- [4] Филонов Н., *Оператор Максвелла в цилиндре с коэффициентами, не зависящими от продольной переменной*, Алгебра и анализ **30** (2018), №3, 210–249.
- [5] Качковский И., Филонов Н., *Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шрёдингера в многомерном цилиндре*, Алгебра и анализ **21** (2009), №1, 133–152.
- [6] Filonov N., Sobolev A. V., *Absence of the singular continuous component in the spectrum of analytic direct integrals*, Зап. науч. семин. ПОМИ **318** (2004), 298–307.
- [7] Прохоров А., Филонов Н., *Оператор Максвелла с периодическими коэффициентами в цилиндре*, Алгебра и анализ **29** (2017), №6, 182–196.
- [8] Тихомиров М., Филонов Н., *Абсолютная непрерывность “четного” периодического оператора Шрёдингера с негладкими коэффициентами*, Алгебра и анализ **16** (2004), №3, 201–210.
- [9] Friedlander L., *Some inequalities between Dirichlet and Neumann eigenvalues*, Arch. Rational Mech. Anal. **116** (1991), no. 2, 153–160.
- [10] Gérard G., Nier F., *The Mourre theory for analytically fibered operators*, J. Funct. Anal. **152** (1998), no. 1, 202–219.
- [11] Kuchment P., *An overview of periodic elliptic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (2016), no. 3, 343–414.
- [12] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика. VIII. Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1992.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. Стеклова РАН,
Фонтанка, д. 27, 191023, С.-Петербург;
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7–9,
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: filonov@pdmi.ras.ru

Поступило 31 августа 2019 г.