Функциональный анализ и его приложения
2002, т. 36, вып. 2, с. 12–27

УДК 513.5

Классификация измеримых функций нескольких аргументов и инвариантно распределенные случайные матрицы*

© 2002. А. М. Вершик

§1. Введение: постановка проблем

Эта статья начинает серию работ, посвященных классификации измеримых функций и случайных процессов, описанию инвариантных мер на матрицах и тензорах, действию на них степеней симметрических групп и теории случайных матриц. К тем же вопросам относится классификация метрических пространств с мерой (mm-пространств по Громову), анализ универсальных пространств Урысона и др. (см. [12, 13]).

В этой статье мы рассмотрим только проблему классификации измеримых функций k аргументов (проблема $(\mathbf{F})$) и ее связь с проблемой описания $(S_{\mathbb{N}})^k$-инвариантных мер (проблема $(\mathbf{G})$). Основной случай $k=2$ включает важную специальную проблему классификации метрических пространств с мерой (проблема $(\mathbf{M})$).

Проблема $(\mathbf{F})$. *Расклассифицировать измеримые* (*непрерывные, гладкие и т. д.*) *функции двух или более аргументов, заданные на пространстве Лебега с непрерывной мерой с точностью до метрического изоморфизма, т. е. с точностью до преобразований, сохраняющих меру каждого из аргументов в отдельности.*

Иначе говоря, две измеримые функции f_1, f_2 с вещественными значениями (или значениями в произвольном польском пространстве), определенные на пространствах Лебега с непрерывными мерами $(X_1\times Y_1,\mu_1\times\nu_1)$, $(X_2\times Y_2,\mu_2\times\nu_2)$ соответственно, *метрически изоморфны*, если

$$f_2(x,y)=f_1(Sx,Ty),$$

где $S\colon (X_2,\mu_2)\to(X_1,\mu_1)$, $T\colon (Y_2,\nu_2)\to(Y_1,\nu_1)$ — произвольные обратимые сохраняющие меру преобразования.

Изменения, которые необходимо сделать в постановке проблем для случая произвольного числа аргументов, очевидны.

Две симметрические $(f(x_1,x_2)=f(x_2,x_1))$ измеримые функции, заданные на пространствах Лебега $(X_1\times X_1,\mu_1\times\mu_1)$ и $(X_2\times X_2,\mu_2\times\mu_2)$, метрически изоморфны как симметрические функции, если

$$f_2(x_1,x_2)=f_1(Sx_1,Sx_2),$$

где $S\colon (X_2,\mu_2)\to(X_1,\mu_1)$ — сохраняющий меру изоморфизм пространств.

Проблема $(\mathbf{F}_{\mathrm{symm}})$. *Расклассифицировать измеримые симметрические функции с точностью до изоморфизма.*

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 99-01-00098, а также CRDF, грант RM1-2244.

В случае большего числа переменных можно рассматривать различные условия симметрии, а не только обычную или косую симметрию. Мы вернемся к этому вопросу позже.

Случай функций одной переменной был полностью рассмотрен много лет назад В. А. Рохлиным [9], мы цитируем его результат ниже; случай многих переменных существенно сложней. Нет оснований думать, что классификация может быть слишком простой, уже потому, что функция двух переменных есть функция одной переменной, значения которой могут пробегать произвольное множество измеримых функций другой переменной, например, множество всех измеримых функций.

Наш основной результат сводит классификацию к описанию инвариантных мер на пространстве матриц (тензоров) и, тем самым, изучение инвариантных свойств функций к изучению специальных свойств этих мер. С этой точки зрения представляется интересным изучение *метрических* инвариантов различных классов функций.

Важный частный случай проблемы ($\mathbf{F}_{\mathrm{symm}}$) таков:

Проблема ($\mathbf{M}$). *Расклассифицировать польские (= полные сепарабельные метризуемые) пространства (X, ρ, μ) с метрикой ρ и вероятностной борелевской мерой μ с точностью до изометрий, сохраняющих меру.*

Очевидно, что такая классификация равносильна метрической классификации метрик ρ как симметричных измеримых функций двух переменных на квадрате пространства с продакт-мерой $(X \times X, \mu \times \mu)$ и поэтому является частным случаем проблемы ($\mathbf{F}_{\mathrm{symm}}$). Тройки (X, ρ, μ) М. Громов, инициировавший эту естественную проблематику, назвал mm-пространствами [4]; в работе [10] они названы тройками Громова, или метрическими тройками (эпитет «метрический» в равной мере относится и к метрикам, и к мерам). Изучение метрических троек и классификационная проблема полезны в спектральной геометрии и других областях (см. [4, 10]). В несколько иной, чем у нас, формулировке в [4] предложен инвариант, который в данной работе рассматривается в общем случае и называется матричным распределением (см. также [10]).

Рассмотрим теперь пространство бесконечных матриц $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$ с элементами из некоторого польского пространства R, снабженное слабой топологией. На $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$ можно рассмотреть симметричное действие группы $S_{\mathbb{N}}$ финитных подстановок строк и столбцов: $(gr)_{i,j} = r_{g(i),g(j)}$, $g \in S_{\mathbb{N}}$, $r \in \mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$, и раздельное действие группы $S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$: $((g,h)r)_{i,j} = r_{g(i),h(j)}$.

Проблема ($\mathbf{G}$). *Описать все борелевские вероятностные меры на пространстве $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$ (или на $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}^{\mathrm{Symm}}(R)$, или на пространстве тензоров и т.д.), инвариантные относительно действия упомянутых групп.*

В этой работе мы рассматриваем в основном лишь раздельное действие группы $S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$ на пространстве матриц $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$; другие примеры и общий случай будут рассмотрены в другой работе.

Один класс примеров таких мер очевиден — все элементы матриц есть одинаково распределенные независимые случайные величины на R; соответствующие меры мы называем *продакт-мерами*. Но имеется огромное семейство вырожденных $S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$-инвариантных эргодических мер (как для раздельного, так и для симметрического действий), которые естественно возникают как инварианты измеримых функций. Представляет интерес также сам тип действия бесконечных симметрических групп на пространстве матриц, снабженных такой мерой.

Проблема (**G**) рассматривалась с вероятностной точки зрения Д. Олдосом [1, 2], который редуцировал ее к конкретной версии проблемы (**F**), и позже подробно изучалась О. Калленбергом [5, 6] (см. ссылки в этих работах).

Результаты настоящей работы таковы.

1. Описание полного инварианта изоморфизма измеримых функций двух или более аргументов на пространстве Лебега со значениями в произвольном борелевском пространстве. Это так называемое *матричное распределение*, которое есть $S_\mathbb{N} \times S_\mathbb{N}$-инвариантная мера на пространстве матриц $\mathbf{M}_\mathbb{N}(R)$. Матричное распределение является естественным обобщением понятия обычного распределения измеримой функции одного переменного. Таким образом, этот инвариант дает решение проблемы (**F**) (см. теорему 2 §3). Более точно, мы делаем редукцию проблемы (**F**) к проблеме **(G)** (см. §3).

2. Характеристическое свойство матричных распределений как $S_\mathbb{N}\times S_\mathbb{N}$-инвариантных мер на $\mathbf{M}_\mathbb{N}(R)$: они являются *простыми мерами*, которые определяются некоторым условием на разложения на эргодические компоненты первой и второй подгрупп группы $S_\mathbb{N} \times S_\mathbb{N}$ (§3).

3. Каноническое представление функции двух переменных с данным матричным распределением, реконструирующее измеримую функцию по счетному числу ее значений на сетке (§3).

Основной прием этой работы — всестороннее использование эргодической теоремы. Этого оказывается достаточно и для классификации измеримых функций, и для описания инвариантных мер. В нашей работе [11] была поставлена проблема (**G**) для симметрической и унитарной групп и был предложен так называемый эргодический метод для нахождения инвариантных мер. Эффективность этого метода была продемонстрирована на «одномерных задачах» — теоремах де Финетти (о симметрических мерах) и Шёнберга (о сферически инвариантных мерах в гильбертовых пространствах). К сожалению, ответы для матричного случая, данные в [11], были неполны — вырожденные меры были пропущены. Однако эргодический метод применим и столь же эффективен и в изучаемых проблемах, что видно из дальнейшего. В то же время имеется ряд альтернативных подходов (см. [1, 2, 5, 6] и ссылки в них). Для случая унитарной группы существуют также иные методы — в работе Ольшанского и автора [7] использовались двойственное описание инвариантных мер с помощью преобразования Фурье, теория симметрических функций и вариант эргодического метода. Как и в более ранней работе Пикреля [8] (но иным способом), проблема (**G**) для унитарной группы связывалась с теорией вполне положительных функций на прямой.

Таким образом, мы имеем нетривиальные связи между проблемами (**F**), (**M**), (**G**), полезные сами по себе. Что особенно важно — это то, что все проблемы оказались гладкими в смысле теории классификаций; это означает, что классы эквивалентности имеют хорошее пространство параметров и даже нормальные формы, — результат, совсем не очевидный a priori.

§2. Предварительные сведения и определения

2.1. Классический случай: функции одной переменной. Прежде всего, мы напомним (в несколько иной форме, чем в [9]) теорему Рохлина о классификации измеримых функций одной переменной со значениями в произвольном борелевском пространстве. Пусть $f\colon X \to R$ — измеримая функция, заданная на пространстве Лебега $(X, \mathscr{B}, \mu)$, со значениями в стандартном борелевском пространстве R (например, $\mathbb{R}$ или $[0,1]$); здесь μ — непрерывная мера, определенная на сигма-алгебре $\mathscr{B}$ (обычно мы опускаем обозначение сигма-алгебры). Напомним, что мы всегда, говоря о функциях, имеем в виду классы $(\mathrm{mod}\ 0)$-совпадающих функций; поэтому все конструкции должны быть корректными по отношению к такой факторизации; мы опускаем такую проверку, если она носит рутинный характер.

Группа $\mathscr{A}(X, \mu)$ всех сохраняющих меру (классов $(\mathrm{mod}\ 0)$-совпадающих) преобразований пространства естественно действует на пространстве $S_\mu(X; R)$ всех измеримых функций по формуле $(U_T)f(x) = f(Tx)$. Мы рассматриваем инварианты этого действия, т. е. функционалы, постоянные на его орбитах, которые называются метрическими инвариантами функций.

Очевидно, что мера-образ $f \circ \mu$, т. е. распределение функции f как мера на R, есть метрический инвариант функции. Но он не учитывает кратностей значений, принимаемых функцией, и потому не является полным инвариантом. Определим измеримое разбиение пространства (X, μ) на прообразы точек при отображении f, т. е. $f^{-1}\epsilon$, где ϵ — разбиение на точки пространства R. Как и всякое измеримое разбиение, $f^{-1}\epsilon$ имеет каноническую систему условных мер, превращающих почти каждый элемент разбиения в пространство Лебега. Поскольку элементы разбиения нумеруются точками пространства образов, почти каждой точке $r \in R$ сопоставлен тип пространства Лебега, т. е. последовательность мер атомов

$$m^1(r) \geqslant m^2(r) \geqslant \dots \geqslant 0, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} m^i(r) \leqslant 1,$$

где $m^i(r)$ есть мера i-го атома условной меры в элементе разбиения, отвечающем значению функции, равному r. Тем самым определена новая измеримая функция на пространстве-образе, снабженная мерой $f \circ \mu$ (распределением) со значениями в бесконечномерном симплексе

$$\Sigma = \Bigl\{ \{m^i\}_{i=1}^{\infty} : m^i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{\infty} m^i \leqslant 1 \Bigr\}.$$

Например, если $m^1(r) \equiv 1$ почти всюду, то функция f взаимно однозначна $(\mathrm{mod}\, 0)$, т. е. принимает почти все свои значения один раз; если $m^i(r) \equiv 0$ при всех i, то почти каждое значение принимается с континуальной кратностью. И то, и другое вытекает из теоремы Рохлина о классификации измеримых разбиений, которая немедленно приводит нас к классификации измеримых функций одного аргумента:

Теорема 1 (см. [9]). *Полная система метрических инвариантов измеримой функции, заданной на пространстве Лебега, по отношению к действию группы всех преобразований, сохраняющих меру, состоит из*

1) *меры $f \circ \mu$ на пространстве значений функции R, или распределения функции f, и*

2) *измеримой функции m_f на пространстве образов $(R, f \circ \mu)$ (как пространстве с мерой) — функции кратностей — со значениями в бесконечномерном симплексе Σ.*

Эта теорема описывает орбиты группы $\mathscr{A}(X,\mu)$ в пространстве $S_\mu(X;R)$: две функции f_1,f_2, заданные на пространствах Лебега (X_1,μ_1) и (X_2,μ_1), со значениями в борелевском пространстве R лежат на одной орбите, если тройки $(R,f_1\circ\mu_1,m_{f_1})$ и $(R,f_2\circ\mu_2,m_{f_2})$ совпадают. Для взаимно однозначных $(\operatorname{mod}0)$ функций есть хорошо известная нормальная форма измеримой функции как функции на отрезке — «монотонная перестройка». Это известные вещи, и мы на них не останавливаемся.

Случай нескольких переменных существенно сложнее и требует новых идей. Разумеется, дело определяется тем, как действует группа, относительно которой мы классифицируем функции нескольких переменных. Прямое произведение групп преобразований, сохраняющих каждый аргумент в отдельности, действует гораздо более сложным образом, чем группа всех сохраняющих меру преобразований. Если бы мы классифицировали функции двух переменных относительно группы скрещенных произведений, то решение задачи было бы не намного сложнее (но более громоздко) рассмотренного выше случая функций одной переменной, поскольку действие группы редуцируется к действию группы всех преобразований. Различие между такой классификацией и проблемой (**F**) аналогично различию между разрешимым и полупростым действиями групп.

2.2. Чистые функции. Рассмотрим измеримые функции k переменных; мы сосредоточимся на случае $k=2$ — изменения, которые необходимо сделать для $k>2$, очевидны. Функция f задана на пространстве $(X\times Y,\mathscr{B}_X\times\mathscr{B}_Y,\mu\times\nu)$ с непрерывной мерой[1]. Группа $\mathscr{A}(X,\mu)\times\mathscr{A}(Y,\nu)$ действует (раздельно) на оба аргумента: $((S,T)f)(x,y)=f(Sx,Ty)$, $S\in\mathscr{B}_X$, $T\in\mathscr{B}_Y$. Параллельно мы рассматриваем симметрический случай, при котором $(X,\mu)=(Y,\nu)$, $f(x,y)=f(y,x)$, а группа $\mathscr{A}(X,\mu)$ действует диагонально, $(Sf)(x,y)=f(Sx,Sy)$, $S\in\mathscr{A}(X,\mu)$, на симметрических функциях. Заметим, что различие в методах изучения этих двух случаев не слишком велико.

Прежде всего, мы исключим эффект «кратностей». Определим на пространствах (X,μ) и (Y,μ) разбиения ζ^X и ζ^Y соответственно следующим образом: две точки x_1,x_2 пространства X (соответственно y_1, y_2 пространства Y) принадлежат одному и тому же элементу разбиения ζ^X (соответственно ζ^Y), если

$$f(x_1,y)\equiv f(x_2,y)$$

для ν-почти всех y (соответственно

$$f(x,y_1)\equiv f(x,y_2)$$

для μ-почти всех x). Поскольку f — измеримая функция, разбиения ζ^X и ζ^Y измеримы.

Определение 1. Измеримая функция $f(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ называется *чистой по отношению к первому* (*второму*) *аргументу*, если разбиение ζ^X (соответственно ζ^Y) есть разбиение на отдельные точки $(\operatorname{mod}0)$ пространства (X,μ) (соответственно

[1] Дискретные меры в задаче классификации интересны лишь в том случае, когда они однородны и, таким образом, когда пространство с мерой конечно. Если конечны и X, и Y, то мы получаем хорошо известную задачу о классификации матриц относительно группы всех подстановок строк и столбцов (раздельной или нет); это трудная конечная задача, включающая, например, задачу классификации графов и представляющая интерес с комбинаторной и сложностной точек зрения, но не с той, которая рассматривается здесь. Если же конечно только одно из пространств X, Y, то задача классификации, как нетрудно видеть, немедленно сводится к случаю функций одной переменной со значениями в симметрической степени пространства значений исходной функции.

(Y,ν)), и *чистой*, если оба разбиения есть разбиения на отдельные точки $(\mathrm{mod}\,0)$. (В случае симметрической функции оба разбиения совпадают.)

Чистые функции играют ту же роль, которую играют взаимно однозначные $(\mathrm{mod}\,0)$ функции в случае одной переменной, и классификация произвольных функций сводится к классификации чистых функций.

Пусть $f(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ — произвольная измеримая функция на пространстве $(X \times Y, \mu \times \nu)$, и предположим, что ζ^X, ζ^Y суть измеримые разбиения, определенные выше. Профакторизуем пространство X по разбиению ζ^X и пространство Y по разбиению ζ^Y. На корректно определенном факторпространстве

$$(X/\zeta^X \times Y/\zeta^Y, \mu_{\zeta^X} \times \nu_{\zeta^Y}),$$

где μ_{ζ^X}, ν_{ζ^Y} — соответствующие фактормеры, определим новую измеримую функцию $\bar{f}$ с новым пространством значений $\bar{R} = R \times \Sigma \times \Sigma$ следующим образом: значение функции $\bar{f}$ в точке $(\bar{x},\bar{y}) \in (X/\zeta \times Y/\zeta)$ — это тройка

$$(f(x,y),\ \{m^i(\bar{x})\}_{i=1}^{\infty},\ \{m^i(\bar{y})\}_{i=1}^{\infty}) \in (R \times \Sigma \times \Sigma),$$

где $\bar{x}$ (соответственно $\bar{y}$) есть элемент разбиения ζ^X (соответственно ζ^Y), который содержит точку x (соответственно y), а последовательность $\{m^i(\bar{x})\}_{i=1}$ (соответственно $\{m^i(\bar{y})\}_{i=1}$) — метрический тип условной меры элемента $\bar{x}$ (соответственно $\bar{y}$) разбиения ζ^X (соответственно ζ^Y) пространства (X,μ) (соответственно (Y,ν)). Корректность этого определения следует из определений разбиения ζ и функции $\bar{f}$. Следующая лемма показывает, что классификация произвольных функций с помощью такого расширения пространства значений сводится к классификации наиболее интересного случая чистых функций, который изучается в следующем параграфе.

Лемма 1. (1) *Для любой измеримой функции f функция $\bar{f}$ (с расширенным пространством значений), определенная выше, является чистой.*

(2) *Две измеримые функции f_1, f_2 изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны соответствующие чистые функции $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$.*

Доказательство. Пункт (1) следует из определения функции $\bar{f}$: чистой является уже первая компонента функции $\bar{f}$, а именно $f(x,y)$ как функция на $X/\zeta \times Y/\zeta$. Предположим теперь, что функции $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ метрически изоморфны; тогда изоморфны первые компоненты (как функции на факторпространствах) и совпадают метрические типы почти всех соответствующих элементов разбиений ζ^X и ζ^Y. Но в этом случае из теоремы Рохлина о классификации измеримых разбиений вытекает изоморфизм самих разбиений и, тем самым, изоморфизм функций f_1 и f_2. Обратно, если f_1 и f_2 изоморфны, то тот же изоморфизм осуществляет и изоморфизм чистых функций $\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$. □

Лемма объясняет аналогию между взаимно однозначными $(\mathrm{mod}\,0)$ функциями одного аргумента и чистыми функциями нескольких аргументов. Она буквально переносится на случай классификации симметрических функций.

§3. Полный метрический инвариант измеримых функций нескольких аргументов: матричное распределение

3.1. Определение матричного распределения. Мы рассматриваем измеримые функции двух аргументов, заданные на прямом произведении двух пространств

Лебега с непрерывной мерой. Не умаляя общности, можно считать, что область задания — единичный квадрат с лебеговой мерой. Областью значений может быть любое стандартное борелевское пространство, например отрезок $[0,1]$ или вещественная прямая $\mathbb{R}$ (в тех случаях, когда мы применяем эргодическую теорему), — разумеется, выбор пространства значений R несуществен для классификации функций. Пусть f — измеримая функция двух аргументов, заданная на пространстве $(X\times Y,\mu\times\nu)$, со значениями в некотором стандартном борелевском пространстве R и $((X\times Y)^{\mathbb{N}},(\mu\times\nu)^{\mathbb{N}})$ — бесконечное прямое произведение областей задания функции. Пусть $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$ есть пространство всех матриц с элементами из пространства R. Мы вводим на $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$ структуру борелевского пространства, индуцированную из R; все рассматриваемые меры будут борелевскими по отношению к ней.

Определим отображение

$$F_f\colon (X\times Y)^{\mathbb{N}}\to\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$$

по формуле

$$F_f(x_1,\dots;y_1,\dots)=\{f(x_i,y_j)\}_{i,j=1}^{\infty}.$$

Определение 2. Образ меры $(\mu\times\nu)^{\mathbb{N}}$ относительно отображения F_f на пространстве матриц $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$ (т.е. $F_f\circ(\mu\times\nu)^{\mathbb{N}}\equiv(\mu\times\nu)^{\mathbb{N}}(F_f^{-1})$), называется *матричным распределением функции* f и обозначается D_f. Для случая симметрической классификации мы определяем отображение $F_f\colon X^{\mathbb{N}}\to\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$ формулой $F_f(x_1,\dots)=\{f(x_i,x_j),\,i,j=1,\dots\}$ и *матричным распределением* называем меру $D_f=F_f\circ\mu^{\mathbb{N}}\equiv\mu^{\mathbb{N}}(F_f^{-1})$.

Таким образом, мера D_f на $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$ есть распределение *случайных матриц*

$$\{f(x_i,y_j)\}_{i,j=1}^{\infty},$$

где $\{x_i\}$, $\{y_j\}$ — последовательности независимых одинаково распределенных случайных точек пространств X, Y с распределениями μ, ν.

Эта мера D_f однозначно определяется своими конечномерными распределениями, т.е. распределениями матриц $\{f(x_i,y_j)\}_{i,j=1}^{n}$ порядка n, когда n пробегает $\mathbb{N}$. Обычное распределение функции f как функции одного аргумента (x,y) на пространстве $(X\times Y,\mu\times\nu)$ есть не что иное, как одномерное распределение, т.е. распределение одной координаты матрицы, безразлично какой в силу инвариантности меры, например координаты $r_{1,1}$ или $r_{1,2}$ в симметрическом случае. Заметим, что отображение F_f может не быть однозначным (см. далее).

Термин «матричное распределение» объясняется аналогией со случаем одной переменной. Рассмотрим функцию $f\colon(X,\mu)\to(R,d_f)$, где мера $d_f=f\circ\mu$ на R есть распределение функции f, и пусть $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ — некоторый элемент пространства $X^{\mathbb{N}}$. Тогда отображение $F_f\colon X^{\mathbb{N}}\to R^{\mathbb{N}}$, определяемое таким же образом, как и выше, $F_f(\{x_i\})=\{f(x_i)\}\in R^{\mathbb{N}}$, переводит меру $\mu^{\mathbb{N}}$ на $X^{\mathbb{N}}$ в продакт-меру $d_f^{\mathbb{N}}$ на $R^{\mathbb{N}}$. Поэтому матричное распределение D_f играет такую же роль, как произведение $d_f^{\mathbb{N}}$ для случая одной переменной, но структура матричного распределения D_f гораздо сложнее, чем структура продакт-меры $d_f^{\mathbb{N}}$ в $R^{\mathbb{N}}$.

Во всем дальнейшем бесконечная симметрическая группа финитных подстановок натурального ряда $S_{\mathbb{N}}$ играет основную роль. Очевидно, что мера $d_f^{\mathbb{N}}$ является $S_{\mathbb{N}}$-инвариантной и эргодичной, а теорема де Финетти утверждает, что все такие меры появляются из этой конструкции с измеримой функцией. Для классификации функций k переменных существенна k-я степень этой группы, для $k = 2$ это $S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$. Действие этой группы на пространстве матриц было определено выше.

Лемма 2. *Для всякой измеримой функции f матричное распределение D_f является $S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$-инвариантной эргодической мерой на пространстве матриц $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$.*

Доказательство. Мера $(\mu \times \nu)^{\mathbb{N}}$ на пространстве $(X \times Y)^{\mathbb{N}}$, очевидно, инвариантна и эргодична по отношению к действию группы на прообразе, а отображение F_f коммутирует с ее действием на образе и прообразе. $\square$

Однако, в отличие от случая одной переменной, аналог теоремы де Финетти уже не верен, и не все инвариантные эргодические меры появляются как матричные распределения (см. далее).

Напомним другое очевидное свойство матричного распределения, как и любой $S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$-инвариантной эргодической меры, отмечавшееся в литературе (см. [1]):

Замечание 1. Две координаты матрицы с дизъюнктными индексами (i, j) и (i_1, j_1), где $i \neq i_1$, $j \neq j_1$, независимы как функции на пространстве с мерой $(\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R), D_f)$. Более того, два дизъюнктных массива $\{r_{i,j}\}_{i,j<N}$ и $\{r_{i,j}\}_{i,j\geqslant N}$ независимы при всех натуральных N.

Это свойство вытекает из определения матричного распределения, но также следует из теоремы де Финетти для произвольных $S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$-инвариантных эргодических мер (см. далее). С технической точки зрения иногда более удобно использовать односторонние сдвиги на пространстве матриц вместо действия группы $S_{\mathbb{N}}$.

Определение 3. Мера на $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$ называется *стационарной*, если она инвариантна относительно горизонтального и вертикального сдвигов: горизонтальный сдвиг H убивает первый столбец, а вертикальный сдвиг V — первую строку: $\{H(r)\}_{i,j} = r_{i,j+1}$, $\{V(r)\}_{i,j} = r_{i+1,j}$.

Стоит упомянуть, что во всех наших рассмотрениях вместо пространства матриц $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$ можно рассматривать пространство $\mathbf{M}_{\mathbb{Z}}(R)$ матриц с четырьмя бесконечностями: $\mathbf{M}_{\mathbb{Z}}(R) = \{\{r_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}\}$. В терминах функций это означает, что нумерация последовательностей аргументов также двусторонняя: $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и вместо полугруппы сдвигов в этом случае действует группа двусторонних сдвигов, что иногда удобнее.

Лемма 3. *Каждая $S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$-инвариантная мера на пространстве $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$ является стационарной мерой. Действие $S_{\mathbb{N}}$ на множестве строк* (*столбцов*) *эргодично тогда и только тогда, когда эргодичен вертикальный* (*соответственно горизонтальный*) *сдвиг.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $\{r_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ как последовательность столбцов $\{\bar{r}\}_{i=1}^{\infty}$, где $\bar{r}_i$ есть i-й столбец матрицы $\{r_{i,j}\}$. Таким образом, мы имеем случайную *последовательность* столбцов; применим к ней теорему де Финетти, которая утверждает, что $S_{\mathbb{N}}$-инвариантная мера на пространстве последовательностей с любыми значениями (в нашем случае со значениями из $R^{\mathbb{N}}$) есть смесь продакт-мер, которые, таким образом, инвариантны относительно горизонтального сдвига. То же верно для строк и вертикального сдвига. Значит, мера стационарна. Утверждение об эргодичности становится очевидным. $\square$

Замечание 2. Вертикальный и горизонтальный сдвиги в пространстве матриц, снабженных матричным распределением, являются бернуллиевскими, так как являются факторами сдвига Бернулли в пространствах $(X \times Y, \mu \times \nu)^{\mathbb{N}}$ (вертикальный сдвиг есть факторсдвиг сдвига в $(X, \mu)^{\mathbb{N}}$, а горизонтальный сдвиг — в $(Y, \nu)^{\mathbb{N}}$).

Конечномерные матричные распределения, т. е. распределения любой конечной подматрицы, $\{f(x_i, y_j)\}_{i,j=1}^{n}$, где $\{(x_i, y_j)\}_{i,j=1}^{n}$ есть конечная последовательность независимых точек пространства $X \times Y$ с распределением $\mu \times \nu$, разумеется, также являются метрическими инвариантами измеримой функции $f(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, а их совокупность по всем n определяет матричное распределение. Явное вычисление этих конечномерных распределений и изучение свойств случайных конечных матриц (средние, спектр, сходимость и пр.) для тех или иных классов функций (например, для метрик или гладких функций) представляют большой интерес.

3.2. Матричное распределение — полный инвариант метрического изоморфизма чистых функций. Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 2 (классификация измеримых функций двух переменных). *Матричное распределение как мера D_f в $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ (т. е. как случайная бесконечная матрица) есть полный инвариант метрического изоморфизма чистых измеримых функций. Иными словами,*

1) *если две (не обязательно чистые) измеримые функции f_1 и f_2 изоморфны, то $D_{f_1} = D_{f_2}$;*

2) *если две чистые измеримые функции f_1, f_2, заданные на пространствах $(X_1 \times Y_1, \mu_1 \times \nu_1)$ и $(X_2 \times Y_2, \mu_2 \times \nu_2)$ соответственно, принимают значения в борелевском пространстве R и имеют равные матричные распределения, $D_{f_1} = D_{f_2}$ (равенство понимается как равенство мер на пространстве матриц $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$), то f_1 и f_2 метрически изоморфны, т. е. существуют такие сохраняющие меру преобразования S_1, S_2, где $S_1\colon (X_1, \mu_1) \to (X_2, \mu_2)$ и $S_2\colon (Y_1, \nu_1) \to (Y_2, \nu_2)$, что $f_2(x, y) = f_1(S_1 x, S_2 y)$ для почти всех $(x, y) \in (X_2 \times Y_2)$.*

В частности, матричные распределения однозначно параметризуют орбиты действия прямого произведения групп $\mathscr{A}(X, \mu) \times \mathscr{A}(Y, \nu)$ в пространстве чистых измеримых функций, заданных на $(X \times Y, \mu \times \nu)$.

Сначала докажем очевидный п. 1).

Доказательство п. 1). Пусть две (не обязательно чистые) функции заданы на пространствах $(X_1 \times Y_1, \mu_1 \times \nu_1)$ и $(X_2 \times Y_2, \mu_2 \times \nu_2)$ соответственно и существуют два таких обратимых сохраняющих меры преобразования $S_1\colon X_1 \to X_2$ и $S_2\colon Y_1 \to Y_2$, что $f_2(\,\cdot\,,\,\cdot\,) = f_1(T\,\cdot\,, S\,\cdot\,)$; тогда преобразование $(S_1 \times S_2)^{\mathbb{N}}$ переводит $(X_1 \times Y_1)^{\mathbb{N}}$ в $(X_2 \times Y_2)^{\mathbb{N}}$, а меру $(\mu_1 \times \nu_1)^{\mathbb{N}}$ в меру $(\mu_2 \times \nu_2)^{\mathbb{N}}$. Поэтому преобразование $(S_1 \times S_2)^{\mathbb{N}}$ осуществляет эквивалентность отображений $F_{f_1}\colon (X_1 \times Y_1) \to \mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$ и $F_{f_2}\colon (X_2 \times Y_2) \to \mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$ (как функций «одного» аргумента), и, следовательно, эти функции имеют одинаковые распределения D_{f_1} и D_{f_2} как меры в $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$.

Доказательство основного п. 2) начнем со следующего простого, но важного утверждения о чистых функциях.

Определим сначала в пространстве $R^{\mathbb{N}}$ базис, состоящий из цилиндрических множеств, следующим образом. Пусть $\{C_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ — счетный базис алгебры борелевских множеств пространства R^n, $n = 1, \ldots$; каждому множеству $C_{n,k}$ сопоставим цилиндрическое множество $\bar{C}_{n,k}$, состоящее из тех бесконечных последовательностей элементов из R, начальный n-фрагмент которых лежит в множестве $C_{n,k}$. Система множеств $\mathscr{C} \equiv \{\bar{C}_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$ образует фиксированный базис борелевских множеств в $R^{\mathbb{N}}$. Пусть f — чистая функция по отношению ко второму (первому) аргументу, заданная на пространстве $(X \times Y, \mu \times \nu)$.

Лемма 4. *Для почти всех по отношению к мере* $\mu^{\mathbb{N}}$ *последовательностей* $\{x_i\}_1^{\infty}$ (*соответственно* $\{y_j\}_1^{\infty}$) *система измеримых подмножеств пространства* (Y, ν), *определяемая как* $B_{n,k}^2 = \{y : \{f(x_i, y)\}_{i=1}^n \in C_{n,k}\}$ (*соответственно* $B_{n,p}^1 = \{x : \{f(x, y_j)\}_{j=1}^n \in C_{n,p}\}$), *является базисом сигма-алгебры всех измеримых множеств* $\mathscr{B}_Y$ *в* (Y, ν) (*соответственно* $\mathscr{B}_X$ *в* (X, μ)). *Следовательно, для почти всех последовательностей* $\{(x_i, y_j)\}$ *семейство множеств* $\{B_{n,p}^1 \times B_{m,k}^2\}_{\{n,p,m,k\}}$ *есть базис пространства* $(X \times Y, \mu \times \nu)$.

Доказательство. Рассмотрим сигма-алгебру $\mathscr{B}_n$, порожденную всеми множествами $B_{n,k}$, введенными выше, для фиксированного n, и соответствующее ей подпространство $\mathscr{F}_n$ измеримых функций на (Y, ν), которые измеримы относительно этой сигма-алгебры. Пусть семейство всех функций из объединения $\mathscr{F} = \bigcup_n \mathscr{F}_n$ не разделяет точек пространства (Y, ν). Это означает, что разбиение на уровни постоянства всех функций из $\mathscr{F}$ не является разбиением на отдельные точки $(\mathrm{mod}\, 0)$. Рассмотрим какие-либо две точки y_1, y_2, лежащие в одном элементе этого разбиения. Тогда из определения множеств $B_{n,k}$ и того факта, что $\{C_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ есть базис в алгебре всех борелевских множеств пространства $\mathbb{R}^n$, вытекает, что

$$f(x_i, y_1) = f(x_i, y_2)$$

для всех $i = 1, \ldots$. В то же время, если это выполнено для $\mu^{\mathbb{N}}$-почти всех последовательностей $\{x_i\}$, то равенство $f(x, y_1) = f(x, y_2)$ должно выполняться для почти всех x. Действительно, если соотношение $f(x, y_1) \neq f(x, y_2)$ имеет место на множестве положительной меры в (X, μ), то по эргодической теореме оно должно выполняться для некоторых x_i, где i пробегает множество положительной плотности в множестве всех натуральных чисел для $\mu^{\mathbb{N}}$-почти всех последовательностей $\{x_i\}$. Но поскольку функция f чистая, то равенство $f(x, y_1) = f(x, y_2)$ не может выполняться почти всюду по x для различных y_1 и y_2. Поэтому и исходное предположение $f(x_i, y_1) = f(x_i, y_2)$ может осуществляться только на множестве последовательностей $\{x_i\}$ нулевой меры $\mu^{\mathbb{N}}$. Поэтому для почти всех таких последовательностей функции из $\mathscr{F}$ разделяют точки пространства (Y, ν) и, следовательно, система измеримых множеств $B_{n,k}$ есть базис сигма-алгебры всех измеримых множеств пространства (Y, ν). Аналогичное утверждение верно и для пространства (X, μ) и, тем самым, для $(X \times Y, \mu \times \nu)$. □

Следствие 1. *Если* f — *чистая функция, то для почти всех последовательностей* $\{x_i\}$ ($\{y_j\}$) *ограничение отображения* F_f *на подмножество* (*точнее, на элементы соответствующего разбиения*) $\{x_i\} \times Y^{\mathbb{N}}$ ($X^{\mathbb{N}} \times \{y_j\}$) *является изоморфизмом* $(\mathrm{mod}\, 0)$. *В то же время отображение* F_f *может и не быть изоморфизмом всего пространства* $(X \times Y, \mu \times \nu)^{\mathbb{N}}$ *на* $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$.

Теперь мы можем закончить доказательство п. 2) теоремы и доказать, что матричное распределение D_f есть полный инвариант метрического изоморфизма функций.

Доказательство п. 2). Предположим, что у двух чистых измеримых функций f_1 и f_2 матричные распределения совпадают, $D_{f_1} = D_{f_2}$; мы должны построить изоморфизмы $S_1\colon (X^1, \mu^1) \to (X^2, \mu^2)$ и $S_2\colon (Y^1, \nu^1) \to (Y^2, \nu^2)$ пространств, на которых заданы функции, так, чтобы $f_2(x, y) = f_1(S_1 x, S_2 y)$ для почти всех $(x, y) \in X^2 \times Y^2$.

Обозначим для краткости через $D = D_{f_1} = D_{f_2}$ матричное распределение как меру на $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$.

Изоморфизм будет определяться с помощью биекции базисов соответствующих пространств с мерой; поэтому нам достаточно установить соответствие между базисом любого из пространств $(X^s \times Y^s, \mu^s \times \nu^s)$, $s = 1, 2$, и базисом некоторого третьего пространства. Иначе говоря, мы построим изоморфизм произвольной чистой функции f, заданной на пространстве $(X \times Y, \mu \times \nu)$, с матричным распределением D и определяемой далее *канонической модели измеримой функции с заданным матричным распределением на пространстве* $R^{\mathbb{N}} \times R^{\mathbb{N}}$*, снабженном некоторой продакт-мерой, определенной ниже.*

Выберем матрицу $\{r_{i,j}\}$ из некоторого множества полной D-меры. Таким образом, $r_{i,j} = f_1(x_i, y_j)$, где $\{x_i\} \in X^{\mathbb{N}}$, $\{y_j\} \in Y^{\mathbb{N}}$, принадлежат соответствующему множеству полной продакт-меры. Наши изоморфизмы будут зависеть от выбора этой матрицы (т. е. от выбора последовательностей $\{x\}$ и $\{y\}$). По доказанной лемме 4 (см. также следствие 1) для чистых функций система множеств $\{B^1_{n,p} \times B^2_{m,k}\}_{\{n,p,m,k\}}$ образует базис пространства $(X, \mu) \times (Y, \nu)$, который определяется с помощью борелевского базиса в пространстве $R^{\mathbb{N}}$: $B^2_{m,k} = \{y : \{f(x_i, y)\}_{i=1}^m \in C_{m,k}\}$ и $B^1_{n,p} = \{x : \{f(x, y_j)\}_{j=1}^n \in C_{n,p}\}$, где $\{C_{n,k}\}_{k=1}^\infty$ — множества из базиса борелевских множеств в пространстве R^n, $n = 1, \dots$. Видно, что базис $\{B^1_{n,p} \times B^2_{m,k}\}_{\{n,p,m,k\}}$ зависит от выбора матрицы $\{r_{i,j}\} = \{f(x_i, y_j)\}$.

А именно, мы определили отображения

$$L_{\{x_i\}}\colon (Y, \nu) \to (R^{\mathbb{N}}, \nu_{\{x_i\}}), \qquad L_{\{x_i\}}(y) = \{f(x_i, y)\}_{i \in \mathbb{N}},$$

соответственно

$$L_{\{y_j\}}\colon (X, \mu) \to (R^{\mathbb{N}}, \mu_{\{y_j\}}), \qquad L_{\{y_j\}}(x) = \{f(x, y_j)\}_{j \in \mathbb{N}},$$

и, тем самым, отображения

$$\begin{aligned} L_{\{y_j\}} \times L_{\{x_i\}} &: (X \times Y, \mu \times \nu) \to (R^{\mathbb{N}} \times R^{\mathbb{N}}, \mu_{\{y_j\}} \times \nu_{\{x_i\}}), \\ & L_{\{y_j\}} \times L_{\{x_i\}}(x, y) = (\{f(x, y_j)\}, \{f(x_i, y)\}). \end{aligned}$$

Интерпретация мер $\nu_{\{x_i\}}$ и $\mu_{\{y_j\}}$ как мер на $R^{\mathbb{N}}$ очень проста — это совместные распределения бесконечных последовательностей значений $\{f(x_i, y)\}$ и $\{f(x, y_j)\}$, т. е. распределение строки и столбца матрицы соответственно. Свяжем эти меры с матрицей r более прямо. Определим две системы подмножеств натуральных чисел из $\mathbb{N}$

$$N^2_{n,k} = \{m \in \mathbb{N} : \{r_{i,m} = f(x_i, y_m)\}_{i=1}^n \in C_{n,k}\} = \{m \in \mathbb{N} : y_m \in B^2_{n,k}\},$$
$$N^1_{n,p} = \{m \in \mathbb{N} : \{r_{m,j} = f(x_m, y_j)\}_{j=1}^n \in C_{n,p}\} = \{m \in \mathbb{N} : x_m \in B^1_{n,p}\}.$$

С этого момента нам удобно считать пространством образов вещественную ось для того, чтобы применить эргодическую теорему; разумеется, этот технический момент не уменьшает общности — борелевский изоморфизм пространств $\mathbb{R}$ и R переносит доказательство на произвольное стандартное пространство. По той же причине мы будем считать, что функция суммируема, — это также не ограничивает общности, поскольку можно изменить область значений, считая ее отрезком, а функцию считать ограниченной.

Применим эргодическую теорему к полугруппе вертикальных и горизонтальных сдвигов. По эргодической теореме для почти всех двухиндексных последовательностей $\{(x_i, y_j)\}$ пространства $(X \times Y)^{\mathbb{N}}$ (и, следовательно, для почти всех по мере D в $M_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ матриц $\{r_{i,j}\}$) следующие пределы (1) и (2) существуют:

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} T^{-1}|N^1_{n,k} \cap [0,T]| &= \mu(B^1_{n,k}) \equiv \mu_{\{y_j\}}(\bar{C}_{n,k}),\\ \lim_{T\to\infty} T^{-1}|N^2_{n,k} \cap [0,T]| &= \nu(B^2_{n,k}) \equiv \nu_{\{x_i\}}(\bar{C}_{n,k}),\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} T^{-2} \sum_{(i,j)\in W_T} f(x_i, y_j) &= \int_{B^1_{n,k}\times B^2_{n,p}} f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)\\ &\equiv \int_{\bar{C}^1_{n,k}\times \bar{C}^2_{n,p}} \bar{f}(\xi,\psi)\,d\mu_r(\xi)\,d\nu_r(\psi),\end{aligned} \tag{2}$$

где индекс суммирования (в левой части равенства) в формуле (2) пробегает все пары из множества $W_T = \{(i,j) : i,j = 1,\dots,T,\ i \in N^1_{n,k},\ j \in N^2_{n,p}\}$ (для краткости мы ввели обозначения $\mu_{\{y_j\}} = \mu_r$ и $\nu_{\{x_i\}} = \nu_r$).

Правые части в формуле (1) дают новое определение мер μ_r и ν_r как эмпирических мер, вычисленных по матрице r, на пространстве строк и столбцов, т. е. на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Рассмотрим меру $\mu_r \times \nu_r$ на пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Поскольку по лемме 4 семейство множеств $B^1_{n,k} \times B^2_{m,p}$ образует базис пространства $(X \times Y, \mu \times \nu)$, то формулы (1) определяют изоморфизм пространств с мерой $(X \times Y, \mu \times \nu)$ и $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \mu_r \times \nu_r)$, сохраняющий меру и структуру прямого произведения.

По той же причине в силу соотношений (2) интегралы от суммируемых функций f и $\bar{f}$ по совокупности базисных множеств однозначно $(\operatorname{mod} 0)$ определяют функции; поэтому обе функции метрически изоморфны и имеют по п. 1) теоремы 2 одинаковые матричные распределения. Легко написать явную формулу для функции $\bar{f}$ на пространстве $(R^{\mathbb{N}} \times R^{\mathbb{N}}, \mu_{\{y_j\}} \times \nu_{\{x_i\}})$, использующую, правда, исходную функцию f,

$$\bar{f}(\{f(x, y_j)\}_{j\in\mathbb{N}}, \{f(x_i, y)_{i\in\mathbb{N}}\}) = f(x,y),$$

из которой непосредственно ясен изоморфизм $(\operatorname{mod} 0)$ с функцией f и, тем самым, совпадение $D_{\bar{f}} = D_f$.

Таким образом, получен изоморфизм пространства с мерой $(X \times Y, \mu \times \nu)$ и построенного выше пространства $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mu_r \times \nu_r)$, который сохраняет все нужные структуры и переводит функцию f в функцию $\bar{f}$. Функция $\bar{f}$ построена по матрице r, и ее можно назвать *канонической моделью функции с данным матричным распределением*.

Эта модель и сам изоморфизм зависят от матрицы $\{r_{i,j} = f(x_i, y_j)\}$, т. е. от последовательностей $\{x_i\}$ и $\{y_j\}$, от которых требуется лишь существование пределов (1) и (2), что выполняется на множестве последовательностей полной меры. □

Замечание 3. Доказательство теоремы дословно переносится на случай симметрических функций. В этом случае, разумеется, $(X,\mu) = (Y,\nu)$, $x_i = y_i$, $i = 1,\dots$, а матрица r симметрична. В частности, доказана теорема о том, что полной системой инвариантов метрических троек (польских пространств с борелевской мерой) является матричное распределение расстояний (см. [4, 10]). Впрочем, в этом случае имеется более прямое доказательство (см. [10, 13]).

Приведенное построение канонической модели измеримой функции двух аргументов с заданным матричным распределением использовало лишь значения функции на типичной сетке, и, таким образом, *измеримая* функция восстановлена по счетному множеству значений. В этом построении существенно использовался тот факт, что r есть матрица значений некоторой измеримой функции (т. е. что r принадлежит носителю матричного распределения некоторой функции). Однако построение можно провести и в случае произвольной матрицы r[1)].

Аналогом матричного распределения для функций k независимых аргументов является мера в пространстве тензоров, определяемая точно так же, как при $k = 2$; в этом случае чистой называется функция, для которой тривиальным (т. е. разбиением на отдельные точки) будет разбиение множества значений любого набора из $k-1$ аргументов на классы, внутри каждого из которых ограничения функции на оставшийся k-й аргумент совпадают почти всюду (ср. определение чистоты для $k = 2$). Установленная теорема и ее доказательство полностью переносятся на чистые функции k аргументов: матричное распределение есть полный инвариант метрического изоморфизма функций.

3.3. Свойства матричных распределений как инвариантных мер на пространстве матриц. Мы начнем со свойств мер $\nu_{\{x_i\}}$ и $\mu_{\{y_j\}}$, введенных в доказательстве теоремы 2. Они задают распределение столбца (строки) матрицы r, т. е. фактически задают совместное распределение семейства (по i) функций от второго аргумента $\{f(x_i,\,\cdot\,)\}$ (или $\{f(\,\cdot\,,y_j)\}$).

Следующая формула дает два интегральных разложения матричного распределения D_f по этим (условным) распределениям строк и столбцов:

$$D_f = \int \nu_{\{x_i\}}\,d\mu^{\mathbb{N}}(\{x_i\}) = \int \mu_{\{y_j\}}\,d\nu^{\mathbb{N}}(\{y_j\}).$$

Эта формула есть прямое следствие определения матричного распределения и того факта, что меры $\nu_{\{x_i\}}$ и $\mu_{\{y_j\}}$ суть образы при отображении F_f (см. предыдущий раздел) мер $\nu^{\mathbb{N}}$ и $\mu^{\mathbb{N}}$, рассматриваемых как условные меры в $(X\times Y)^{\mathbb{N}}$ при фиксированных $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ или $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$. Следовательно, матричное распределение однозначно определяется системой мер $\nu_{\{x_i\}}$ вместе с мерой μ или системой

[1)] Иначе говоря, формулы (1) и (2) применимы и в случае произвольной инвариантной меры, а не только для матричных распределений, поскольку используют лишь эргодическую теорему для вертикального и горизонтального сдвигов. Рассмотрим матрицу r из множества полной меры λ на пространстве, для которой выполнены условия существования пределов (1) и (2). Формула (1) определяет две меры на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и продакт-меру на произведении $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, а формулу (2) можно рассматривать как определение еще одной, уже не обязательно вероятностной, меры на том же пространстве. Оказывается, что последняя мера является абсолютно непрерывной по первой мере, а производная Радона–Никодима есть измеримая функция двух переменных на том же пространстве, которая совпадает с построенной в доказательстве теоремы функцией $\bar f$ в случае матричного распределения. Например, если λ — продакт-мера, то эта производная есть постоянная функция.

$\mu_{\{y_j\}}$ и мерой ν. Общая точка зрения на эти формулы состоит в том, что меры $\nu_{\{x_i\}}$ следует рассматривать как меры, зависящие от случайного параметра — последовательности $\{x_i\}$, — распределение которого задается мерой $\mu^{\mathbb{N}}$. Каждая из мер $\nu_{\{x_i\}}$ на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ не является $S_{\mathbb{N}}$-инвариантной, но ансамбль всех этих мер $\nu_{\{x_i\}}$ с указанным распределением уже инвариантен и эргодичен *относительно действия* $S_{\mathbb{N}}$ *на пространстве мер*. Таким образом, задача об описании произвольных $S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$-инвариантных мер на матрицах сводится к «проблеме де Финетти второго порядка», а именно к описанию семейств случайных мер на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, инвариантных относительно действия группы $S_{\mathbb{N}}$ в пространстве борелевских вероятностных мер на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Заметим, кроме того, что из эргодической теоремы следует, что матричное распределение определяется уже одним типичным условным распределением $\nu_{\{x_i\}}$ или $\mu_{\{y_j\}}$.

Поставим вопрос, являются ли произвольными распределения $\nu_{\{x_i\}}$ и $\mu_{\{y_j\}}$, иначе говоря, какие ограничения налагает функция f на типичное семейство сечений?

Напомним определение расстояния d_ρ между двумя случайными величинами η, ζ со значениями в метрическом пространстве R с метрикой ρ:

$$d_\rho(\eta,\zeta) = \mathbf{E}\frac{\rho(\eta,\zeta)}{1+\rho(\eta,\zeta)}.$$

(Математическое ожидание берется по отношению к совместному распределению величин.) Мы применим это определение к случайным величинам со значениями в пространстве $L(Y,\nu)$ всех измеримых функций на пространстве (Y,ν) с произвольной метрикой, согласованной со сходимостью по мере.

Лемма 5. *Для $\mu^{\mathbb{N}}$-почти всякой последовательности $\{x_i\}$ последовательность функций от второго аргумента $\eta_i = f(x_i,\cdot)$ обладает следующим свойством: для любого $\delta > 0$ существуют такие n и множество натуральных чисел $N' \subset \mathbb{N}$ с плотностью, большей, чем δ, что для любого $m \in N'$*

$$\min_{i=1,\dots,n} d_\rho(\eta_m,\eta_i) \leqslant \delta.$$

Доказательство. Условие леммы есть некоторое условие компактности. Рассмотрим отображение $x \mapsto f(x,\cdot)$ как отображение в метрическое пространство $L(Y,\nu)$ измеримых функций второго аргумента. Образ меры μ в $L(Y,\nu)$, как и всякая мера в полном метрическом пространстве, сосредоточен с точностью до произвольного $\delta > 0$ на компакте. Поэтому по $\mu^{\mathbb{N}}$-почти любой последовательности $\{x_i\}$ можно выбрать конечное число m номеров $i = 1,\dots,m$, образующих δ-сеть, так, что все x, за исключением попадающих в некоторое множество меры, меньшей δ, отстоят в метрике пространства измеримых функций от одного из x_i, $i = 1,\dots,m$, меньше, чем на δ. Остается еще раз применить эргодическую теорему. □

Продакт-мера $\prod_{i,j}\lambda_{i,j}$ в $M_{\mathbb{N}}(R)$ с одинаковыми сомножителями $\lambda_{i,j} \equiv \lambda$ (т. е. мера на пространстве матриц, относительно которой все элементы матрицы независимы и одинаковы распределены) не является матричным распределением никакой измеримой функции, хотя, конечно, она инвариантна и эргодична относительно действия группы $S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$.

Таким образом, инвариантность и эргодичность относительно раздельного (или одновременного для симметрических функций) действия группы перестановок строк и столбцов матрицы является лишь необходимым условием, однако их выполнения недостаточно.

Выделение класса матричных распределений в множестве всех инвариантных мер производится с помощью спецификации действия группы $S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$ (или $S_{\mathbb{N}}$ в симметрическом случае). Рассмотрим произвольную инвариантную меру λ в $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$ и действие подгрупп $S_{\mathbb{N}} \times 1$ и $1 \times S_{\mathbb{N}}$ группы $S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$ на пространстве $(\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R), \lambda)$. Действие всей группы является эргодическим, но в случае матричного распределения действие каждой из этих двух подгрупп эргодическим не является; равносильное утверждение — действие вертикального (V) и горизонтального (H) сдвигов неэргодично. Однако произведение разбиений на эргодические компоненты действий вертикального и горизонтального сдвигов есть разбиение на отдельные точки $(\operatorname{mod} 0)$.

Причина состоит в том, что разложение на эргодические компоненты действия этих подгрупп на пространстве $(X \times Y, \mu \times \nu)^{\mathbb{N}}$ есть разложение этого пространства в прямое произведение $(X, \mu)^{\mathbb{N}} \times (Y, \nu)^{\mathbb{N}}$, а отображение F_f сохраняет это свойство и в пространстве $(\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R), D_f)$ произведение образов этих разбиений по-прежнему есть разбиение на точки. Именно это свойство выделяет матричные распределения в классе всех инвариантных эргодических мер.

Теорема 3. *$S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$-инвариантная эргодическая мера λ в $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$ является матричным распределением тогда и только тогда, когда произведение разбиений на эргодические компоненты действия подгрупп $S_{\mathbb{N}} \times 1$ и $1 \times S_{\mathbb{N}}$ есть разбиение на отдельные точки* $(\operatorname{mod} 0)$.

В симметрическом случае группа $S_{\mathbb{N}}$ действует в пространстве симметрических матриц $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}^{\mathrm{symm}}(R)$, и в качестве подгрупп следует взять подгруппы $S_{N \setminus \{1,\dots,n\}}$, действующие подстановками столбцов на множестве всех прямоугольных подматриц, индексы элементов которых пробегают множества $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots$, снабженном проекцией меры λ. Если произведение разбиений на эргодические компоненты действия всех этих подгрупп есть разбиение на отдельные точки, то λ есть матричное распределение симметрической функции. Более подробно об этом см. в [12].

Противоположный случай состоит в том, что действие любой из указанных подгрупп эргодично; в этом случае λ есть продакт-мера. Это утверждение — простое следствие теоремы де Финетти.

Наконец, общий случай состоит в том, что действие описанных подгрупп неэргодично, но и условие теоремы не выполнено.

Теорема 4. *Действие группы $S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$ на пространстве $\mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$ с инвариантной эргодической мерой — это скрещенное произведение, база которого есть описанное выше действие с мерой — матричным распределением и слоями — продакт-мерами. Аналогичное утверждение верно для симметрического случая.*

Меры со свойством, сформулированным в теореме, называются *простыми*.

Мы не останавливаемся здесь на подробных доказательствах теорем 3 и 4. Теорема 4 уточняет теорему Олдоса [2] о том, что всякая инвариантная эргодическая мера есть образ произведения независимых мер при отображении

$\mathscr{F}_f\colon R^{\mathbb{N}} \times R^{\mathbb{N}} \times R^{\mathbb{N}^2} \to \mathbf{M}_{\mathbb{N}}(R)$, $(\{\xi_i\}_i, \{\phi_j\}_j, \{\psi_{i,j}\}_{i,j}) \mapsto \{f(\xi_i, \phi_j, \psi_{i,j})\}_{i,j}$, зависящем от некоторой измеримой функции f от *трех* аргументов. Мы вернемся к этому вопросу в другой работе.

Литература

1. *Aldous D.* Representations for partially exchangeable arrays of random variables. J. Multivariate Anal., **11**, No. 4, 581–598 (1981).
2. *Aldous D.* Exchangeability and related topics. In: Ecole d'ete de probabilites de Saint Flour, XIII–1983. Lect. Notes Math., Vol. 1117, Springer-Verlag, pp. 1–198.
3. *Clemens J., Gao S., Kechris A.* Polish metric spaces: their classification and isometry groups. Bull. Symbolic Logic, **7**, No. 3, 361–375 (2001).
4. *Gromov M.* Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces. Birkhauser, 1998.
5. *Kallenberg O.* Symmetries on random arrays and set-indexed processes. J. Theoret. Probab., **5**, No. 4, 727–765 (1992).
6. *Kallenberg O.* Random arrays and functionals with multivariate rotational symmetries. Probab. Theory Related Fields, **103**, No. 1, 91–141 (1995).
7. *Olshanski G., Vershik A.* Ergodic unitary invariant measures on the space of infinite Hermitian matrices. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 175, 137–175 (1996).
8. *Pickrell D.* Separable representations for automorphism groups of infinite symmetric spaces. J. Funct. Anal., **90**, 1–26 (1990).
9. *Рохлин В. А.* Метрическая классификация измеримых функций. УМН, **12**, вып. 2, 169–174 (1957).
10. *Вершик А. М.* Универсальные пространства Урысона, тройки Громова и случайные метрики на рядах натуральных чисел. УМН, **53**, вып. 5, 57–64 (1998).
11. *Вершик А. М.* Описание инвариантных мер для действий некоторых бесконечномерных групп. ДАН СССР, **218**, №4, 749–752 (1974).
12. *Vershik A.* Classification of the Measurable Functions of Several Arguments and Invariant Measures on the Space of Matrices and Tensors. Preprint ESI (The Erwin Schroedinger International Institute fur Mathematical Physics), No. 1107 (2001), pp. 1–23.
13. *Vershik A.* The universe of the metric spaces and the universal Urysohn space. Preprint MPIM #8, 2002, math. GT/0203008; In: Fundamental Mathematics Today: 10 anniversary of Independent Moscow University, MCCME Publ., M., 2002.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова
Международный институт Э. Шрёдингера

Поступило в редакцию
26 декабря 2001 г.