УДК 517.951 МАТЕМАТИКА

А.С. МАКИН

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 15 IV 1985)

В настоящей работе устанавливаются точные по порядку оценки антиаприорного типа, связывающие L_2-нормы собственных и присоединенных функций произвольного гипоэллиптического оператора с постоянными коэффициентами, справедливые при любом значении спектрального параметра λ. Получены также достаточные условия сходимости в метрике L_2 спектральных разложений, отвечающих данному гипоэллиптическому оператору.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$(1) \qquad Lu = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha D^\alpha u, \qquad \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha| \neq 0,$$

заданный в произвольной области G пространства R^N. Коэффициенты a_α являются, вообще говоря, комплексными числами.

Следуя В.А. Ильину, под собственной функцией оператора (1), отвечающей комплексному собственному значению λ, будем понимать любую не равную тождественно нулю комплекснозначную функцию $\overset{0}{u}(x)$ из класса $L_2(G)$, которая внутри G принадлежит классу $C^{(m)}$ и является решением уравнения $L\overset{0}{u} + \lambda\overset{0}{u} = 0$.

Аналогично, под присоединенной функцией порядка l, $l = 1, 2, \ldots$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{0}{u}(x)$, будем понимать любую комплекснозначную функцию $\overset{l}{u}(x)$ из класса $L_2(G)$, которая внутри G принадлежит классу $C^{(m)}$ и является решением уравнения $L\overset{l}{u} + \lambda\overset{l}{u} = \overset{l-1}{u}$.

Краевые условия, которым удовлетворяют собственные и присоединенные функции, совершенно произвольны.

Обозначим через $L(\xi)$ символ оператора (1),

$$L(e^{i(x,\xi)}) = L(\xi)e^{i(x,\xi)},$$

где ξ – произвольный вещественный вектор.

Пусть оператор (1) является гипоэллиптическим, т.е.

$$\frac{|\operatorname{grad} L(\xi)|}{L(\xi)} \to 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty.$$

Тогда (см. [1]) существует такая постоянная $b > 0$, что для некоторой постоянной $C > 0$

$$|\operatorname{grad} L(\xi)|^2 \leqslant C^2(1 + |L(\xi)|)^{2(1-b)}$$

и существует наибольшее b, обладающее этим свойством, которое мы обозначим символом ϵ.

Теорема 1. *Для любых компактов K и K' области G, первый из которых содержится строго внутри второго, любого комплексного λ и любого номера i, $i \geqslant 0$, справедливо неравенство*

$$(2) \qquad \|\overset{i}{u}\|_{L_2(K)} \leqslant C(K, K', i)(|\lambda| + 1)^{1-\epsilon}\|\overset{i+1}{u}\|_{L_2(K')}.$$

Известно, что $0 < \epsilon \leqslant 1/m$. Для эллиптических и параболических операторов $\epsilon = 1/m$. Оценка (2) является точной по порядку. Для доказательства последнего утверждения рассмотрим функцию

$$M(R) = \sup_{|L(\xi)|=R} |\operatorname{grad} L(\xi)|.$$

В [1] показано, что $M(R) = cR^{1-\epsilon}(1 + o(1))$, где $c \neq 0$. Пусть последовательность $R_n \to \infty$. Тогда существует последовательность векторов ξ_n такая, что

$$|L(\xi_n)| = R_n \quad \text{и} \quad |\operatorname{grad} L(\xi_n)| = M(R_n).$$

Для каждого номера n выберем (переходя, возможно, к подпоследовательности) такой индекс k, что

$$\left| \frac{\partial L(\xi_n)}{\partial \xi_k} \right| \geqslant |\operatorname{grad} L(\xi_n)|/N.$$

Рассмотрим функции

$$\overset{0}{u}_n(x) = e^{i(\xi_n, x)},$$

$$\overset{1}{u}_n(x) = x_k \overset{0}{u}_n(x) \Big/ \frac{\partial L(\xi_n)}{\partial \xi_k}.$$

Очевидно, справедливы равенства

$$L\overset{0}{u}_n + \lambda_n \overset{0}{u}_n = 0, \qquad L\overset{1}{u}_n + \lambda_n \overset{1}{u}_n = \overset{0}{u}_n,$$

где $\lambda_n = -L(\xi_n)$. Пусть $K = \prod_{i=1}^{N} \{-1 \leqslant x_i \leqslant 1\}$, $K' = \prod_{i=1}^{N} \{-2 \leqslant x_i \leqslant 2\}$. Легко проверить, что, начиная с некоторого номера n,

$$\|\overset{0}{u}_n\|_{L_2(K)} / \|\overset{1}{u}_n\|_{L_2(K')} \geqslant c_1 |L(\xi_n)|^{1-\epsilon} = c_1 |\lambda_n|^{1-\epsilon},$$

где $c_1 > 0$, c_1 не зависит от n.

Отметим, что впервые оценки антиаприорного типа, аналогичные неравенству (2), установлены В.А. Ильиным в работах [2, 3]. В работе [2] для обыкновенного дифференциального оператора

$$Lu = u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)u' + p_n(x)u$$

получена оценка

$$\|\overset{i}{u}\|_{L_2(K)} \leqslant C(K, K', i)(|\lambda|^{(n-1)/n} + 1)\|\overset{i+1}{u}\|_{L_2(K')}.$$

В работе [3] для общего эллиптического оператора второго порядка

$$(3) \qquad Lu = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right] + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

В.А. Ильин доказал неравенство

$$(4) \qquad \|\overset{i}{u}\|_{L_2(K)} \leqslant C(K, K', i)\sqrt{1 + |\lambda|}\,\|\overset{i+1}{u}\|_{L_2(K')}.$$

Для собственных и присоединенных функций оператора теплопроводности оценка (4) установлена Н.Ю. Капустиным в работе [6]. В [2, 3, 6] накладывались некоторые ограничения на область изменения спектрального параметра λ. Справедливость оценки (4) для оператора (3) при любом значении λ была доказана в ра-

боте [7]. Для эллиптического оператора порядка $2m$ с самосопряженной главной частью Н.Ю. Капустин и А.С. Макин в работе [8] установили неравенство

$$\| \overset{i}{u} \|_{L_2(K)} \leqslant C(K, K', i)(|\lambda|^{(2m-1)/2m} + 1) \| \overset{i+1}{u} \|_{L_2(K')}.$$

Н.Ю. Капустин сообщил, что им доказана оценка (4) для общего параболического оператора второго порядка. Получению оценок антиаприорного типа посвящены также работы [4, 9]. Таким образом, теорема 1 является обобщением указанных результатов в случае оператора с постоянными коэффициентами.

Как и в работе В.А. Ильина [5], рассмотрим произвольную полную в $L_2(G)$ и минимальную систему $\{u_n\}$ собственных и присоединенных функций оператора (1) такую, что вместе с каждой присоединенной функцией порядка $i \geqslant 1$ эта система включает в себя соответствующие ей собственную функцию и все присоединенные функции меньшего порядка. Тогда существует, и притом единственная, биортогонально сопряженная к ней в $L_2(G)$ система $\{v_n\}$.

Считая, что числа $|\lambda_n|$ не имеют конечных точек сгущения, мы можем для каждой функции $f(x)$ из класса $L_2(G)$ составить спектральное разложение ее в биортогональный ряд:

$$(5) \qquad \sigma_\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_n| < \lambda} (f, v_n) u_n(x).$$

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие пять условий*:

1) *система* $\{v_n\}$, *биортогонально сопряженная к системе* $\{u_n\}$, *состоит из собственных и присоединенных функций оператора* $L^* v$, *формально сопряженного к оператору* (1) *в области* G;

2) *для любого компакта* K *области* G *существует постоянная* $C(K)$ *такая, что для любого номера* n *справедливо неравенство*

$$\| u_n \|_{L_2(G)} \cdot \| v_n \|_{L_2(K)} \leqslant C(K);$$

3) *ранг присоединенных функций системы* $\{v_n\}$ *равномерно ограничен*;

4) *для некоторого* $s > 0$ *и произвольного* $\lambda > 0$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{|\lambda_n| \leqslant \lambda} 1 \leqslant M \lambda^s;$$

5) *функция* $f(x)$ *имеет в области* G *компактный носитель и для некоторого номера* $p > s$ *принадлежит классу С.Л. Соболева* $W_2^{mp}(G)$.

При выполнении этих условий спектральное разложение (5) *сходится при* $\lambda \to \infty$ *в метрике* $L_2(G)$ *к функции* $f(x)$.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству первого утверждения основной теоремы работы [5].

Автор выражает глубокую благодарность проф. А.А. Дезину за постановку задачи, проф. В.А. Ильину и чл.-корр. АН СССР А.В. Бицадзе за внимание к настоящей работе.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
30 IV 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hörmander L.* – Comm. Pure and Appl. Math., 1958, vol. 11, № 2, p. 197–218. 2. *Ильин В.А.* – Дифференц. уравнения, 1980, т. 16, № 5, с. 771–794. 3. *Ильин В.А.* – Там же, 1982, т. 18, № 1, с. 30–37. 4. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* – Там же, 1981, т. 17, № 10, с. 1859–1867. 5. *Ильин В.А.* – ДАН, 1984, т. 274, № 1, с. 19–22. 6. *Капустин Н.Ю.* – Дифференц. уравнения, 1984, т. 20, № 1, с. 41–45. 7. *Капустин Н.Ю.* – ДАН, 1984, т. 277, № 4, с. 791–794. 8. *Капустин Н.Ю., Макин А.С.* – Дифференц. уравнения, 1985, т. 21, № 1, с. 58–65. 9. *Макин А.С.* – ДАН, 1983, т. 269, № 2, с. 281–284.