С. С. Марченков, Об одном базисе по суперпозиции в классе функций, элементарных по Кальмару,
Матем. заметки, 1980, том 27, выпуск 3, 321–332

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 3 (1980)

ОБ ОДНОМ БАЗИСЕ ПО СУПЕРПОЗИЦИИ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПО КАЛЬМАРУ

С. С. Марченков

Одно из определений класса K элементарных по Кальмару функций таково (см. [1]): класс K — это наименьший класс функций, содержащий функции $x+1$, $x+y$, $x \dot{-} y$ и замкнутый относительно суперпозиции, ограниченного суммирования $\sum_{i \leqslant x} f(i, \tilde{y})$ и ограниченного произведения $\prod_{i \leqslant x} f(i, \tilde{y})$. Под суперпозицией в этой заметке мы понимаем собственно подстановку функций в функцию, а также перестановку, отождествление переменных и введение фиктивных переменных. А. Гжегорчик сформулировал среди других следующий вопрос: можно ли при получении класса K ограничиться конечным числом исходных функций и одной лишь операцией суперпозиции (см. [1, проблема 8]). Положительный ответ на этот вопрос дал Д. Рёддинг [2]. Позже Ч. Парсонс [3] выписал в явном виде систему из 19 элементарных функций, суперпозиции которых порождают весь класс K. Наиболее сложные функции этой системы представляют «двухэтажные» ограниченные произведения некоторых последовательностей, составленных из степеней простых чисел. Основываясь на результатах Ю. В. Матиясевича [4], [5], мы приводим две более простые системы, состоящие каждая из четырех элементарных функций. Одна из них порождает весь класс K, относительно другой нам удалось лишь доказать, что она порождает все элементарные по Кальмару функции, принимающие конечное число значений.

Обозначим через $\left[\frac{x}{y}\right]$ элементарную по Кальмару функцию, равную целой части от деления x на y, если $y > 0$, и равную нулю, если $y = 0$. Для функции x^y, элементарной по Кальмару, полагаем $0^0 = 0$. Через $\varphi(x, y)$ обозначим функцию, равную при $x > 1$ наименьшему номеру нулевого разряда в представлении числа y в позиционной системе счисления с основанием x и равную 0 при $x \leqslant 1$. Иными словами, если $x > 1$ и $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$, то $\varphi(x, y)$ есть наименьшее i, для которого $a_i = 0$. Будем считать, что ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ бесконечен, так что при $x > 1$ значение $\varphi(x, y)$ определено для любого y и не превосходит величины $[\log_x(y + 1)] + 1$. Легко проверить, что так определенная функция $\varphi(x, y)$ принадлежит классу K.

Пусть $M = \{x + 1, x \dot{-} y, \left[\frac{x}{y}\right], x^y\}$. Через $[M]$ обозначим множество функций, реализуемых суперпозициями над системой M. Будем говорить, что отношение (предикат) $R(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит классу K (или классу $[M]$), если классу K (соответственно классу $[M]$) принадлежит характеристическая функция отношения (предиката) $R(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $\binom{x}{y}$ обозначает функцию, равную числу сочетаний из x по y при $x \geqslant y > 0$, равную 1 при $y = 0$ и равную 0 в остальных случаях. Пусть, далее, $x \mid y$ — предикат «x делит y».

ЛЕММА 1. *Функции $x + y$, xy, $\binom{x}{y}$ и предикат $x \mid y$ принадлежит классу $[M]$.*

Доказательство. Имеем

$$x + y = (x + 2)^{y+2} \dot{-} (((x + 2)^{y+2} \dot{-} x) \dot{-} y),$$

$$xy = \left[\frac{((x + y)^2 \dot{-} x^2) \dot{-} y^2}{2}\right].$$

Как в книге [6], рассмотрим при $x \geqslant y$ и $u > 2^x$ выражение $\left[\frac{(u+1)^x}{u^y}\right]$. Имеем при этих ограничениях $\left[\frac{(u+1)^x}{u^y}\right] = u^{x-y} + \binom{x}{1} u^{x-y-1} + \ldots + \binom{x}{x-y}$. Так как $\binom{x}{x-y} = \binom{x}{y}$, то $\binom{x}{y} = \mathrm{rm}\left(\left[\frac{(2^{x+1}+1)^x}{(2^{x+1})^y}\right], 2^{x+1}\right)$, где $\mathrm{rm}(s, t)$ — остаток от деления s на t. Последнюю функцию легко получить из функций $\left[\frac{x}{y}\right]$, $x \dot{-} y$, xy. Именно, $\mathrm{rm}(s, t) = s \dot{-} t\left[\frac{s}{t}\right]$. В качестве характеристической функции предиката $x \mid y$ можно взять $1 \dot{-} \mathrm{rm}(y, x)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть $i_0, \ldots, i_m$ — фиксированные натуральные числа и*

$$\Phi(x, z, v) = \sum_{y_0 \leqslant x, \ldots, y_m \leqslant x} y_0^{i_0} \cdot \ldots \cdot y_m^{i_m} \cdot z^{y_0 + y_1 v + \ldots + y_m v^m}.$$

Тогда функция Φ принадлежит классу $[M]$.

Доказательство. Так как, по определению, $0^0 = 0$, то $\Phi(x, 0, v) = 0$. При $z = 1$ получаем

$$\Phi(x, 1, v) = \sum_{y_0 \leqslant x, \ldots, y_m \leqslant x} y_0^{i_0} \cdot \ldots \cdot y_m^{i_m} =$$

$$= \sum_{y_1 \leqslant x, \ldots, y_m \leqslant x} y_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot y_m^{i_m} \cdot \sum_{y_0 \leqslant x} y_0^{i_0}.$$

Формулы для сумм вида $\sum_{y_0 \leqslant x} y_0^{i_0}$ хорошо известны. Они имеют вид $\frac{P(x)}{q}$, где $P(x)$ — полином с целыми коэффициентами, а q — натуральное число. Так как значение суммы $\sum_{y_0 \leqslant x} y_0^{i_0}$ является целым неотрицательным числом, то вычитание в полиноме $P(x)$ и деление на q можно произвести в области целых неотрицательных чисел. Иными словами, функцию $\frac{P(x)}{q}$ можно определить формулой вида $\left[\frac{Q_1(x) \dot{-} Q_2(x)}{q}\right]$, где $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ — полиномы с целыми неотрицательными коэффициентами. В силу леммы 1 полиномы Q_1, Q_2 принадлежат классу $[M]$. Поэтому любая сумма вида $\sum_{y_0 \leqslant x} y_0^{i_0}$ также определяется подходящей функцией из $[M]$. Ясно, что итоговое выражение для $\Phi(x, 1, v)$ будет являться произведением подобных функций из $[M]$. Пусть $z > 1$. Имеем

$$\Phi(x, z, v) =$$

$$= \sum_{y_0 \leqslant x, \ldots, y_m \leqslant x} y_0^{i_0} \cdot \ldots \cdot y_m^{i_m} \cdot z^{y_0 + y_1 \cdot v + \ldots + y_m v^m} =$$

$$= \sum_{y_1 \leqslant x, \ldots, y_m \leqslant x} y_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot y_m^{i_m} \cdot z^{y_1 \cdot v + \ldots + y_m \cdot v^m} \cdot \sum_{y_0 \leqslant x} y_0^{i_0} \cdot z^{y_0}.$$

Формулу над M для суммы $\sum_{y_0 \leqslant x} y_0^{i_0} \cdot z^{y_0}$ можно получить стандартными методами, дифференцируя i_0 раз по z тождество

$$\sum_{j\leqslant x+i_0} z^j = \frac{z^{x+i_0+1}-1}{z-1}$$

и учитывая, что в возникающей при этом рекуррентной формуле для $\sum_{y_0\leqslant x} y_0^{i_0}\cdot z^{y_0}$ вычитания и деления можно произвести в пределах целых неотрицательных чисел. Если теперь обозначить $\Phi_1(x, z) = \sum_{y_0\leqslant x} y_0^{i_0}\cdot z^{y_0}$, то будем иметь

$$\Phi(x, z, v) =$$

$$= \sum_{y_1\leqslant x, \ldots, y_m\leqslant x} y_1^{i_1}\cdot \ldots \cdot y_m^{i_m}\cdot z^{y_1\cdot v+\ldots+y_m\cdot v^m}\cdot\Phi_1(x, z) =$$

$$= \Phi_1(x, z)\cdot\sum_{y_2\leqslant x, \ldots, y_m\leqslant x} y_2^{i_2}\cdot \ldots \cdot y_m^{i_m}\cdot z^{y_2\cdot v^2+\ldots+y_m\cdot v^m}\cdot$$

$$\cdot\sum_{y_1\leqslant x} y_1^{i_1}\cdot z^{y_1\cdot v}.$$

Таким образом, мы приходим к вычислению суммы $\sum_{y_1\leqslant x} y_1^{i_1}\cdot(z^v)^{y_1}$ рассмотренного выше вида. Мы показали, что $\Phi(x, 1, v)$ и $\Phi(x, z, v)$ при $z > 1$ определяются функциями из класса $[M]$. Значит, классу $[M]$ принадлежит и функция

$$\Phi(x, z, v) = sg\, z\cdot(\overline{sg}\,(z \dot{-} 1)\cdot\Phi(x, 1, v) + sg\,(z \dot{-} 1)\cdot$$

$$\cdot\,\Phi(x, z, v)),$$

так как в силу леммы 1 ему принадлежат функции $x+y$, xy, а также функции $\overline{sg}\, z = 1 \dot{-} z$ и $sg\, z = \overline{sg}\,\overline{sg}\, z$. Лемма доказана.

Анализ доказательств Ю. В. Матиясевича [4], М. Дэвиса, Х. Патнема и Дж. Робинсон [7] показывает, что для произвольного отношения $R(x_1, \ldots, x_n)$ из класса K можно построить такой полином $P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ с целыми коэффициентами и элементарную по Кальмару функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$, что будет справедлива эквивалентность

$$R(x_1, \ldots, x_n) \equiv (\exists y_1)\ldots(\exists y_m)\ (P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots$$

$$\ldots, y_m) = 0),$$

причем переменные $y_1, \ldots, y_m$ принимают целые неотрицательные значения, а в том случае, когда для данного набора значений $x_1, \ldots, x_n$ существуют такие $y_1, \ldots, y_m$, что $P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$, найдутся также значения $y_1, \ldots, y_m$, не превосходящие $g(x_1, \ldots, x_n)$ и удовлетворяющие приведенному соотношению. Этот анализ был проведен Л. Адлеманом и К. Мандерсом [8]. Из определения элементарных по Кальмару функций легко вывести, что любая элементарная функция мажорируется подходящей суперпозицией функций $x+1$, x^y. Таким образом, справедлива следующая

ЛЕММА 3. *Для любого отношения $R(x_1, \ldots, x_n)$ из класса K найдется полином $P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ с целыми коэффициентами и функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ из класса $[M]$ такие, что имеет место эквивалентность*

$$R(x_1, \ldots, x_n) \equiv (\exists y_1)_{y_1 \leqslant g(x_1, \ldots, x_n)} \ldots (\exists y_m)_{y_m \leqslant g(x_1, \ldots, x_n)} (P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0),$$

где переменные $y_1, \ldots, y_m$ принимают целые неотрицательные значения.

ТЕОРЕМА 1. $\left[\left\{x+1, \left[\frac{x}{y}\right], x^y, \varphi(x, y)\right\}\right] = K$ [1]).

Доказательство. Включение $\left[\left\{x+1, \left[\frac{x}{y}\right], x^y, \varphi(x, y)\right\}\right] \subseteq K$ очевидно. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция из класса K. Отношение $R(x_1, \ldots, x_n, y_0) \equiv f(x_1, \ldots, x_n) = y_0$ также, разумеется, элементарно по Кальмару. Выберем согласно лемме 3 полином $P(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m)$ и функцию $g_1(x_1, \ldots, x_n, y_0)$ из класса $[M]$ таким образом, чтобы выполнялась эквивалентность

$$R(x_1, \ldots, x_n, y_0) \equiv (\exists y_1)_{y_1 \leqslant g_1(x_1, \ldots, x_n, y_0)} \ldots$$
$$\ldots (\exists y_m)_{y_m \leqslant g_1(x_1, \ldots, x_n, y_0)} (P(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m) = 0).$$

Без ограничения общности можно считать, что функция g_1 монотонна по любому из своих аргументов. Ясно, что

---

1) Первоначально автор получил более слабый результат $\left[\left\{x+1, x \dot{-} y, \left[\frac{x}{y}\right], x^y, \varphi(x, y)\right\}\right] = K$. Однако, как заметил рецензент, функция $x \dot{-} y$ выражается через остальные четыре функции:

$$x \dot{-} y = \varphi\left(2, \left[\frac{\left[\frac{2^x}{2^y}\right]^2}{\left[\frac{2^x}{2^y}\right]+1}\right]\right), \text{ где } 2 = \left[\frac{x+1}{x+1}\right]+1.$$

отношение $P(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m) = 0$ эквивалентно отношению $(P(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m))^2 = 0$. Последнее можно представить в виде $Q_1(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m) - Q_2(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m) = 0$, где Q_1, Q_2 — полиномы с целыми неотрицательными коэффициентами такие, что $Q_1(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m) - Q_2(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m) = (P(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m))^2$. Выберем функцию $g_2(x_1, \ldots, x_n)$ из класса $[M]$ так, чтобы она мажорировала функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда для любых $x_1, \ldots, x_n$ отношение

$$(\exists y_0)_{y_0 \leqslant g_2(x_1, \ldots, x_n)} (\exists y_1)_{y_1 \leqslant g_1(x_1, \ldots, x_n, g_2(x_1, \ldots, x_n))} \ldots$$
$$\ldots (\exists y_m)_{y_m \leqslant g_1(x_1, \ldots, x_n, g_2(x_1, \ldots, x_n))} (Q_1(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m) -$$
$$- Q_2(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m) = 0) \quad (1)$$

тождественно истинно. Иначе говоря, для любых $x_1, \ldots, x_n$ найдутся такие

$$y_0 \leqslant g_2(x_1, \ldots, x_n),$$
$$y_1 \leqslant g_1(x_1, \ldots, x_n, g_2(x_1, \ldots, x_n)), \ldots, y_m \leqslant$$
$$\leqslant g_1(x_1, \ldots, x_n, g_2(x_1, \ldots, x_n)),$$

что

$$Q_1(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m) - Q_2(x_1, \ldots, x_n, y_0,$$
$$y_1, \ldots, y_m) = (P(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m))^2 = 0,$$

т. е. для указанных значений $x_1, \ldots, x_n$ и y_0 будет $f(x_1, \ldots, x_n) = y_0$. Если мы положим $g(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1, \ldots, x_n, g_2(x_1, \ldots, x_n))$ и функцию $g_2(x_1, \ldots, x_n)$ заменим функцией $g(x_1, \ldots, x_n)$, то отношение (1) ввиду монотонности функции g_1 останется тождественно истинным. Далее мы предполагаем, что функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ монотонна по каждому из своих аргументов и не принимает значения 0.

Выберем число k так, чтобы для $i = 1, 2$ и любых $x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m$ выполнялось неравенство

$$Q_i(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m) < (2 + x_1 + \ldots + x_n +$$
$$+ y_0 + y_1 + \ldots + y_m)^k.$$

Положим

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (2 + x_1 + \ldots + x_n + (m+1) \cdot$$
$$\cdot g(x_1, \ldots, x_n))^k.$$

В силу леммы 1 $T \in [M]$. Ввиду монотонности функций Q_1, Q_2, g для любых $y_0, y_1, \ldots, y_m$, не превосходящих $g(x_1, \ldots, x_n)$, имеем

$$Q_i(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m) < T(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2).$$

Пусть, далее,

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \sum_{\substack{y_0 \leqslant g(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots \\ y_m \leqslant g(x_1, \ldots, x_n)}} (P(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m))^2 \cdot \\ \cdot (T(x_1, \ldots, x_n))^y,$$

где $y = y_0 + y_1(1 + g(x_1, \ldots, x_n)) + \ldots + y_m(1 + g(x_1, \ldots, x_n))^m$. Так как

$$(P(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m))^2 \leqslant \\ \leqslant Q_1(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m),$$

то для любых $y_0, y_1, \ldots, y_m$, не превосходящих $g(x_1, \ldots, x_n)$, имеем неравенство

$$(P(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m))^2 < T(x_1, \ldots, x_n).$$

Поэтому в разложении числа $V(x_1, \ldots, x_n)$ по степеням $T(x_1, \ldots, x_n)$ в качестве первых $(1 + g(x_1, \ldots, x_n))^{m+1}$ коэффициентов встречаются расположенные в некотором порядке (определяемом функцией $y_0 + y_1(1 + g(x_1, \ldots, x_n)) + \ldots + y_m \cdot (1 + g(x_1, \ldots, x_n))^m$) значения функции $(P(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m))^2$, когда переменные $y_0, y_1, \ldots, y_m$ принимают значения из отрезка $[0, g(x_1, \ldots, x_n)]$. Среди этих значений ввиду тождественной истинности отношения (1) непременно встречается значение 0, причем если $P(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m) = 0$, то $f(x_1, \ldots, x_n) = y_0$. Следовательно, для любых $x_1, \ldots, x_n$ младший разряд в разложении числа $\varphi(T(x_1, \ldots, x_n), V(x_1, \ldots, x_n))$ по степеням $1 + g(x_1, \ldots, x_n)$ равен $f(x_1, \ldots, x_n)$, т. е.

$$\mathrm{rm}(\varphi(T(x_1, \ldots, x_n), V(x_1, \ldots, x_n)), 1 + g(x_1, \ldots, x_n)) = \\ = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Для завершения доказательства теоремы покажем, что $V \in [M]$. Если определить для $i = 1, 2$

$$V_i(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \sum_{\substack{y_0 \leqslant g(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots \\ y_m \leqslant g(x_1, \ldots, x_n)}} Q_i(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_m) \cdot \\ \cdot (T(x_1, \ldots, x_n))^y,$$

где $y = y_0 + y_1 (1 + g(x_1,\ldots, x_n)) + \ldots + y_m \cdot (1 + g(x_1,\ldots, x_n))^m$, то по лемме 2 получим $V_i \in [M]$. Так как для любых $x_1,\ldots, x_n$ и любых $y_0, y_1,\ldots, y_m$, не превосходящих $g(x_1,\ldots, x_n)$, имеем неравенства

$$0 \leqslant Q_2 (x_1,\ldots, x_n, y_0, y_1,\ldots, y_m) \leqslant$$
$$\leqslant Q_1 (x_1,\ldots, x_n, y_0, y_1,\ldots, y_m) < T(x_1,\ldots, x_n),$$

то $V(x_1,\ldots, x_n) = V_1(x_1,\ldots, x_n) \dot{-} V_2(x_1,\ldots, x_n)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Класс* $[M]$ *содержит все элементарные по Кальмару функции, принимающие конечное число значений.*

Доказательство. Ввиду включения $x + y \in [M]$ для доказательства теоремы достаточно установить, что классу $[M]$ принадлежат все элементарные по Кальмару функции, принимающие только два значения, 0 и 1. Иными словами, достаточно показать, что классу $[M]$ принадлежат все элементарные по Кальмару отношения.

Пусть $R(x_1,\ldots, x_n)$ — произвольное элементарное по Кальмару отношение. Согласно лемме 3 выберем полином $P(x_1,\ldots, x_n, y_1,\ldots, y_m)$ с целыми коэффициентами и функцию $g(x_1,\ldots, x_n)$ из класса $[M]$ так, чтобы выполнялась эквивалентность

$$R(x_1,\ldots, x_n) \equiv (\exists y_1)_{y_1 \leqslant g(x_1,\ldots,x_n)} \ldots (\exists y_m)_{y_m \leqslant g(x_1,\ldots,x_n)}$$
$$(P(x_1,\ldots, x_n, y_1,\ldots, y_m) = 0).$$

Без ограничения общности можно считать, что функция $g(x_1,\ldots, x_n)$ монотонна по любому из своих аргументов и не принимает значения 0. Воспользуемся теперь частным случаем леммы 3.1 из работы [5] Ю. В. Матиясевича.

Пусть $\tau(a, b)$ означает число переносов при сложении чисел a и b, записанных в двоичной системе счисления, l и h — натуральные числа, $l > 1$, $v_1,\ldots, v_s$ — произвольный список натуральных чисел (возможно с повторениями), удовлетворяющих неравенствам $v_i + 1 < 2^{l-1}$. Тогда, если

$$B = \sum_{i=1}^{s} (2^{2(h+l)-1} + v_i \cdot 2^{h+l} - v_i) \cdot 2^{2(h+l)(i-1)},$$
$$D = \sum_{i=1}^{s} (2^{h+l} - 1) \cdot 2^{2(h+l)(i-1)},$$

то в случае $1 \in \{v_1, \ldots, v_s\}$ имеем

$$\tau(B - D, D) \leqslant (s-1)h + 2sl,$$

в противном случае $\tau(B - D, D) > sh$.

Мы хотим в качестве последовательности $v_1, \ldots, v_s$, указанной в лемме, взять последовательность значений полинома $1 + (P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m))^2$, когда переменные $y_1, \ldots, y_m$ пробегают значения из отрезка $[0, g(x_1, \ldots, x_n)]$. Именно, для $i - 1 = y_1 + y_2(1 + g(x_1, \ldots, x_n)) + \ldots + y_m(1 + g(x_1, \ldots, x_n))^{m-1}$ положим $v_i = 1 + (P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m))^2$, $s = s(x_1, \ldots, x_n) = (1 + g(x_1, \ldots, x_n))^m$. Чтобы выполнялось неравенство $v_i + 1 < 2^{l-1}$, выберем k, удовлетворяющее неравенству

$$2 + (P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m))^2 < (2 + x_1 + \ldots + x_n + y_1 + \ldots + y_m)^k,$$

и положим

$$l = l(x_1, \ldots, x_n) = (2 + x_1 + \ldots + x_n + m \cdot g(x_1, \ldots, x_n))^k.$$

Ясно, что при этом выборе будет также $l(x_1, \ldots, x_n) > 1$. В качестве $h = h(x_1, \ldots, x_n)$ возьмем функцию $2 \cdot s(x_1, \ldots, x_n) \cdot l(x_1, \ldots, x_n) + 1$. Тогда, как нетрудно проверить, при любых $x_1, \ldots, x_n$ будет

$$(s(x_1, \ldots, x_n) - 1) \cdot h(x_1, \ldots, x_n) + 2s(x_1, \ldots, x_n) \cdot l(x_1, \ldots, x_n) < s(x_1, \ldots, x_n)\, h(x_1, \ldots, x_n).$$

В силу выбора полинома P и функции g, если $R(x_1, \ldots, x_n)$ истинно, то $1 \in \{v_1, \ldots, v_s\}$ и, следовательно,

$$\tau(B(x_1, \ldots, x_n) - D(x_1, \ldots, x_n), D(x_1, \ldots, x_n)) \leqslant (s(x_1, \ldots, x_n) - 1) \cdot h(x_1, \ldots, x_n) + 2s(x_1, \ldots, x_n) \cdot l(x_1, \ldots, x_n),$$

а если $R(x_1, \ldots, x_n)$ ложно, то $1 \notin \{v_1, \ldots, v_s\}$ и поэтому

$$\tau(B(x_1, \ldots, x_n) - D(x_1, \ldots, x_n), D(x_1, \ldots, x_n)) \geqslant s(x_1, \ldots, x_n) \cdot h(x_1, \ldots, x_n).$$

В работе [5] отмечено, что $\tau(a, b)$ совпадает с показателем, с которым число 2 входит в разложение числа $\binom{a+b}{b}$ на простые множители. Отсюда

$$\neg R(x_1, \ldots, x_n) \equiv 2^{s(x_1, \ldots, x_n)\cdot h(x_1, \ldots, x_n)} \left| \begin{pmatrix} B(x_1, \ldots, x_n) \\ D(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \right. .$$

Ввиду леммы 1 для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что классу $[M]$ принадлежат функции $B(x_1, \ldots, x_n)$ и $D(x_1, \ldots, x_n)$. Обозначим $t(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n) + l(x_1, \ldots, x_n)$. При указанном выше выборе последовательности $v_1, \ldots, v_s$ выражение для $B(x_1, \ldots, x_n)$ примет такой вид:

$$B(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \sum_{\substack{y_1 \leqslant g(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_m \leqslant g(x_1, \ldots, x_n)}} (2^{2t(x_1, \ldots, x_n)-1} + (1 + (P(x_1, \ldots \\ \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m))^2) \cdot (2^{t(x_1, \ldots, x_n)} - 1)) \cdot 2^{2t(x_1, \ldots, x_n)\cdot \bar{y}},$$

где $\bar{y} = y_1 + y_2(1 + g(x_1, \ldots, x_n)) + \ldots + y_m(1 + g(x_1, \ldots, x_n))^{m-1}$. Теперь, как и в теореме 1, возьмем такие полиномы $Q_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, $Q_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ с целыми неотрицательными коэффициентами, что

$$Q_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) - Q_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = \\ = 1 + (P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m))^2.$$

Для $i = 1, 2$ образуем функции

$$C_i(x_1, \ldots, x_n) = \\ = (2^{t(x_1, \ldots, x_n)} - 1) \cdot \sum_{\substack{y_1 \leqslant g(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_m \leqslant g(x_1, \ldots, x_n)}} Q_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \cdot \\ \cdot 2^{2t(x_1, \ldots, x_n)\cdot \bar{y}},$$

где $\bar{y} = y_1 + y_2(1 + g(x_1, \ldots, x_n)) + \ldots + y_m(1 + g(x_1, \ldots \ldots, x_n))^{m-1}$. По лемме 2, функции C_1, C_2 принадлежат классу $[M]$. Ясно, что классу $[M]$ принадлежит и функция

$$E(x_1, \ldots, x_n) = 2^{2t(x_1, \ldots, x_n)-1} \sum_{\substack{y_1 \leqslant g(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_m \leqslant g(x_1, \ldots, x_n)}} 2^{2t(x_1, \ldots, x_n)\cdot \bar{y}},$$

где $\bar{y} = y_1 + y_2 (1 + g (x_1, \ldots, x_n)) + \ldots + y_m (1 + g (x_1, \ldots, x_n))^{m-1}$. Но тогда функция $B (x_1, \ldots x_n)$ также принадлежит классу $[M]$, поскольку $B (x_1, \ldots, x_n) = E (x_1, \ldots, x_n) + (C_1 (x_1, \ldots, x_n) \dot{-} C_2 (x_1, \ldots, x_n))$. Аналогичным образом рассматривается функция $D (x_1, \ldots, x_n)$. Теорема доказана.

Назовем функцию экспоненциально-полиномиальной, если ее можно получить суперпозицией функций $x + 1$, $x + y$, $x - y$, x^y, и дробно-экспоненциально-полиномиальной, если она представима в виде $\frac{F}{G}$, где F, G — экспоненциально-полиномиальные функции (отметим, что наши определения отличаются от соответствующих определений из работы [5]). Доказательство приводимого ниже следствия, по существу, содержится в доказательстве теоремы 2.

Следствие. *Элементарные по Кальмару отношения и только они представимы в виде* $F \mid \binom{G}{H}$, *где* F — *натуральнозначная экспоненциально-полиномиальная функция, а* G *и* H — *натуральнозначные дробно-экспоненциально-полиномиальные функции.*

Автор признателен рецензенту за полезные замечания

Институт прикладной
математики АН СССР

Поступило
22.XI.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Grzegorczyk A., Some classes of recursive functions, Rozprawy Matematyczne, IV, Warszawa, 1953 (русский перевод: Гжегорчик А., Некоторые классы рекурсивных функций, Сб., Проблемы математической логики, М., «Мир», 1970, 9—49).

[2] Rödding D., Über die Eliminierbarkeit von Definitionsschemata in der Theorie der rekursiven Funktionen, Z. Math. Logik Grundlag. Math., **10**, № 4 (1964), 315—330.

[3] Parsons Ch., Hierarchies of primitive recursive functions, Z. Math. Logik Grundlag. Math., **14**, № 4 (1968), 357—376.

[4] Матиясевич Ю. В., Диофантово представление перечислимых предикатов, Изв. АН СССР, Сер. матем., 35, № 1 (1971), 3—30.

[5] Матиясевич Ю. В., Один класс критериев простоты, формулируемых в терминах делимости биномиальных коэффициентов, Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. матем. ин-та АН СССР, 67 (1977), 167—183.

[6] Захаров Д. А., Рекурсивные функции, Новосибирск, Изд-во НГУ, 1970.

[7] Davis M., Putnam H., Robinson J., The decision problem for exponential Diophantine equations, Ann. Math., 74, № 3 (1961), 425—436 (русский перевод: Дэвис М., Путнам Х., Робинсон Дж., Проблема разрешимости для показательно диофантовых уравнений, Математика, 8, № 5 (1964), 3—14).
[8] Adleman L., Manders K., Computational complexity of decision procedures for polynomials, 16th Annual Symp. Found. Comput. Sci., 1975, New York, N. J., 1975, 169—177.