В. Н. Дубинин, А. В. Олесов, О применении конформных отображений к неравенстам для полиномов, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2002, том 286, 85–102

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 286, 2002 г.

В. Н. Дубинин, А. В. Олесов

О ПРИМЕНЕНИИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ К НЕРАВЕНСТВАМ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ

Введение

Неравенства для полиномов и их производных имеют богатую историю и многочисленные приложения [1, 2]. В недавних работах первого автора [3, 4] был предложен новый подход к получению такого типа неравенств, который сводится к следующему. По заданному полиному

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0, \quad c_n \neq 0,$$

строится конформное и однолистное отображение $w = f(z)$, а затем к этому отображению применяются результаты геометрической теории функций комплексного переменного [5, 6]. Развивая и дополняя указанный прием, мы приводим здесь несколько новых точных неравенств для алгебраических полиномов. Результаты данной статьи группируются по способу их получения. В первом параграфе рассматриваются в основном неравенства, доказанные с помощью функций $w = f(z)$ из работы [4] с привлечением новых (по сравнению с [4]) свойств конформных отображений. В §2 вводятся новые отображения $w = f(z)$, а в §3 мы на примерах обсуждаем другие способы получения неравенств для полиномов с привлечением конформных отображений. Отметим следующие результаты. Ранее [4, с. 38] было доказанно неравенство бернштейновского типа, которое в канонической форме выглядит следующим образом:

$$|P'(x)|\sqrt{1-x^2} \leqslant \left(n - 1 + \sqrt{2^{1-n}|c_n|}\right)\sqrt{1-P^2(x)}, \quad x \in [-1,1], \quad (1)$$

где $P(z)$ – полином n-ой степени с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий условию $|P(x)| \leqslant 1$, $x \in [-1,1]$. Равенство

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00028) и Министерства образования РФ (грант ЕОО-1.0-46).

в (1) для любых $x \in [-1,1]$ достигается в случае, когда $P(z)$ совпадает с полиномом Чебышева

$$T_n(z) = \frac{1}{2}\left[\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^n + \left(z-\sqrt{z^2-1}\right)^n\right] = 2^{n-1}z^n + \dots .$$

Можно показать, что неравенство (1) содержит классические неравенства Бернштейна и Маркова для полиномов на отрезке [4, с. 39-40]. В §1 данной статьи мы дополняем и усиливаем неравенство (1) путем изменения слагаемого $\sqrt{2^{1-n}|c_n|}$. Здесь же приводятся уточнения известных неравенств для полиномов с нулями в единичном круге. В частности, для некоторых $r > 1$ указывается концентрическое кольцо, содержащее образ окружности $|z| = r$ при отображении такими полиномами (теорема 4). Во втором параграфе получены неравенства бернштейновского типа для полиномов с ограничениями либо на отрезке, либо на окружности. Особо выделим точное неравенство (14), справедливое для полиномов, удовлетворяющих условию

$$|P(x)|\sqrt{1-x^2} \leqslant 1, \quad x \in [-1,1]. \tag{2}$$

Неравенство (14) восходит к известной задаче Турана и дополняет результаты Рахмана [7] и Лачанса [8]. Более того, это неравенство ведет к усилению классического неравенства Шура (теорема 6), а вместе с неравенством (1) приводит к усилению классического неравенства Маркова (теорема 7). Знак равенства в (14) достигается для полинома Чебышева 2-го рода

$$U_n(z) = \frac{T'_{n+1}(z)}{n+1}.$$

Наши усиления здесь, как и во всей работе, учитывают в основном влияние старшего коэффициента на оценки такого типа. В §3 к получению оценок для полиномов привлекаются принцип мажорации Митюка [9] и понятие гиперболической емкости Робина [10]. Акцент делается на развитии техники доказательств, хотя полученные при этом результаты имеют самостоятельный интерес.

§1. Применение неравенств Лебедева и Нехари

В работе [4] основное внимание было уделено приложениям широко известных теорем искажения для регулярных и однолистных функций. Привлечение более общих результатов Н. А. Лебедева [11] дает усиления и дополнения полученных в [4] неравенств для полиномов. В качестве примера рассмотрим неравенство (2.2) из статьи [11]. Мы привлекаем также известное неравенство Нехари [12]. Следуя [11], введем класс S_1 функций

$$w = f(z) = \alpha z + \alpha_2 z^2 + \dots\ , \quad \alpha > 0,$$

регулярных и однолистных в единичном круге $U := \{z : |z| < 1\}$ и таких, что $|f(z)| < 1$ при $z \in U$. Применяя метод Лёвнера, Лебедев [11] получил целую серию неравенств для функций класса S_1. В частности, им показано, что для $f(z) \in S_1$ в круге U справедливо неравенство (2.2):

$$\left|\log \frac{f(z)(1-|z|^2)}{\alpha z(1-|f(z)|^2)}\right| \leqslant \log \frac{(1+|z|)(1-|f(z)|)}{(1-|z|)(1+|f(z)|)} \tag{3}$$

и, следовательно, выполняется неравенство

$$\left|\arg \frac{f(z)}{z}\right| \leqslant \log \frac{(1+|z|)(1-|f(z)|)}{(1-|z|)(1+|f(z)|)}$$

(см. [11, с. 9, 12]). Здесь мнимая часть логарифма $(\arg(f(z)/z))$ равна приращению $\arg(f(\zeta)/\zeta)$, которое получается при движении точки ζ по лучу от точки $\zeta = 0$ до точки $\zeta = z$. Если предположить, дополнительно, что функция $f(z)$ класса S_1 и ее производная определены также в некоторой точке z на границе круга U и если $|f(z)| = 1$, то предельным переходом из выписанных выше неравенств после несложных преобразований получим

$$|f'(z)| \geqslant \sqrt{\alpha^{-1}} \exp \frac{\arg^2(f(z)/z)}{-2\log\alpha}, \tag{4}$$

$$|f'(z)| \geqslant \exp\left|\arg \frac{f(z)}{z}\right|. \tag{5}$$

Здесь и ниже $\exp(0/0) = 1$. Заметим, что по лемме Шварца $\alpha \leqslant 1$, так что неравенство (4) усиливает неравенство (1.6) работы [4], и оба неравенства усиливают принцип Линделефа в случае однолистных функций.

Пусть, дополнительно, функция $w = f(z)$ вещественная на промежутке $(-1, 1)$, и пусть она и ее производная определены и непрерывны также в некоторых точках z и $\overline{z}$ на границе круга U,

$z \neq \pm 1$, причем $|f(z)| = |f(\overline{z})| = 1$. Следуя [4, с. 20], применим к функции $w = f(z)$, точкам 0, z, $\overline{z}$ и числам $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$ неравенство Нехари [12, с. 258]. В результате получим

$$1 \leqslant \alpha^2 |f'(z) f'(\overline{z})| \left| \frac{f(z) - f(\overline{z})}{z - \overline{z}} \right|^2 .$$

Аналогично, применяя неравенство Нехари к двум точкам z, $\overline{z}$ и числам $\alpha_1 = -\alpha_2 = 1$, имеем

$$1 \leqslant |f'(z) f'(\overline{z})| \left| \frac{z - \overline{z}}{f(z) - f(\overline{z})} \right|^2 .$$

Учитывая симметрию функции $w = f(z)$, приходим к следующему неравенству:

$$|f'(z)| \geqslant \max \left\{ \alpha^{-1} \left| \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Im} f(z)} \right|, \left| \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} \right| \right\} \geqslant 1. \qquad (6)$$

Однолистные функции §2 работы [4] отличаются от функций класса S_1 разве лишь поворотом. Применяя неравенства (4)-(6) к нормированным функциям, можно получить серию неравенств для полиномов. Приведем некоторые из них.

Теорема 1. *Пусть полином*

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0, \quad c_n > 0,$$

с вещественными коэффициентами c_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, *удовлетворяет условию* $|P(x)| \leqslant 1$, $x \in [-1, 1]$. *Тогда для любого* $x \in [-1, 1]$, *при котором* $P(x) \neq \pm 1$, *справедливо неравенство*

$$\frac{|P'(x)| \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - P^2(x)}} \leqslant n - 1 + \sqrt{\frac{c_n}{2^{n-1}}} \exp \frac{(\arccos P(x) - \arccos T_n(x))^2}{2 \log(c_n / 2^{n-1})}. \qquad (7)$$

Равенство в (7) *при любом* $x \in (-1, 1)$ *достигается для полинома Чебышева* $T_n(z)$.

Доказательство. По заданному полиному $P(z)$ строим вспомогательную функцию

$$z = F(w) := w^{1-n} \Phi \left[P \left(\frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right) \right) \right],$$

где функция

$$\zeta = \Phi(\omega) := \omega - \sqrt{\omega^2 - 1}$$

конформно и однолистно отображает внешность отрезка $[-1, 1]$ на круг $|\zeta| < 1$ так, что $\Phi(\infty) = 0$, $\Phi(-1) = -1$. Положим

$$G := \left\{ w : |w| < 1,\, P\left(\frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)\right) \notin [-1, 1],\, |F(w)| \neq 1 \right\}.$$

Функция $z = F(w)$, $w \in G$, совпадает с функцией леммы 2.3 работы [4], согласно которой множество G состоит из конечного числа областей $\{D\}$, ограниченных конечным числом кусочно-гладких кривых и обладающих следующими свойствами. Если область D из совокупности $\{D\}$ не содержит начала координат, то образ области D при отображении $z = F(w)$ принадлежит множеству $|z| > 1$. Если область D содержит точку $w = 0$, то функция $z = F(w)$ конформно и однолистно отображает эту область на круг U. Пусть теперь w – регулярная для функции $z = F(w)$ точка окружности $|w| = 1$, и пусть, одновременно, $F(D)$ лежит вне круга U. Тогда необходимо в этой точке

$$\frac{\partial |F|}{\partial |w|} \leqslant 0.$$

Если же $F(D) = U$, то функция $w = f(z) := F^{-1}(z)F'(0)/|F'(0)|$ принадлежит классу S_1 и неравенство (4) дает

$$\frac{\partial |F|}{\partial |w|} = \left| \frac{1}{f'(z)} \right| \leqslant \sqrt{\frac{c_n}{2^{n-1}}} \exp \frac{\arg^2(f(z)/z)}{2 \log(c_n/2^{n-1})}. \tag{8}$$

Сравнивая оба неравенства, заключаем, что на окружности $|w| = 1$, за исключением, может быть, конечного числа точек, выполняется неравенство (8). После простых вычислений убеждаемся, что

$$\frac{\partial |F|}{\partial |w|} = 1 - n + \frac{|P'(x)|\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - P^2(x)}}, \quad x = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right),\ x \in [-1, 1].$$

Так как $c_n/2^{n-1} \leqslant 1$, то для доказательства неравенства (7) осталось проверить, что

$$\left| \arg \frac{f(z)}{z} \right| \geqslant |\arccos P(x) - \arccos T_n(x)|.$$

Последнее неравенство легко устанавливается из определения функции $w = f(z)$. Случай равенства в (7) проверяется непосредственным вычислением. Теорема доказана.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 справедливо неравенство*

$$\frac{|P'(x)|\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-P^2(x)}} \leqslant n-1+\exp(-|\arccos P(x)-\arccos T_n(x)|),$$

с равенством при любых $x \in (-1,1)$ для полинома Чебышева $T_n(z)$.

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1 с заменой неравенства (4) неравенством (5), либо получается из теоремы 1 путем элементарных преобразований.

Следующая теорема дополняет хорошо известное неравенство

$$\operatorname{Re}\frac{zP'(z)}{P(z)} \geqslant \frac{n}{2}, \qquad |z|=1,$$

справедливое для полиномов $P(z)$ степени n с нулями в круге $|z| \leqslant 1$ (в точках z, где $P(z)=0$, под вещественной частью дроби понимается ее предельное значение по другим точкам окружности) [2].

Теорема 3. *Для полинома*

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_0, \quad c_n \neq 0,\ c_0 \neq 0,$$

с вещественными коэффициентами c_k, $k = 0, 1, \dots, n$, нули которого лежат в круге $|z| \leqslant 1$, и для точек z окружности $|z| = 1$, $z \neq \pm 1$, справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\frac{zP'(z)}{P(z)} \geqslant \frac{n+1}{2} - \\ -\frac{1}{2}\min\left\{\left|\frac{c_0}{c_n}\right|\left|\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Im}\bigl(z^{-n-1}P(z)/\overline{P(z)}\bigr)}\right|, \left|\frac{\operatorname{Im}\bigl(z^{-n-1}P(z)/\overline{P(z)}\bigr)}{\operatorname{Im} z}\right|\right\}.$$

Равенство достигается для полиномов $P(z)$ с нулями на окружности $|z| = 1$.

Доказательство. Можно считать, что все нули полинома $P(z)$ расположены в круге U. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$z = F(w) := \frac{w^{n+1}P(1/w)}{\overline{P(\overline{w})}}$$

из леммы 2.4 работы [4]. Согласно этой лемме, множество

$$G := \{w : |w| < 1,\ |F(w)| \neq 1,\ F(w) \neq \infty\}$$

состоит из конечного числа областей $\{D\}$, ограниченных конечным числом кусочно-гладких кривых (возможно, вырожденных), причем если точка $w = 0$ принадлежит области D из совокупности $\{D\}$, то функция $z = F(w)$ конформно и однолистно отображает эту область на круг U, в противном случае образ $F(D)$ лежит вне круга U. Остается повторить доказательство теоремы 1 с привлечением неравенства (6) вместо неравенства (4) и учитывая тот факт, что в нашем случае

$$\frac{\partial |F|}{\partial |w|} = n + 1 - 2\,\mathrm{Re}\,\frac{zP'(z)}{P(z)} \quad (z = 1/w).$$

Проверяя случай равенства, заметим, что для вещественных полиномов

$$P(z) = c_n \prod_{k=1}^{n} (z - a_k),$$

с нулями на единичной окружности выполняется $|c_0/c_n| = 1$ и

$$\mathrm{Re}\,\frac{zP'(z)}{P(z)} = \frac{n}{2} \quad \text{при} \quad |z| = 1.$$

Что касается отношения мнимых частей, то учитывая тот факт, что нули a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ образуют комплексно сопряженные пары, имеем на единичной окружности

$$\mathrm{Im}\,\frac{z^{-n-1}P(z)}{\overline{P(z)}} = \mathrm{Im}\left(\overline{z} \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}\right) = \pm\,\mathrm{Im}\, z,$$

что ведет к равенству в теореме 3. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть все нули полинома*

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0, \quad c_n \neq 0,$$

лежат в круге $|z| \leqslant 1$, *и пусть* $M(P) := \max\{|P(z)| : |z| = 1\}$, $\lambda(P) := |M(P)/c_n|^{1/n}$. *Тогда, если в точке* z *на окружности* $|z| = r$ *выполняется неравенство* $|P(z)| > M(P)$, *то справедлива оценка*

$$|P(z)| \leqslant M(P) \beta_r^n(P), \tag{9}$$

где $\beta_r(P)$ – корень уравнения

$$x(r-1)^2 = r(x-1)^2\lambda(P), \quad 1 < \beta_r(P) \leqslant r.$$

В случае $r > (2\lambda(P)-1) + 2\sqrt{\lambda(P)(\lambda(P)-1)}$ для любых точек z на окружности $|z| = r$ справедливо двустороннее неравенство

$$M(P)\alpha_r^n(P) \leqslant |P(z)| \leqslant M(P)\beta_r^n(P), \tag{10}$$

где $\alpha_r(P)$ – корень уравнения

$$x(r+1)^2 = r(x+1)^2\lambda(P), \quad 1 < \alpha_r(P) \leqslant r.$$

Знаки равенства в (9), (10) достигаются для $P(z) = c_n z^n$.

Доказательство. Заметим, что в условиях теоремы $\lambda(P) \geqslant 1$ в силу неравенства Коши и $r > 1$ по принципу максимума; кроме того из элементарных соображений следует $\lambda(P) \leqslant 2$ [4, с. 33]. Неравенства (9), (10) можно получить из неравенства Лебедева (3), примененного к функции (3.15) работы [4]. Нам проще воспользоваться готовым неравенством (3.16) указанной работы:

$$\left(\frac{|P(z)|^{\frac{1}{n}} - M(P)^{\frac{1}{n}}}{|z|-1}\right)^{2n} \leqslant \left|\frac{c_n P(z)}{z^n}\right| \leqslant \left(\frac{|P(z)|^{\frac{1}{n}} + M(P)^{\frac{1}{n}}}{|z|+1}\right)^{2n}, \tag{11}$$

справедливым при любых z, для которых выполняется

$$|P(z)| > M(P). \tag{12}$$

Для доказательства (9) при условии (12) достаточно рассмотреть случай $M(P) = 1$. Левое неравенство в (11) дает

$$\frac{\left(|P(z)|^{\frac{1}{n}} - 1\right)^2}{|P(z)|^{\frac{1}{n}}} \leqslant \frac{(r-1)^2}{r}\lambda^{-1}(P) \leqslant \frac{(r-1)^2}{r}.$$

Ввиду строгого возрастания функции $y = (x-1)^2/x$ на промежутке $x > 1$, существует единственный корень $\beta_r(P)$ уравнения $x(r-1)^2 = r(x-1)^2\lambda(P)$, лежащий в промежутке $(1, r]$. По этой же причине выполняется

$$|P(z)|^{\frac{1}{n}} \leqslant \beta_r(P),$$

что и доказывает (9).

Покажем теперь, что если выполняется (12) и если

$$|z| = r > r_0 := (2\lambda(P) - 1) + 2\sqrt{\lambda(P)(\lambda(P) - 1)} \geqslant 1,$$

то справедливо левое неравенство в (10). Действительно, при условии $M(P) = 1$, неравенство (11) и строгое возрастание функции $y = (x+1)^2/x$ на промежутке $x > 1$ дают

$$\frac{\left(|P(z)|^{\frac{1}{n}} + 1\right)^2}{|P(z)|^{\frac{1}{n}}} \geqslant \frac{(r+1)^2}{r}\lambda^{-1}(P) > 4 = \frac{(r_0+1)^2}{r_0}\lambda^{-1}(P).$$

Следовательно, существует единственный корень $\alpha_r(P)$ уравнения $x(r+1)^2 = r(x+1)^2\lambda(P)$ на промежутке $(1, r]$, и для этого корня имеем

$$|P(z)|^{\frac{1}{n}} \geqslant \alpha_r(P).$$

Итак, если $|z| = r > r_0$ и если выполняется (12), то справедливо неравенство

$$M(P)\alpha_r^n(P) \leqslant |P(z)|. \tag{13}$$

Пусть, по-прежнему, $|z| = r > r_0$, и предположим, что $|P(z)| \leqslant M(P)$ (т.е. (12) не выполняется). Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ на окружности $|z| = r$ найдется точка z_ε такая, что $|P(z_\varepsilon)| = M(P) + \varepsilon$. По (13), для этой точки имеем

$$M(P)\alpha_r^n(P) \leqslant |P(z_\varepsilon)| = M(P) + \varepsilon.$$

Противоречие, полученное при $\varepsilon \to 0$, завершает доказательство левого неравенства в (10) и вместе с ранее доказанным – правого неравенства в (10). Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

§2. Построение однолистных функций

Ниже будут получены новые оценки для полиномов с ограничениями либо на отрезке, либо на окружности (ср. [2, 7, 8]). Эти оценки вытекают из ослабленного неравенства (4), примененного к новым (по сравнению с [4]) однолистным функциям.

Пусть $P(z)$ – полином степени n с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий на отрезке $[-1, 1]$ ограничению (2). Положим

$$z = F_1(w) := w^{-n}\Phi\left[\frac{i}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right) P\left(\frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)\right)\right],$$

где, как и при доказательстве теоремы 1, $\Phi(\omega) = \omega - \sqrt{\omega^2-1}$, $\Phi(\infty)=0$, и пусть

$$G_1 := \left\{ w : |w|<1, \frac{i}{2}\left(w-\frac{1}{w}\right) P\left(\frac{1}{2}\left(w+\frac{1}{w}\right)\right) \notin [-1,1], |F_1(w)| \neq 1 \right\}.$$

Множество G_1 состоит из конечного числа областей D, ограниченных конечным числом кусочно-гладких кривых и обладающих следующим свойством. При приближении точки w к границе каждой такой области все предельные значения модуля $|F_1(w)|$ больше либо равны единице. Более того, точка $w=0$, и только она, переходит при отображении $z = F_1(w)$ в точку $z=0$, причем $F_1'(0) \neq 0$. Повторяя доказательство леммы 2.2 [4], убеждаемся, что для любой области $D \in \{D\}$ выполняется либо $F_1(D) \cap U = \emptyset$, либо $F_1(D) = U$. Во втором случае обратная функция $w = f_1(z)$ является, с точностью до вращения, функцией класса S_1.

Пусть теперь $P(z)$ – полином степени $n \geqslant 2$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий в точках z, $|z|=1$, $z \neq 1$, условию

$$\left|\operatorname{Re}\frac{P(z)}{z-1}\right| \leqslant 1.$$

Определим

$$z = F_2(w) := w^{2-n}\Phi\left[\frac{1}{2}\left(\frac{P(1/w)}{1/w-1} + \frac{P(w)}{w-1}\right)\right],$$

$$G_2 := \left\{ w : |w|<1,\ \frac{1}{2}\left(\frac{P(1/w)}{1/w-1} + \frac{P(w)}{w-1}\right) \notin [-1,1],\ |F_2(w)| \neq 1 \right\}.$$

Все выше сказанное о функции $z = F_1(w)$, $w \in G_1$, легко переносится на функцию $z = F_2(w)$, $w \in G_2$. Обозначим через $w = f_2(z)$ функцию, обратную $z = F_2(w)$ при $z \in U$.

Теорема 5. *Если полином*

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_0, \quad c_n \neq 0,$$

с вещественными коэффициентами c_k, $k = 0,1,\dots,n$, *удовлетворяет условию* (2), *то для любого* $x \in [-1,1]$ *справедливо неравенство*

$$|xP(x) - (1-x^2)P'(x)| \leqslant \left(n + \sqrt{2^{-n}|c_n|}\right)\sqrt{1-(1-x^2)P^2(x)}. \quad (14)$$

Равенство в (14) *для любого* $x \in [-1,1]$ *достигается в случае, когда* $P(z)$ *совпадает с полиномом Чебышева* $U_n(z)$.

Доказательство. При заданном значении $x \in [-1,1]$ пусть точка w такова, что $(w+1/w)/2 = x$, $|w| = 1$. Если w является точкой регулярности функции $F_1(w)$ и одновременно лежит на границе области $D \subset G_1$ такой, что $F_1(D) \cap U = \emptyset$, то необходимо в этой точке

$$\frac{\partial |F_1|}{\partial |w|} \leqslant 0.$$

Если $F_1(D) = U$, то, применяя неравенство (4), заключаем, что в такой точке

$$\frac{\partial |F_1|}{\partial |w|} = \left| \frac{1}{f_1'(z)} \right| \leqslant \sqrt{\frac{|c_n|}{2^n}}. \tag{15}$$

Таким образом, неравенство (15) выполняется во всех точках окружности $|w| = 1$, за исключением, может быть, конечного числа таких точек. Вычисляя производную в левой части неравенства в (15), получим неравенство (14). Для проверки случая равенства в (14) проще всего заметить, что

$$U_n(z) = \frac{\sqrt{T_{n+1}^2(z) - 1}}{\sqrt{z^2-1}} = 2^n z^n + \ldots, \qquad z \notin [-1,1],$$

где под корнем понимается ветвь, переводящая большие положительные числа в положительные. Отсюда, при $P(z) = U_n(z)$ имеем

$$F_1(w) = w^{-n} \Phi \left[-i \sqrt{T_{n+1}^2 \left(\frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right) \right) - 1} \right] =$$

$$= w^{-n} \Phi \left[\frac{i}{2} \left(w^{n+1} - \frac{1}{w^{n+1}} \right) \right] = iw.$$

Поэтому в неравенстве (15) и, следовательно, в (14) достигается знак равенства. Теорема доказана.

Для сравнения с неравенством (14) приведем результат Лачанса [8]:

$$(1-x^2)|P'(x)| \leqslant 2(n+1), \qquad x \in [-1,1],$$

и неравенство, вытекающее из теоремы Рахмана [7]:

$$|2xP(x) - (1-x^2)P'(x)| \leqslant 2(n+1), \qquad x \in [-1,1],$$

Оба неравенства справедливы для полиномов, удовлетворяющих условию (2). Легко показать, что из теоремы 5 и неравенства Шура [2] следует усиление этих неравенств.

Замечание 1. В условиях теоремы 5 справедливо неравенство

$$|c_n| \leqslant 2^n,$$

что вытекает из леммы Шварца, примененной к функции $w = f_1(z)$.

Замечание 2. Неравенство (14) можно получить также из теоремы 1 работы [3], переходя к тригонометрическим полиномам.

Из теоремы 5 вытекает следующее уточнение классического неравенства Шура.

Теорема 6. *Предположим, что полином*

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0, \quad c_n \neq 0,$$

с вещественными коэффициентами удовлетворяет условию (2). *Тогда для любого* $x \in [-1, 1]$ *справедливо неравенство*

$$|P(x)| \leqslant n + \sqrt{\frac{|c_n x^n|}{2^n}} \leqslant n + 1.$$

Равенство достигается для полинома Чебышева $U_n(z)$ *в точке* $x = 1$.

Доказательство. Для заданного полинома $P(z)$, удовлетворяющего условию теоремы, и фиксированного $x \in [-1, 1]$ рассмотрим полином

$$Q(y) := P(xy) = c_n x^n y^n + \cdots + c_0.$$

Поскольку для любых $y \in [-1, 1]$ выполняется

$$|Q(y)|\sqrt{1 - y^2} \leqslant |P(xy)|\sqrt{1 - (xy)^2} \leqslant 1,$$

то к полиному $Q(y)$ применима теорема 5. Согласно этой теореме и замечанию 1,

$$|P(x)| = |Q(1)| \leqslant n + \sqrt{\frac{|c_n x^n|}{2^n}} \leqslant n + 1.$$

Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Неравенство Шура

$$\max\{|P(x)| : x \in [-1,1]\} \leqslant (n+1)\max\left\{|P(x)|\sqrt{1-x^2} : x \in [-1,1]\right\}$$

эквивалентно “итоговому” неравенству в теореме 6.

Стандартным путем из неравенства бернштейновского типа (1) и уточнения неравенства Шура приходим к следующему усилению классического неравенства Маркова.

Теорема 7. *Если полином*

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_0, \quad c_n \neq 0,$$

с вещественными коэффициентами удовлетворяет условию

$$|P(x)| \leqslant 1, \quad x \in [-1,1],$$

то для любого $x \in [-1,1]$ *справедливо неравенство*

$$|P'(x)| \leqslant (n-1)\left(n-1+\sqrt{\frac{|c_n|}{2^{n-1}}}\right) + \sqrt{\frac{n|c_n x^{n-1}|}{2^{n-1}}}\sqrt{n-1+\sqrt{\frac{|c_n|}{2^{n-1}}}}.$$

Равенство достигается для полинома Чебышева $T_n(z)$ *в точке* $x = 1$.

Доказательство. Неравенство (1) дает

$$|P'(x)|\sqrt{1-x^2} \leqslant n-1+\sqrt{\frac{|c_n|}{2^{n-1}}}.$$

Остается применить теорему 6 к полиному

$$\frac{P'(z)}{n-1+\sqrt{|c_n|/2^{n-1}}}.$$

Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Оценивая правую часть неравенства теоремы 7 сверху, получим

$$|P'(x)| \leqslant \left(n-1+\sqrt{\frac{|c_n x^{n-1}|}{2^{n-1}}}\right) n \leqslant n^2, \quad x \in [-1,1],$$

где “итоговое” неравенство есть неравенство Маркова [2, с. 233].

Теорема 8. *Пусть для полинома*

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_0, \quad n \geqslant 2,\ c_n \neq 0,$$

с вещественными коэффициентами в точках окружности $|z| = 1$, $z \neq 1$, *выполняется неравенство*

$$\left|\operatorname{Re}\frac{P(z)}{z-1}\right| \leqslant 1.$$

Тогда для указанных точек z *справедливо неравенство*

$$\left|\operatorname{Im}\left[\frac{z}{z-1}\left(P'(z) - \frac{P(z)}{z-1}\right)\right]\right| \leqslant \left(n - 2 + \sqrt{|c_n|}\right)\sqrt{1 - \operatorname{Re}^2\frac{P(z)}{z-1}}.$$

Равенство в каждой точке z, $|z| = 1$, $z \neq 1$, *достигается для полинома* $P(z) = z^n - z^{n-1}$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 5 заключаем, что для всех точек окружности $|w| = 1$, за исключением, может быть, конечного числа, выполняется неравенство

$$\frac{\partial|F_2|}{\partial|w|} = \left|\frac{1}{f_2'(z)}\right| \leqslant \sqrt{|c_n|}.$$

Остается вычислить производную в левой части последнего неравенства и заменить w на z. Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

§3. Другие методы

Ниже рассматриваются два примера по применению геометрической теории функций к оценкам полиномов, отличные, в идейном плане, от рассмотренных в §1 и §2. Введем обозначение $M(P) = \max\{|P(x)| : |z| = 1\}$.

Теорема 9. *Если* $P(z)$ – *полином степени* n, *то для любой точки* z, *удовлетворяющей условию* $\{\zeta : P(\zeta) = P(z)\} \subset U$, *справедливо неравенство*

$$M^2(P) - |P(z)|^2 \geqslant |z|^n |P(1/\overline{z}) - P(z)| M(P).$$

Равенство достигается в случае $P(z) = cz^n$, $c \neq 0$.

Доказательство. Можно считать, что $M(P) = 1$ и множество $\{\zeta : P(\zeta) = P(z)\}$ состоит из n различных точек: $z_0 = z$, $z_1, \ldots, z_{n-1}$.

И. П. Митюк [9] получил следующий результат:

$$r(f(G), w_0) \geqslant |a_p| r^p(G, z_0) \exp \sum_{k \geqslant 1} p_k g_G(z_0, z_k),$$

где функция $w = f(z)$ регулярна в области G, причем $f(z_0) = w_0$, $f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0$, $f^{(p)}(z_0) = p! a_p \neq 0$; z_k, $k \geqslant 1$,– нули функции $f(z) - w_0$ в области G, отличные от z_0, а p_k – их кратности; $r(D, a)$ означает внутренний радиус области D, относительно точки a, а $g_G(z, \zeta)$ – функцию Грина [5]. Полагая здесь $f(z) = P(z)$, $G = U$, $z_0 = z$ (и, следовательно, $w_0 = P(z)$, $p = 1$, $a_p = P'(z)$, $p_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, n-1$), и учитывая включение $P(U) \subset \{w : |w| < 1\}$, получаем

$$1 - |P(z)|^2 \geqslant |P'(z)|(1 - |z|^2) \prod_{k=1}^{n-1} \left| \frac{1 - z\overline{z_k}}{z - z_k} \right|. \tag{16}$$

Если $P(z) = c_n z^n + \dots$, то при фиксированном z и любых ζ имеем

$$c_n(\zeta - z) \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - z_k) = P(\zeta) - P(z).$$

Отсюда

$$c_n \prod_{k=1}^{n-1} (z - z_k) = P'(z),$$

$$\overline{c_n}(1 - |z|^2) \prod_{k=1}^{n-1} (1 - z\overline{z_k}) = \overline{c_n} z^n \overline{\prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\overline{z}} - z_k \right)} =$$
$$= z^n \left(\overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}} \right)} - \overline{P(z)} \right).$$

Подставляя эти соотношения в (16), получим требуемое неравенство с легко проверяемым случаем равенства. Теорема доказана.

Теорема 10. *Для данного полинома $P(z)$ степени n пусть точка z такова, что $|z| > 1$ и*

$$\left| \frac{P(z)}{z^{n-1}} \right| > M(P).$$

Тогда

$$|zP'(z)-(n-1)P(z)| \leqslant \frac{|c_n||z|^{n-2}(|z|^2-1)}{1-(M(P)|z|^{n-1}/|P(z)|)^2}. \tag{17}$$

Равенство достигается для полинома $P(z)=c_n z^n$.

Доказательство. Можно считать, что $z_0 > 0$, $M(P) = 1$, $P(z_0)/z_0^{n-1} > 0$ и $(P(z)/z^{n-1})' \neq 0$ в точке z_0. При достаточно малом $r > 0$ рассмотрим вещественную функцию $u_r(z)$, непрерывную в $|z| \geqslant 1$, гармоническую на множестве

$$G_r := \{z : 1 < |z| < 1/r\} \setminus \{z : |z-z_0| \leqslant r\},$$

равную нулю на $|z| \geqslant 1/r$, единице на $|z-z_0| \leqslant r$ и удовлетворяющую граничному условию $\partial u_r/\partial|z| = 0$ на $|z| = 1$. Гиперболическая емкость Робина соответствующей конфигурации равна интегралу Дирихле

$$I(u_r, G_r) := \iint\limits_{G_r} |\nabla u_r|^2 dxdy.$$

На множестве $|w| \geqslant 1$ определим функцию

$$v_r(w) = \max\left\{u(z) : |z| \geqslant 1,\, \frac{P(z)}{z^{n-1}} = w\right\}.$$

Учитывая конформную инвариантность интеграла Дирихле, имеем

$$I(u_r, G_r) \geqslant I(v_r, \{w : |w| > 1\}).$$

Обозначим через B_r максимальный замкнутый круг с центром в точке $P(z_0)/z_0^{n-1}$, содержащийся в образе круга $|z-z_0| \leqslant r$ при отображении $w = P(z)/z^{n-1}$, и пусть D_r – максимальный замкнутый "круг" с центром в бесконечности, содержащийся в образе множества $|z| \geqslant 1/r$ при указанном отображении. Наконец, определим функцию $v_r^*(w)$, непрерывную в круге $|w| \geqslant 1$, гармоническую на множестве

$$H_r := \{w : |w| > 1,\, w \notin B_r \cup D_r\},$$

равную нулю на D_r, единице на B_r и удовлетворяющую условию $\partial v_r^*/\partial|w| = 0$ на $|w| = 1$. Из принципа Дирихле со свободной границей следует

$$I(v_r, \{w : |w| > 1\}) \geqslant I(v_r^*, H_r).$$

Суммируя выписанные соотношения, получаем

$$I(u_r, G_r) \geqslant I(v_r^*, H_r). \tag{18}$$

Для вычисления гиперболической емкости в левой части (18) отобразим внешность круга $|z| < 1$ на внешность отрезка функцией

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Учитывая конформную инвариантность интеграла Дирихле, легко заключаем, что искомая гиперболическая емкость равна, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка при $r \to 0$, емкости кругового концентрического кольца с радиусами

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) r \quad \text{и} \quad \frac{1}{2r}$$

Аналогично привлекая конформное отображение

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right),$$

убеждаемся, что гиперболическая емкость в правой части (18) равна, с точностью до бесконечно малых более высокого порядка при $r \to 0$, емкости кругового кольца, ограниченного концентрическими окружностями радиусов

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{(z_0^{n-1})^2}{P^2(z_0)}\right)\left|\frac{P'(z_0)z_0 - (n-1)P(z_0)}{z_0^n}\right| r \quad \text{и} \quad \frac{|c_n|}{2r}$$

Сравнивая отношения этих радиусов и используя (18), приходим к неравенству (17). Осталось проверить утверждение о случае равенства. Теорема доказана.

Литература

1. G. V. Milovanovic, D. S. Mitrinovic, Th. M. Rassias, *Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros,* Singapore (1994).
2. P. Borwein, T. Erdelyi, *Polinomials and polinomial inequalities,* New York (1995).
3. В. Н. Дубинин, *Теоремы искажения для полиномов на окружности,* Мат. сб. **191**, No. 12 (2000), 51–60.
4. В. Н. Дубинин, *Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов,* Алгебра и анализ **13**, вып. 5 (2001), 16–43.

5. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного,* 2-ое изд., М. (1966).
6. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций. I, II,* Алгебра и анализ **9**, вып. 3 (1997), 41–103 вып. 5 (1997), 1–50 .
7. Q. I. Rahman, *On a problem of Turan about polynomials with curved majorants,* Trans. Amer. Math. Soc. **163** (1972), 447–455.
8. M. A. Lachance, *Bernstein and Markov inequalities for constrained polynomials,* Lect. Notes Math. **1045** (1984), 125–135.
9. И. П. Митюк, *Принцип симметризации для многосвязных областей,* Докл. АН СССР **157**, No. 2 (1964), 268–270.
10. P. Duren, J. Pfaltzgraff, *Hiperbolic capacity and its distortion under conformal mapping,* J. Anal. Math. **78** (1999), 205–218.
11. Н. А. Лебедев, *Некоторые оценки для функций, регулярных и однолистных в круге,* Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., физ., хим. **11**, вып. 4 (1955) 3–21.
12. Z. Nehari, *Some inequalities in the theory of function,* Trans. Amer. Math. Soc. **75**, No. 2 (1953) 256–286.
13. W. K. Hayman, *Multivalent functions,* Cambridge (1994).

Институт прикладной
математики ДВО РАН,
Владивосток
E-mail: dubinin@iam-mail.febras.ru

Поступило 19 апреля 2002 г.

Морской государственный
университет им. Г. И. Невельского
Владивосток