

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. V. Zalipaev, Asymptotics of the radiating plane wave coefficients in the scattering problem on a smooth periodic boundary, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1990, Volume 186, 71–86

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.173

January 22, 2025, 21:36:16



АСИМПТОТИКА КОЭФФИЦИЕНТОВ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН В ЗАДАЧЕ С ВОЛНИСТОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Введение

В работах [1], [2] рассматривалась задача рассеяния плоской волны $u_{\text{пад}} = \exp[ik(x \cos \chi - y \sin \chi)]$ (χ - угол скольжения, k - волновое число) на гладкой волнистой периодической кривой S (см. рис. 1). Считалось, что волновое поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца и условию Дирихле на границе S . Задача рассматривалась в приближении, когда длина волны $\lambda (\lambda = 2\pi/k)$ много меньше периода ℓ , высоты горбов и радиуса кривизны границы ρ в точке O (случай высочастотной асимптотики). Кроме того, предполагалось, что угол скольжения χ плоской волны мал, а именно $k^{\beta} \chi = O(1)$ при $k \rightarrow \infty$ и $\beta \geq 1/3$.

В упомянутых работах отраженное от границы S поле строилось в виде ряда многократно дифрагированных полей (МДП), рассеянных вперед. Для любого порядка МДП были получены асимптотические формулы. А сам ряд МДП просуммирован для старших членов асимптотики

при $k \rightarrow \infty$ на основе решения одного интегрального уравнения класса Винера-Хопфа. В результате была построена асимптотика волнового поля в окрестности полутени (окрестность оси x). Настоящая статья продолжает исследование рассматриваемой задачи и посвящена представлению поля в виде разложения по плоским волнам.

Известно, что при $\chi > 0$ отраженное поле можно описывать в виде ряда по плоским волнам, убегаящим в верхнюю полуплоскость, т. е.

$$u_{\text{отр}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n \exp(iw_n x + i v_n y) \quad (1)$$

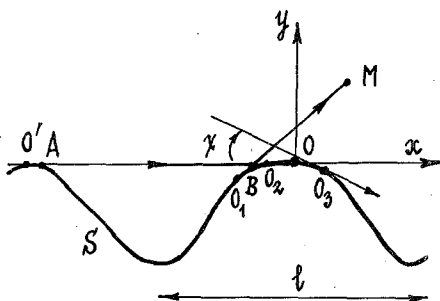


Рис. 1

$$w_n = \frac{2\pi n}{l} + k \cos \chi \equiv k \cos \varphi_n$$

$$v_n = \sqrt{k^2 - w_n^2} \equiv k \sin \varphi_n$$

Под \sqrt{x} в (I) понимается главная ветвь квадратного корня ($\text{Im} \sqrt{x} \geq 0$). Для коэффициентов возбуждения R_n плоских волн, распространяющихся под углами $\varphi_n (0 \leq \varphi_n \leq \pi)$, справедливо представление в виде интеграла

$$R_n = \frac{1}{2il v_n} \int_{(S)} ds \frac{\partial u}{\partial n}(s) \exp[-ik(x(s) \cos \varphi_n + y(s) \sin \varphi_n)], \quad (2)$$

где $\vec{r}(s) = (x(s), y(s))$ - параметрическое уравнение границы, выраженное через её длину пути s , отсчитываемой от точки O (для точек границы, расположенных левее точки O , $s < 0$); $\frac{\partial u}{\partial n}(s)$ - ток Флоке - нормальная производная полного поля $u(x, y) = u_{\text{над}} + u_{\text{отр}}$ (*). Интегрирование в (2) осуществляется по периоду границы. В рассматриваемой задаче ток оказывается сосредоточенным в двух малых окрестностях вершин горбов границы S , а именно, на дуге $O_1 O_2$ при $-c_1 k^{-1/6} < s < -c_2 k^{-1/3}$ и на дуге $O_2 O_3$ (зона Фока) при $-c_2 k^{-1/3} < s < c_3 k^{-1/3}$, где c_1, c_2, c_3 положительные постоянные (**). Вне этих окрестностей ток экспоненциально мал (глубокая тень).

Цель настоящей работы - нахождение асимптотики R_n при $k \rightarrow \infty$.

Для углов $\varphi_n > c k^{-1/6}$ (постоянная $c > 0$) соответствующие коэффициенты R_n должны быть экспоненциально малы, так как при вычислении асимптотики интеграла (2) окрестность стационарной точки попадает на участок границы S в глубокой тени. Поэтому вклад в ряд (I) дадут только плоские волны, распространяющиеся под углами $0 \leq \varphi_n \leq c k^{-1/6}$. Так как ток Флоке сосредоточен на вершинах горбов границы в двух окрестностях, то возникает асимптотика R_n двух типов: для $D_1 k^{-1/3} < \varphi_n < D_2 k^{-1/6}$ - геометрическая, для $0 \leq \varphi_n < D_3 k^{-1/3}$ - полутеневая (D_1, D_2, D_3 - положительные постоянные). Это соответствует тому, что

(*) Полное поле удовлетворяет условию Флоке: $u(x+l, y) = \exp[ikl \cos \chi] u(x, y)$ для любых x, y выше границы S .

(**) На самом деле граница между двумя указанными участками расположена при $s = -c_2 k^{-1/3 + \delta}$, $0 < \delta < \frac{1}{12}$.

стационарная точка попадает на дугу $O_1 O_2$ или на дугу $O_2 O_3$.

Асимптотику R_{μ} можно было бы найти, вычисляя непосредственно асимптотику интеграла (2). В этой работе предполагается другой способ, использующий результаты [2] построения и суммирования МДП. Основная идея его состоит в следующем. Рассмотрим интеграл

$$\tilde{u}_{\text{отр}}(M) = \frac{-i}{4} \int_{(S)} \frac{\partial u}{\partial n}(s) H_0^{(1)}(kR(s)) ds, \quad (3)$$

где $H_0^{(1)}(kR)$ - функция Ханкеля,

$$R(s) = \sqrt{r^2 + r^2(s) - 2r \langle \vec{r}, \vec{r}(s) \rangle} \quad (4)$$

- расстояние между точкой контура горба $\vec{r}(s)$ и точкой наблюдения M с радиус-вектором $\vec{r} = (x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial n}(s)$ - ток Флоке.

Интеграл (3) описывает отраженное поле, когда на горб (см. рис. I) слева падает полутеневое поле $u(x, y)$ - ряд МДП, асимптотика которого известна (см. [2]).

Если в (3) вместо $\frac{\partial u}{\partial n}(s)$ подставить ток, соответствующий $u_{\text{над}}$, то получим однократно дифрагированное поле. На свету оно описывается известной геометрической отражательной формулой, а в секторе полутени, примыкающем к оси x , - асимптотикой, полученной в [3] (методом пограничного слоя). Этот результат подтвержден в работе [4] вычислением асимптотики интеграла, аналогичного (3). Если в интеграл (3) подставить ток, соответствующий однократнодифрагированному полю, то получим двукратно дифрагированное поле и так далее.

Будем считать, что горбы границы, находящиеся правее рассматриваемого на рис. I, отсутствуют. Воспользуемся для M полярными координатами $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $\pi \geq \varphi > \pi$. Пусть $kR \gg 1$, тогда имеет место асимптотика

$$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR) = \frac{\exp\left[ikR + \frac{i\pi}{4}\right]}{2\sqrt{2\pi} \sqrt{kR}} \left[1 + O\left(\frac{1}{kR}\right)\right]. \quad (5)$$

Перейдем к асимптотике при $r \rightarrow +\infty$ в формулах (3), (4). В этом случае с учетом (5) мы получим

$$R(s) = r - (x(s) \cos \varphi + y(s) \sin \varphi) + O(r^{-1}) \quad (6)$$

$$\tilde{u}_{\text{отр}}(M) = -\frac{\exp(i\pi/4 + ik\tau)}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{k\tau}}.$$

$$\int ds \frac{\partial u}{\partial n}(s) \exp[-ik(x(s)\cos\varphi + y(s)\sin\varphi)] + O((k\tau)^{-3/2}). \quad (5)$$

Видно, что интеграл в правой части (7) совпадает с интегральным представлением R_n в (2), если в нем положить $\varphi = \varphi_n$, а именно

$$\tilde{u}_{\text{отр}}(\tau, \varphi_n) = \frac{\exp(ik\tau - i\pi/4)}{\sqrt{k\tau}} \frac{iv_n}{\sqrt{2\pi}} R_n + O((k\tau)^{-3/2}). \quad (8)$$

Из соотношения (8) следует важный вывод. Если известно выражение для $\tilde{u}_{\text{отр}}(M)$, то получив старший член его асимптотики при $\tau \rightarrow \infty$, мы найдем искомую асимптотику R_n . С другой стороны, выражение для $\tilde{u}_{\text{отр}}(\tau, \varphi)$ мы получим, используя результаты работ [1, 2]. Здесь возникает два типа асимптотики $\tilde{u}_{\text{отр}}(\tau, \varphi)$ - геометрикооптическая, когда $D_1 k^{-1/3} < \varphi < D_2 k^{-1/6}$ и полутеневая, когда $0 \leq \varphi < D_3 k^{-1/3}$. Их вывод приводится ниже в §§ 1, 2.

§ 1. Асимптотика R_n в полутени.

Пусть слева на горб границы (см. рис.1) падает поле $u(x, y)$. Соответствующее отраженное поле находится по формуле (3). Рассмотрим его в секторе полутени, примыкающим сверху к оси x , то есть когда $0 \leq \varphi < D_3 k^{-1/3}$. Так как полное поле $u(x, y)$ есть бесконечная сумма плоской волны и МДП, то переотражая члены $u(x, y)$ по отдельности по формуле (3) в полутени за горбом мы получаем снова МДП, причем их асимптотика при $k \rightarrow \infty$ известна (см. [1, 2]).

Таким образом, не вычисляя асимптотики интеграла (3), мы можем представить $\tilde{u}_{\text{отр}}(M)$ в следующем виде

$$\tilde{u}_{\text{отр}}(M) = \exp\left[ik\left(\tau - \frac{1}{6}\rho\chi^3\right)\right] \left\{ \tilde{U}_0(M) + \tilde{U}_1(M)k^{-1/6} + O(k^{-1/3}) \right\}, \quad (9)$$

$$\tilde{U}_0(M) = \sqrt{\frac{\ell}{v}} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n^{n-1} W_n(\nu, \psi, \psi_c); \quad \Omega_n = \exp[i\kappa \ell (1 - \cos \gamma)], \quad (10)$$

$$W_1 = -\pi^{-1/2} \int_{-\infty}^0 dx_1 \exp\left[(\psi + \psi_c) x_1 e^{-i\frac{\pi}{4}} - x_1^2 \frac{\ell}{v}\right], \quad (11)$$

$$W_2 = \pi^{-1} \int_{-\infty}^0 dx_1 \int_{-\infty}^0 dx_2 \exp\left[\psi_c e^{-i\frac{\pi}{4}} x_1 - (x_1 - x_2)^2 - x_2^2 \frac{\ell}{v} + \psi e^{-i\frac{\pi}{4}} x_2\right], \quad (12)$$

$$W_n = \pi^{-n/2} \int_{-\infty}^0 dx_1 \int_0^{\infty} dx_2 \dots \int_0^{\infty} dx_{n-1} \int_{-\infty}^0 dx_n \exp\left[\psi_c e^{-i\frac{\pi}{4}} x_1 - \sum_{m=1}^{n-1} (x_m - x_{m+1})^2 - x_n^2 \frac{\ell}{v} + \psi e^{-i\frac{\pi}{4}} x_n\right], \quad (13)$$

где $\psi_c = \gamma \sqrt{2\kappa \ell}$, $\psi = \Psi \sqrt{2\kappa \ell}$. Ряд (10) соответствует френелевской дифракции (n -порядок дифракции), не зависит от ρ (мы следуем терминологии В.А.Фока, см. [5]). Так интеграл W_1 выражается через интеграл Френеля и описывает старший член однократной дифракции. W_2 соответствует двукратной дифракции и может быть преобразован в обобщенный интеграл Френеля. Существенно, что в (13) интегрирование по x_n осуществляется по отрицательной части вещественной оси (отраженное поле). Фоновый член $\tilde{U}_1(M) \kappa^{-1/6}$ в (9) есть ряд многократных интегралов, аналогичных (13) и содержащих отношение функций Эйри по какой-либо одной переменной интегрирования (см. [2]). Заметим, что в работе [2] в секторе полутени для M использовались τ, α -координаты лучей соскальзывания ($\alpha = 0(\kappa^{-1/2})$). В нашем случае приближенно выполняются равенства $\tau = \nu$, $\alpha = -\rho\Phi$.

Суммирование ряда (10) осуществляется так же, как и в работе [2]. Обозначим сумму ряда интегралов с $n \geq 2$ через I , то есть

$$I = \sum_{n=2}^{\infty} \Omega_n^{n-1} W_n(\nu, \psi, \psi_c). \quad (14)$$

Выражая I через решение интегрального уравнения типа Винера-Хопфа (см. [2]), получаем, что

$$I = -\frac{\Omega}{\sqrt{\pi}} \exp\left[U(\chi\sqrt{kl}, q)\right] \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} dz \frac{e^{-z^2/4} f(z, \nu, \psi) K_-(z)}{z + \psi \exp\left[i\frac{\pi}{4}\right]}, \quad (I5)$$

где $\varepsilon > 0$. Через $U(\chi\sqrt{kl}, q)$ мы обозначили интеграл Коши-функцию Вайнштейна (см. [6]).

$$U(s, q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\ln(1 - \exp[2\pi i q - \frac{t^2}{2}])}{t - s \exp\left[\frac{i\pi}{4}\right]},$$

где $q = kl(1 - \cos \chi) / 2\pi$; $\Omega = \exp[2\pi i q]$. Через $f(z, \nu, \psi)$ обозначена функция

$$f(z, \nu, \psi) = \int_{-\infty}^0 dt \exp\left[izt - t^2 \frac{\nu}{z} + \psi e^{-i\pi/4} t\right]. \quad (I6)$$

Функция $K_-(z)$ возникает в (I5) в связи с факторизацией выражения $1 - \Omega \exp\left[-\frac{z^2}{4}\right]$ в полосе $-\beta < \Im z < \beta$, $\beta = 2|\Im \sqrt{\ln \Omega}|$ а именно

$$1 - \Omega \exp\left[-\frac{z^2}{4}\right] = K_+(z) / K_-(z),$$

$$K_+(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} dt \frac{\ln(1 - \Omega e^{-t^2/4})}{t - z}\right],$$

$$K_-(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} dt \frac{\ln(1 - \Omega e^{-t^2/4})}{t - z}\right], \quad (I7)$$

где $K_{\pm}(z)$ - функции аналитические в полуплоскостях $\Im z > a$ и $\Im z < b$ соответственно. При этом должно выполняться $-\beta < a < b < \beta$, $\varepsilon < b$.

Пользуясь равенством (I7) в виде $\exp\left[-\frac{z^2}{4}\right] K_-(z) = (K_-(z) - K_+(z)) / \Omega$ и учитывая свойство аналитичности $f(z, \nu, \psi)$ в полуплоскости $\Im z < 0$ получим

$$\frac{\Omega}{2\pi i} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} dz \frac{\exp\left[-z^2/4\right] f(z, \nu, \psi) K_-(z)}{z + \psi \exp\left[i\pi/4\right]} =$$

$$= -K_-(\psi_c e^{i\pi/4}) \cdot f(\psi_c e^{i\pi/4}, \nu, \psi) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} dz \frac{f(z, \nu, \psi) K_+(z)}{z + \psi_c \exp\left[\frac{i\pi}{4}\right]} \quad (18)$$

Воспользуемся следующим равенством

$$f(z, \nu, \psi) = \sqrt{\frac{\pi\nu}{\ell}} \exp\left[-\frac{\nu}{4\ell}(z - \psi e^{i\frac{\pi}{4}})^2\right] - \int_0^{\infty} dt \exp\left[-izt - t\frac{z}{\nu} + \psi e^{-i\frac{\pi}{4}t}\right] \quad (19)$$

в правой части которого стоит интеграл-аналитическая функция в полуплоскости $\text{Im } z > 0$. После подстановки выражения (19) для $f(z, \nu, \psi)$ интеграл в правой части (18) упрощается

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} dz \frac{f(z, \nu, \psi) K_+(z)}{z + \psi_c \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{\pi\nu}{\ell}} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} dz \frac{\exp\left[-\frac{\nu}{4\ell}(z - \psi e^{i\frac{\pi}{4}})^2\right] K_+(z)}{z + \psi_c \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)}$$

В результате проведенных выше преобразований с учетом того, что $K_-^{-1}(-\psi_c \exp\left[\frac{i\pi}{4}\right]) = \exp[U(\nu\sqrt{k\ell}, q)]$, получим сумму I в виде

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi\ell}} f(-\psi_c e^{i\frac{\pi}{4}}, \nu, \psi) + \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{\nu}{\ell}} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} dz \frac{\exp\left[-\frac{\nu}{4\ell}(z - \psi \exp\left[\frac{i\pi}{4}\right])^2\right] K_+(z)}{z + \psi_c \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)} \quad (20)$$

Первое слагаемое в правой части (19) равно интегралу $-W_1$. Тогда весь ряд (10) представляется одним интегралом

$$\tilde{U}_0(M) = \exp[U(\nu\sqrt{k\ell}, q)] \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} dz \frac{\exp\left[-\frac{\nu}{4\ell}(z - \psi e^{i\frac{\pi}{4}})^2\right] K_+(z)}{z + \psi_c \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)} \quad (21)$$

При выводе формулы для суммы рядов в фоновом члене $\tilde{U}_1(M) k^{-1/6}$ (см. (9)) важную роль играет интеграл *

$$P(\nu, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz f(-z, \nu, \psi) [K_-^{-1}(z) - 1] \quad (22)$$

*) В работе [2] возник аналогичный интеграл (см. формулу (3.22)). Он отличается от (22) тем, что в скобках имеет выражение $K_-^{-1}(z) - 1$. Это отличие возникает из-за того, что в нашем случае интегрирование в (16) происходит на промежутке $(-\infty, 0)$.

Воспользуемся равенством (19) для функции $f(z, \nu, \psi)$. В этом случае интеграл в правой части (19) будет аналитической функцией в полуплоскости $\text{Im } z < 0$. В результате интеграл $P(\nu, \psi)$ с учетом $K_{\pm}^{-1}(z) = K_{\pm}^{-1}(-z)$ упрощается и записывается в следующем виде

$$P(\nu, \psi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\nu}{\ell}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz [K_{-}^{-1}(z) - 1] \exp\left[-\frac{\nu}{4\ell} (z + \psi e^{i\frac{\pi}{4}})^2\right] =$$

$$= -1 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\nu}{\ell}} \int_{-\infty}^{+\infty} dz K_{+}(z) \exp\left[-\frac{\nu}{4\ell} (z - \psi e^{i\frac{\pi}{4}})^2\right]. \quad (23)$$

Окончательная формула для $\tilde{U}_1(M) k^{-1/6}$ имеет вид

$$\tilde{U}_1(M) k^{-1/6} = \sqrt{\frac{\ell}{\nu}} [\tilde{I}_W(\nu, \psi) + \tilde{I}_V(\nu, \psi)], \quad (24)$$

$$\tilde{I}_W(\nu, \psi) = E_W(\psi, \psi_c) + E_W(0, \psi_c) P(\nu, \psi); \quad (25)$$

$$E_W(\psi, \psi_c) = \Phi_W(\psi - \psi_c) + \Phi_W(\psi) [\exp[U(\nu\sqrt{k\ell}, q)] - 1]. \quad (26)$$

Через $\Phi_W(\psi)$ мы обозначили интеграл

$$\Phi_W(\psi) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} \omega \exp(i\frac{2\pi}{3})}{2\sqrt{\pi} \rho} \int_0^{\infty} dz \exp\left[-i\psi z \frac{1}{\tilde{\rho}}\right] \frac{W_2(z)}{W_1(z)}, \quad (27)$$

в котором $\rho = (\frac{k\rho}{2})^{1/6}$ — большой параметр, $\tilde{\rho} = 2\sqrt{\ell/\rho}$ и $W_2(z)$, $W_1(z)$ суть функции Эйри в обозначении В.А.Фока (см. [5]). Выражение для $\tilde{I}_V(\nu, \psi)$ получается из формулы (25) в результате замены $E_W(\psi, \psi_c) \rightarrow E_V(\psi, \psi_c)$. При этом выражении для $E_V(\psi, \psi_c)$ имеет вид

$$E_V(\psi, \psi_c) = \Phi_V(\psi - \psi_c) + \Phi_V(\psi) \{\exp[U(\nu\sqrt{k\ell}, q)] - 1\} \quad (28)$$

$$\Phi_V(\psi) = \frac{\exp[i\frac{5\pi}{4}]}{\sqrt{\pi} \rho} \int_0^{\infty} dz \exp\left[-i\psi z \frac{1}{\tilde{\rho}}\right] \frac{V(z)}{W_1(z)}, \quad (29)$$

где $V(z)$ — функция Эйри. Заметим, что величины $\Phi_W(\psi)$, $\Phi_V(\psi)$ при $k \rightarrow \infty$ имеют порядок малости $O(k^{-1/6})$.

Получим асимптотику поля $\tilde{U}_{\text{отр}}(\nu, \psi)$ при $\nu \rightarrow \infty$. Для этого найдем асимптотику интегралов по z в формулах (21), (23).

Рассмотрим сначала интеграл в равенстве (21). При $\nu \rightarrow +\infty$

существенная область интегрирования в нем определяется экспонентой $\exp\left[-\frac{\nu}{4l}(z-\psi e^{i\pi/4})^2\right]$. Контур интегрирования проведем через точку перевала $z_0 = \psi e^{i\pi/4}$, то есть положим $\varepsilon = \psi/\sqrt{2}$. Это обеспечивает наибольшее убывание экспоненты на контуре при $\operatorname{Re} z \rightarrow \pm \infty$, а функцию $K_+(z) \cdot (z + \psi e^{i\pi/4})^{-1}$ можно считать медленно меняющейся. Используя известную технику метода перевала, получаем при $\nu \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} dz \frac{\exp\left[-\frac{\nu}{4l}(z-\psi e^{i\pi/4})^2\right] K_+(z)}{z + \psi e^{i\pi/4}} = \sqrt{\frac{l}{\pi\nu}} \frac{K_+(\psi e^{i\pi/4})}{(\psi + \psi e^{i\pi/4}) \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right)} + O(\nu^{-3/2}).$$

Аналогичным образом находится асимптотика при $\nu \rightarrow \infty$ интеграла в формуле (23), а именно

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi l}} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} dz K_+(z) \exp\left[-\frac{\nu}{4l}(z-\psi e^{i\pi/4})^2\right] = \sqrt{\pi} K_+(\psi e^{i\pi/4}) + O(\nu^{-1}).$$

Заметим, что $K_+(\psi e^{i\pi/4}) = \exp\left[U(\psi\sqrt{kl}, q)\right]$; $\psi = \sqrt{2kl}$.

Теперь, используя (8), мы можем найти асимптотику R_n при $0 \leq \varphi_n < \mathfrak{D}k^{-1/3}$. Окончательно получаем

$$R_n = \left\{ \frac{\exp\left[U(\chi\sqrt{kl}, q) + U(\varphi_n\sqrt{kl}, q)\right]}{ikl \sin \varphi_n (\chi + \varphi_n)} + \frac{e^{i\pi/4}}{\sin \varphi_n} \sqrt{\frac{2\pi}{kl}} \left[E_W(\psi_n, \psi_c) + E_V(\psi_n, \psi_c) + (E_W(0, \psi_c) + E_V(0, \psi_c)) \exp\left[U(\varphi_n\sqrt{kl}, q)\right] - 1 \right] + O(k^{-1/3}) \right\} \exp\left[-ik\rho/l \cdot (\chi^3 + \varphi_n^3)\right], \quad (30)$$

где обозначено $\psi_n = \varphi_n \sqrt{2kl}$. Последняя экспонента в формуле (30) существенна только при $\chi = O(k^{-1/3})$ и $\varphi_n = O(k^{-1/3})$. Для значений $\varphi_n = O(k^{-1/4})$ и $\chi = O(k^{-1/4})$ ею можно пренебречь.

Первое слагаемое в фигурных скобках в (30) соответствует френелевской дифракции. Оно имеет порядок $O(1)$ при $\chi = O(k^{-1/2})$ и $\varphi_n = O(k^{-1/2})$ и ограничено при $\varphi_n = 0$. Второе слагаемое — "фоновый член" — порядка $O(k^{-1/6})$. При $\varphi_n = O(k^{-1/3})$ оба слагаемые становятся величинами одного порядка малости $O(k^{-1/6})$.

Расчет R_n при $\varphi_n = O(k^{-1/2})$ при использовании старшего члена асимптотики (30) можно выполнить с помощью таблицы значений функции Вайнштейна (см. [6]).

Взяв в (30) главный член, для $|R_n|$ получим формулу

$$|R_n| = \frac{\exp[\operatorname{Re} U(2\sqrt{\pi}q, q) + \operatorname{Re} U(2\sqrt{\pi}(q-n), q)]}{4\pi(q-n + \sqrt{q(q-n)})}, \quad (31)$$

в которой $q = kl^2\chi^2/4\pi$, $\sqrt{kl^2} \sin \varphi_n = \sqrt{4\pi(q-n)}$ при $\chi \rightarrow 0$, $k \rightarrow +\infty$. На рис.2 изображена диаграмма рассеяния волнистой периодической границы при $kl=1000$, $q=5,5$. На плоскости $x\psi$ под углами φ_n ($n=-4, 0, 3, 4, 5$) к оси x отложены векторы \vec{e}_n . Их длины пропорциональны соответствующим значениям $|R_n|$, вычисленным по формуле (31). Из рис.2 видно, что максимальную амплитуду имеет волна с номером $n=5$, в отличие от зеркально отраженной с $n=0$. С уменьшением номера n амплитуды волн уменьшаются.

Отметим следующий факт. В работе [7] изучалась задача рассеяния плоской волны на периодической структуре из наклоненных полуплоскостей. Строгое решение этой задачи было получено методом факторизации. Одним из результатов, полученных в [7], явилось построение коротковолновой асимптотики коэффициентов возбуждения R_n при скользющем падении плоской волны. Оказалось, что старший член полученной асимптотики для углов $\varphi_n = O(k^{-1/2})$ при $k \rightarrow +\infty$ совпадает с первым членом суммы в правой части (30). Это говорит о том, что френелевские дифракции в обоих задачах совпадают.

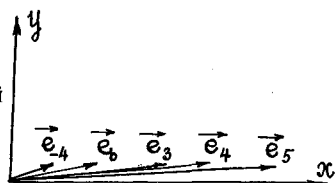


Рис.2. Диаграмма рассеяния

§ 2. Геометрооптическая асимптотика R_n .

Пусть точка наблюдения M расположена в освещенной области выше сектора полутени, то есть при $D_1 k^{-1/3} < \varphi < D_2 k^{-1/6}$. Результат для $\tilde{u}_{\text{отр}}(M)$ в этом случае мы получим, переотражая полутеневые МДП от дуги $O_1 O_2$ (см. рис.1) геометрооптическим образом и затем их суммируя.

Пусть на дугу $O_1 O_2$ падает n -кратно дифрагированное поле. Рассмотрим его френелевскую часть, описываемую выражением

$$u_{\text{над}}^{(n)} \varphi_p = \exp(ikr) \sqrt{\frac{l}{r}} \Omega^{n-1} W_n(r, \psi, \psi_c), \quad (32)$$

в котором r, ψ ($\psi = \varphi \sqrt{2kl}$) связаны с точкой O' . Соответствующее

отраженное поле получим, вычисляя асимптотику интеграла (3) при $k \rightarrow +\infty$. Для тока воспользуемся отражательной лучевой формулой (см., например, [4]).

$$\frac{\partial u}{\partial n}(s) = 2ik u_{\text{над}}^{(n)} \text{Фр}(\vec{r}(s) < \nabla r(s), \vec{n}(s) > + O(k^{-1/3}),$$

где \vec{n} - вектор внешней нормали на дуге $\tilde{O}_1 O_2$, конец вектора $\vec{r}(s)$ пробегает точки дуги $\tilde{O}_1 O_2$. В результате для $u_{\text{отр}}^{(n)} \text{Фр}(M)$ будем иметь $n+1$ -кратный интеграл. Его асимптотику при $k \rightarrow +\infty$ найдем методом стационарной фазы, выполняя обычные для этого метода переразложения и оценки. (В приложении приводится пример построения асимптотики при $n=1$). Тогда мы получим

$$u_{\text{отр}}^{(n)} \text{Фр}(M) = -\exp[ik(z_1 + z_2) - i\Delta] \cdot \mathcal{J}^{-1/2} \cdot W_n(z_1, \psi, \psi_0) + O(k^{-1/3}), \quad (33)$$

где $\Delta = (\psi_c + \psi_0)^2 s_0^2 r_1^2 / 8l^3$ и

$$\mathcal{J} = (r_1 + r_2 + 2r_1 r_2 / \rho \sin \theta) / l$$

геометрическая расходимость лучей отраженного от дуги $\tilde{O}_1 O_2$ полутеневого поля. Параметры $r_1 = OA + |AB|$, $r_2 = |BM|$ (см. рис. I) характеризуют переотраженный луч соскальзывания АВМ. В точка его отражения - отстоит от вершины горба на длину дуги s_0 и $-c_1 k^{-1/6} < s_0 < -c_2 k^{-1/3}$, θ - угол скольжения этого луча ($-s_0 \approx \rho \theta$) и параметр $\psi_0 = -s_0^2 \sqrt{k/2l} / \rho$.

Фоновые части, падающих на горб МДП, имеют лучевую структуру. Поэтому они переотражаются по законам геометрической оптики.

Существенно, что структура n -кратных интегралов полутеневых МДП после геометрикооптического отражения не изменилась. Поэтому их суммирование осуществляется также, как и в работе [2].

Обозначим через $\tilde{u}_{\text{отр}}^{\text{го}}(M)$ результат геометрикооптического отражения полутеневого поля $u(x, y)$ падающего на дугу $\tilde{O}_1 O_2$ слева. Тогда получим

$$\tilde{u}_{\text{отр}}^{\text{го}}(M) = u_0^{\text{го}}(M) + \exp[ik(r_1 + r_2 - \rho \chi^3 / 6)] \{ U_0^{\text{го}}(M) + U_1^{\text{го}}(M) k^{-1/6} + O(k^{-1/3}) \} \quad (34)$$

где $u_0^{\text{го}}$ - есть результат отражения плоской волны $u_{\text{над}}$ от дуги $\tilde{O}_1 O_2$, а для рядов МДП в членах $U_0^{\text{го}}$ и $U_1^{\text{го}} k^{-1/6}$ после их суммирования возникают выражения

$$U_0^{\text{го}}(M) = \mathcal{J}^{-1/2} \cdot \exp[U(\chi \sqrt{k l}, q) - i\Delta].$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon} dz \frac{\exp\left[-\frac{z_1}{4\ell}(z+\psi_0 e^{i\pi/4})^2\right] K_+^{-1}(z)}{z - \psi_0 \exp(i\pi/4)} \quad (35)$$

$$U_1^{r_0}(M) \cdot k^{-1/6} = -\gamma^{-1/2} \cdot [I_W(r_1, \psi_0) + I_V(r_1, \psi_0)], \quad (36)$$

где $\varepsilon > 0$. Величины $I_W(r_1, \psi_0)$, $I_V(r_1, \psi_0)$ вычисляются по формуле (25), если в интеграле $P(r, \psi)$ заменить $K_+(z)$ на $K_+^{-1}(z)$. В формулах (35), (36) следует учесть, что $z_1 = l + s_0 + 0(s_0^3)$ т.е. точка отражения В близка к вершине горба.

Если точка М поднимается очень высоко в освещенной области, то соответствующий ей луч АВМ отразится от горба в точке, упаленной от вершины О на длину дуги $s_0 < -c_1 k^{-1/6}$, то есть в глубокой тени. Соответствующее поле $\tilde{u}_{\text{отр}}^{r_0}(M)$ будем экспоненциально малой величиной.

Отметим, что формула (34) для $\tilde{u}_{\text{отр}}^{r_0}(M)$ в сумме с соответствующим падающим полем дополняет асимптотику полутеневого поля $u(x, y)$, построенную в [2]. Это поле $\tilde{u}_{\text{отр}}^{r_0}(M)$ необходимо учитывать в случае, когда точка наблюдения М расположена вблизи и слева от зоны Фока, а также и выше сектора полутени.

Найдем асимптотику $\tilde{u}_{\text{отр}}^{r_0}(M)$ при $r_2 \rightarrow +\infty$ ($r \approx r_2$), используя формулы (34)–(36). Старший член её приводит (см. (8)) к выражению для R_n , если $\varphi = \varphi_n$. Тогда при $D_1 k^{-1/3} < \varphi_n < D_2 k^{-1/6}$ будем иметь следующую асимптотику для R_n

$$R_n = \frac{e^{i\pi/4}}{\sin \varphi_n} \sqrt{\frac{2\pi}{k\ell}} \left\{ u_0(\varphi_n) + \exp\left[ik(r_1 - x(s_0)\cos\varphi_n - y(s_0)\sin\varphi_n - \rho\chi^3/6) + \right. \right. \\ \left. \left. + U(\chi\sqrt{k\ell}, \varphi) - i\Delta\right] \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\exp\left[-(z+\psi_0 e^{i\pi/4})^2/4\right] K_+^{-1}(z)}{z - \psi_0 \exp(i\pi/4)} \cdot \left(1 + \frac{2\ell}{\rho \sin\theta}\right)^{-\frac{1}{2}} + 0(k^{-1/6}) \right\}, \quad (37)$$

где $2\theta = \varphi_n$, $-s_0 = \rho\theta = \rho\varphi_n/2$, $\psi_0 = -\varphi_n^2 \rho \sqrt{k/2\ell}/4$.

Первый член суммы $u_0(\varphi_n)$ в фигурных скобках в (37) соответствует плоской волне, отраженной от дуги $0_1 0_2$ горба в точке C_* , определяемой длиной дуги s_* и с углом скольжения луча θ_* . Функция $u_0(\varphi_n)$ – диаграмма отраженной плоской волны – имеет вид

$$u_0(\varphi_n) = u_{\text{наг}}(C_*) \exp\left[-ik(x(s_*)\cos\varphi_n + y(s_*)\sin\varphi_n)\right] \sqrt{\rho \frac{\sin\theta_*}{2\ell}}.$$

В формуле (37) мы ограничились лишь френелевской частью геометрико-оптического отражения, которая имеет порядок $O(k^{-1/3})$ при $\varphi_n = O(k^{-1/3})$.

"Фоновый член" при этом порядка $O(k^{-1/2})$. С увеличением угла φ_n порядок обоих членов убывает. Формула (37) доступна для расчетов на ЭВМ.

В заключении автор выражает признательность М.М.Попову за полезное обсуждение статьи и конструктивные замечания.

Приложение

Пусть на дугу $O_1 O_2$ падает полутеневое однократно дифрагированное поле (см. рис. I). Рассмотрим его френелевскую часть

$$u_{\text{над ФР}}^{(1)} = e^{ikr_1} \sqrt{\frac{\ell}{r_1}} W_1(r_1, \psi_1, \psi_c), \quad \psi_1 = \varphi_1 \sqrt{2\lambda k \ell}, \quad (\text{П1})$$

где r_1, φ_1 - полярные координаты, связанные с точкой O' , $r_1 = O(1)$, $\varphi_1 = O(k^{-1/2})$ при $k \rightarrow +\infty$. В интеграле $W_1(r_1, \psi_1, \psi_c)$ (см. (II)) сделаем замену переменной интегрирования $x_i = \exp(-i\pi/4)x$. Тогда получим

$$W_1(r_1, \psi_1, \psi_c) = \frac{e^{i\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathcal{L}} dz \exp\left(iz^2 \frac{\ell}{r_1} - iz(\psi_1 + \psi_c)\right), \quad (\text{П2})$$

где \mathcal{L} - контур интегрирования ($\infty e^{i5\pi/4}, 0$].

Результат геометрикооптического отражения поля $u_{\text{над ФР}}^{(1)}$ от дуги $O_1 O_2$ получим, вычисляя асимптотику контурного интеграла (3) при $k \rightarrow +\infty$ с учетом (5). При этом в качестве области интегрирования в (3) достаточно взять интервал длины дуги $-C_1 k^{-1/6} < s < -C_2 k^{-1/3}$, а для тока воспользоваться асимптотикой

$$\frac{\partial u}{\partial n}(s) = 2ik u_{\text{над ФР}}^{(1)}(\vec{r}_1(s)) \cdot \langle \nabla r_1(s), \vec{n}(s) \rangle + O(k^{-1/3}),$$

где $\vec{n}(s)$ - вектор внешней нормали на дуге $O_1 O_2$, $\vec{r}_1(s)$ - вектор, соединяющий O' и точку интегрирования на дуге $O_1 O_2$. Обозначая отраженное поле через $u_{\text{отр ФР}}^{(1)}$, будем иметь

$$u_{\text{отр ФР}}^{(1)}(M) = -\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi k}} 2ik \int ds e^{ik(r_1(s) + r_2(s))} \langle \nabla r_1(s), \vec{n}(s) \rangle \sqrt{\frac{\ell}{r_1(s) \cdot r_2(s)}}. \quad (\text{П3})$$

$$\cdot W_1(r_1(s), \psi_1(s), \psi_c) + O(k^{-1/3}),$$

где $r_2(s)$ — длина вектора, соединяющего точку интегрирования с точкой M . Отметим, что при $s \in (-c_1 k^{-1/6}, -c_2 k^{-1/3})$ приближенно выполняются равенства $\varphi_1 = -s^2/2\rho\ell$ и $\psi_1(s) = -s^2\sqrt{k/2\ell}/\rho$.

Введя в (П.2) вместо z переменную интегрирования $\zeta = k^{-1/2}z$, представим $u_{\text{отр ФР}}^{(1)}$ в виде двойного интеграла по соответствующей области \mathcal{D}

$$u_{\text{отр ФР}}^{(1)} = \frac{ik}{\pi\sqrt{2}} \iint_{\mathcal{D}} ds dz e^{ik\varphi(s,\zeta)} \sqrt{\frac{\ell}{r_1(s)r_2(s)}} \langle \nabla r_1(s), \vec{n}(s) \rangle + O(k^{-1/3}) \quad (\text{П4})$$

$$\varphi(s,\zeta) = r_1(s) + r_2(s) + \zeta^2 \frac{\ell}{r_1(s)} - \zeta(\psi_c + \psi_1(s)) k^{-1/2}. \quad (\text{П5})$$

При $k \rightarrow +\infty$ величина интеграла в (П4) определяется малой окрестностью стационарной точки (s_0, ζ_0) фазовой функции $\varphi(s, \zeta)$. При этом s_0, ζ_0 находятся из уравнений

$$\begin{aligned} r_1'(s_0) + r_2'(s_0) - \zeta_0 \psi_1'(s_0) k^{-1/2} - \zeta_0^2 \frac{\ell}{r_1^2(s_0)} r_1'(s_0) &= 0 \\ 2\zeta_0 \frac{\ell}{r_1(s_0)} - (\psi_c + \psi_1(s_0)) k^{-1/2} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П6})$$

Введем обозначения $\psi_1(s_0) = \psi_0$, $r_1(s_0) = r_1$, $r_2(s_0) = r_2$. Из второго уравнения системы (П6) имеем

$$\zeta_0 = (\psi_0 + \psi_c) k^{-1/2} r_1 / 2\ell. \quad (\text{П7})$$

Так как ζ_0 имеет порядок $O(k^{-1/2})$, то первое уравнение системы (П6) приводится к более простому уравнению для определения s_0 , а именно $r_1'(s_0) + r_2'(s_0) = 0$. Мы получаем таким образом, что луч АВМ (см. рис. I) отражается от дуги $\tilde{O}_1 O_2$ по закону геометрической оптики с углом скольжения θ ($s_0 \approx \rho\theta$, $s_0 \in (-c_1 k^{-1/6}, -c_2 k^{-1/3})$).

При вычислении старшего члена асимптотики $u_{\text{отр ФР}}^{(1)}$ при $k \rightarrow \infty$ достаточно ограничиться квадратичными членами в разложении Тейлора для функции $\varphi(s, \zeta)$

$$\varphi(s,\zeta) = \varphi(s_0, \zeta_0) + \varphi_s''(s-s_0)^2/2 + \varphi_{s\zeta}''(s-s_0)(\zeta-\zeta_0) + \varphi_\zeta''(\zeta-\zeta_0)^2/2 + \dots, \quad (\text{П8})$$

где частные производные берутся в стационарной точке. Для них и для $\varphi(s_0, \zeta_0)$ приближенно получаем

$$\begin{aligned} \varphi_s'' &= r_1''(s_0) + r_2''(s_0) = \frac{2 \sin \theta}{\rho} + \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \sin^2 \theta \approx 2s_0/\rho^2 \\ \varphi_{s\zeta}'' &= -\psi_1'(s_0) k^{-1/2} = \frac{s_0}{\rho} \sqrt{\frac{2}{\ell}} \end{aligned} \quad (\text{П9})$$

$$\varphi_s'' = 2\ell/\nu_1$$

$$k\varphi(s_0, \zeta_0) = k(\nu_1 + \nu_2) - (\psi_c + \psi_0)^2 \frac{\nu_1}{4\ell} \quad (\text{П10})$$

При малых значениях $s - s_0$ будем иметь

$$\langle \nabla \nu_1(s), \vec{n}(s) \rangle / \sqrt{\nu_1(s) \nu_2(s)} = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{\nu_1 \nu_2}} + \dots \quad (\text{П11})$$

Введем в (П4) новую переменную $t=0(1)$ вместо s по формуле $t^2 = \varphi_s''(s-s_0)^2 k/\lambda$, заменим $\varphi(s, \zeta)$ согласно (П8) и вернемся к старой переменной $z = k^{1/2} \zeta$. После этого применение соответствующих оценок метода стационарной фазы (см. [8]) к интегрированию в (П4) по s с учетом (П11) дает для старшего члена асимптотики $u_{\text{отр ФР}}^{(1)}$ выражение

$$u_{\text{отр ФР}}^{(1)} = \frac{-i e^{ik\varphi(s_0, \zeta_0)}}{\sqrt{\pi \nu_2 \varphi_s''}} \sqrt{\frac{\ell}{\nu_1}} \sin \theta \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{\mathcal{L}} dz \exp(it^2 + \lambda it(z - z_0) + i(z - z_0)^2 \frac{\ell}{\nu_1}) + O(k^{-3/2}) =$$

$$= -\sqrt{\frac{\ell}{\nu_1 \nu_2 \varphi_s''}} \sin \theta \frac{\exp(i\frac{3}{4}\pi + ik\varphi(s_0, \zeta_0))}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathcal{L}} dz \exp(i(z - z_0)^2 (\frac{\ell}{\nu_1} - \delta^2)) + O(k^{-1/2}), \quad (\text{П12})$$

где $z_0 = (\psi_0 + \psi_c) \nu_1 / 2\ell$, $\delta^2 = \varphi_s'' / 2\varphi_s'' \approx s_0 / 2\ell$. Отметим, что интегрирование по z в (П12) не упрощается, так как стационарная точка (s_0, ζ_0) близка к краю $\zeta = 0$ области интегрирования в двойном интеграле (П4).

Упростим интеграл в (П12) с учетом (П9) и (П10), после чего получим

$$u_{\text{отр ФР}}^{(1)} = -\exp(ik(\nu_1 + \nu_2) - i\Delta) J^{-1/2} \frac{e^{i\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathcal{L}} dz \exp(iz^2 (\frac{\ell}{\nu_1} - \delta^2) - \lambda iz z_0 (\frac{\ell}{\nu_1} - \delta^2)) + O(k^{-1/2}) \quad (\text{П13})$$

$$J = (\nu_1 + \nu_2 + 2\nu_1 \nu_2 / \rho \sin \theta) / \ell,$$

где $\Delta = (\psi_0 + \psi_c)^2 s_0 \nu_1^2 / 8\ell^3$. Пренебрегая величиной δ^2 в (П13) и считая, что $\nu_1 \approx \ell$, мы приходим к формуле (32) при $n=1$. Случай $n \geq 2$ рассматривается аналогично.

Литература

1. З а л и п а е в В.В., П о п о в М.М. Коротковолновое скользящее рассеяние плоской волны на гладкой периодической границе. I. - В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 17. Зап. научн. семина. ЛОМИ, 1987, т.165, с.59-90.
2. З а л и п а е в В.В., П о п о в М.М. Коротковолновое

- скользящее рассеяние плоской волны на гладкой периодической границе. II. - В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 18. Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1988, т. 173, с. 60-86.
3. Б а б и ч В.М., К и р п и ч н и к о в а Н.Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. ЛГУ, 1974.
 4. Б у л д ы р е в В.С., Л я л и н о в М.А. Равномерная и локальная асимптотика волнового поля в полутени в задаче дифракции коротких волн на гладком выпуклом контуре. - В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 15 Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1985, т. 148, с. 34-41.
 5. Ф о к В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970.
 6. В а й н ш т е й н Л.А. Теория дифракции и метод факторизации. М., 1966.
 7. З а л и п а е в В.В. Коротковолновое скользящее рассеяние на периодических наклоненных полуплоскостях. - В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. 19. Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1989, т. 179, с. 58-66.
 8. Ф е д о р ю к М.В. Метод перевала. М., 1977.

Budaev B.V. Diffraction of elastic waves on the wedge-like obstacles.

By the technique of Sommerfeld integrals the problem of diffraction is reduced to some functional equation in a complex domain, known in literature as ones with a non-Carleman shift. By the theory of pseudodifferential operators these equations are transformed to Fredholm's integral equations.

Zalipaev V.V. Asymptotics of the radiating plane wave coefficients in the scattering problem on a smooth periodic boundary.

Scattering problem of a plane wave on a smooth periodic curve in the case of small grazing angle and shortwave approximation is considered (period and radius of curvature of the curve are supposed to be large in compare with wave length). Using the solution previously obtained as an infinite sum of multiple diffracted fields in the vicinity of reflecting boundary the shortwave asymptotics of the coefficients of radiating plane waves is derived.