

МЕТОД РАСЧЕТА ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ВОЛН
В ВЕРТИКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Введение

В работе [1] описана методика расчета интерференционных поверхностных волн SH (волн Лява) в вертикально-неоднородном полупространстве с произвольной зависимостью модуля сдвига и плотности от глубины. Расчет той части возмущений, которая не связана с волнами Лява в этой работе не приводился. Имеющиеся теоретические исследования (см. [7] и [5]) указывают на то, что оставшаяся часть возмущений может быть эффективно описана с помощью интерференционных волн с комплексными волновыми числами (или фазовыми скоростями), получивших название "просачивающихся" (*leaking*) волн. В настоящей работе описывается способ вычисления таких волн. Он связан с нахождением комплексных собственных значений и собственных функций одномерной краевой задачи типа Штурма-Лиувилля с несамосопряженными краевыми условиями. Хотя такие вопросы и рассматривались рядом авторов, (см. [4] - [7]), методика численного расчета комплексных собственных значений и собственных функций до сих пор была изучена недостаточно. В работе описываются также некоторые свойства собственных значений и собственных функций, полученные из рассмотрения результатов расчетов. Эти свойства оказываются полезными при исследовании волн, а также интересны и с математической точки зрения.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить М.Г.Нейгауз и А.Л.Левшина за постоянное внимание и многочисленные ценные советы.

§ I. Постановка задачи.

I. Рассматривается задача распространения волн SH в вертикально-неоднородном упругом полупространстве $\infty > r \geq 0$, $\infty > z \geq 0$, $2\pi > \varphi \geq 0$. Предполагается, что модуль сдвига $\mu(z)$ и плотность $\rho(z)$ обладают следующими свойствами I-4.

1. $\mu(z) > 0$, $\rho(z) > 0$ при всех $z \geq 0$.

2. μ и ρ - кусочно-непрерывные функции z .

3. начиная с некоторого $z = H$ среда однородна, т.е.
при $z \geq H$ $\mu(z) = M = \text{const}$, $\rho(z) = R = \text{const}$.

4. обозначим $v(z) = \sqrt{\frac{\mu(z)}{\rho(z)}}$ ($v(z)$ - локальная скорость распространения волн SH); тогда $v(H+0) > v(z)$ при $z < H$.

Предположим, что осесимметричный, локализованный по времени и пространству источник описывается функцией $F(t, r, z)$ - силой,

действующей на единицу объема вещества в точке с координатами (r, z, φ) в момент времени t . На функцию F наложены следующие ограничения:

1. $F(t, r, z)$ - финитная функция всех своих аргументов.
2. $F=0$ при $t < 0$.

Найдем смещение u , вызываемое полем F в точке (r, z, φ) в момент времени t . При этом физически интересным является случай, когда $z < H, r \gg z$, $r \gg$ радиуса носителя F , $t \gg$ времени действия F . Ясно, что при наших условиях u будет зависеть лишь от t, r, z .

Функция $u=u(t, r, z)$ удовлетворяет уравнению (см. [8])

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F(t, r, z). \quad (I)$$

При этом выполнены следующие граничные условия

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (2)$$

и начальные условия

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (3)$$

Кроме того, требуется непрерывность u и

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4)$$

(условия жесткого контакта).

2. Будем искать $u(t, r, z)$ в виде

$$u(t, r, z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \int_{\Gamma} V(\omega, \xi, z) J_1(\xi r) \xi d\xi d\omega, \quad (5)$$

где контур Γ проходит на плоскости ξ от 0 до ∞ вдоль вещественной оси, обходя вещественные полюса V (если они есть) по малым полуокружностям, лежащим в верхней полуплоскости; здесь J_1 - функция Бесселя первого рода первого значка.

Функцию F можно представить в аналогичном виде (см. [3])

$$F(t, r, z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \int_{\Gamma} f(\omega, \xi, z) J_1(\xi r) \xi d\xi d\omega, \quad (6)$$

причем функция $f(\omega, \xi, z)$ продолжается до целой функции комплексных переменных ω и ξ . Подставляя разложения (5) и (6) в уравнение (I), производя дифференцирование под знаком интеграла и пользуясь единственностью разложения Фурье-Бесселя, получаем, что уравнение (I) эквивалентно следующему обыкновенному дифференциальному уравнению для функции $V(\omega, \xi, z)$

$$\frac{d}{dz} \left(\mu \frac{dV}{dz} \right) + (\omega^2 \rho - \xi^2 \mu) V = -f. \quad (7)$$

При этом условия (2) - (4) на функцию u переходят в следующие условия (8) - (10) на функцию V (см. [1])

$$\mu \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{dV}{dz} \Big|_{z=H} = -\gamma V \Big|_{z=H}, \quad \text{где } \gamma = \sqrt{\xi^2 - \frac{R}{M} \omega^2}, \quad \operatorname{Re} \gamma > 0 \quad (9)$$

$$V \quad \text{и} \quad \mu \frac{dV}{dz} \quad \text{непрерывны.} \quad (10)$$

Для нахождения u нам достаточно найти решение уравнения (7) с условиями (8) - (10) для всех вещественных положительных ω и для ξ , лежащих на контуре Γ , и затем произвести интегрирование по ω и ξ . Заметим, однако, что уравнение (7) - (10) имеет смысл для всех комплексных ξ , а $f(\omega, \xi, z)$ - целая функция ξ . Поскольку в определении V входит квадратный корень $\gamma = \sqrt{\xi^2 - \frac{R}{M} \omega^2}$, то V является двузначной функцией от ξ (при фиксированных ω и z) с точками ветвления $\xi = \pm \omega \sqrt{\frac{R}{M}}$. Мы будем считать, что ξ лежит на "+" листе, если $\operatorname{Re} \gamma \geq 0$ и на "-" листе, если $\operatorname{Re} \gamma < 0$.

3. Будем решать уравнение (7) на отрезке $[0, H]$ с граничными условиями (8) - (10); при этом ω предполагается вещественным, а ξ - произвольным комплексным числом. Рассмотрим соответствующее (7) однородное уравнение

$$\frac{d}{dz} \left(\mu \frac{d\tilde{V}}{dz} \right) + (\omega^2 \rho - \xi^2 \mu) \tilde{V} = 0 \quad (11)$$

на отрезке $[0, H]$ с прежними граничными условиями в точках 0 и H .

$$\mu \frac{d\tilde{V}}{dz} \Big|_{z=0} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{d\tilde{V}}{dz} \Big|_{z=H} = -\gamma \tilde{V} \Big|_{z=H}, \quad \gamma = \sqrt{\xi^2 - \frac{R}{M} \omega^2}, \quad (13)$$

$$\tilde{V} \quad \text{и} \quad \mu \frac{d\tilde{V}}{dz} \quad \text{непрерывны.} \quad (14)$$

Число ξ назовем собственным значением (при заданном ω), если у уравнения (11) с граничными условиями (12) - (14) существует ненулевое решение; соответствующее решение назовем собственной функцией. Легко проверить, что если ξ собственное значение, то $-\xi, \bar{\xi}, -\bar{\xi}$ тоже собственные значения (при том же ω) и $\tilde{V}(\omega, -\xi, z) = \tilde{V}(\omega, \xi, z)$, $\tilde{V}(\omega, \bar{\xi}, z) = \overline{\tilde{V}(\omega, \xi, z)}$.

Назовем собственное значение физическим, если в условии (I3) $\operatorname{Re} \gamma > 0$, т.е. ξ лежит на "+" листе, и нефизическим, если $\operatorname{Re} \gamma < 0$, т.е. ξ лежит на "-" листе. Поведение физических собственных значений описано в работе [I]. Для полноты сформулируем соответствующий результат.

Предложение I.

1. Если ξ физическое собственное значение, то ξ^2 вещественно.

2. Положим $b_1 = \max_{0 \leq z \leq H} b(z)$, $b_2 = \min_{0 \leq z \leq H} b(z)$ тогда $\frac{\omega^2}{b_1} \leq \xi^2 \leq \frac{\omega^2}{b_2}$; в частности, ξ - вещественно.

Решение задачи (7) - (10) найдем следующим стандартным способом. Для каждого ω и ξ рассмотрим 2 решения \tilde{V}_1 и \tilde{V}_2 уравнения (II), удовлетворяющих следующим граничным условиям

$$\tilde{V}_1(\omega, \xi, 0) = 1, \quad \tilde{V}_1'(\omega, \xi, 0) = 0 \quad (I5)$$

и

$$\tilde{V}_2(\omega, \xi, H) = 1, \quad \tilde{V}_2'(\omega, \xi, H) = -\gamma. \quad (I6)$$

Пусть

$$W(\omega, \xi, z) = \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial z} \tilde{V}_2 - \frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial z} \tilde{V}_1. \quad (I7)$$

Тогда

$$W_1(\omega, \xi) = \mu(z) W(\omega, \xi, z) \quad (I8)$$

не зависит от z .

Легко проверить, что $W_1(\omega, \xi) = 0$ тогда и только тогда, когда ξ - собственное значение.

Далее, легко проверить, что функция $V(\omega, \xi, z)$, определенная формулой

$$V(\omega, \xi, z) = \frac{1}{W_1(\omega, \xi)} \left[\tilde{V}_2(\omega, \xi, z) \int_0^z \tilde{V}_1(\omega, \xi, x) f(\omega, \xi, x) dx + \tilde{V}_1(\omega, \xi, z) \int_z^H \tilde{V}_2(\omega, \xi, x) f(\omega, \xi, x) dx \right] \quad (I9)$$

удовлетворяет уравнению (7) с граничными условиями (8) - (10), т.е. дает решение нашей задачи.

Мы хотим привести внутренний интеграл в (5) к возможно более простому виду путем сдвига контура интегрирования Γ на плоскости комплексного переменного ξ . Выражение (I9) позволяет определить необходимые для этого особенности V как функции ξ . Прежде всего, заметим, что для задания V мы должны однозначно выбрать ветвь корня, входящего в граничное условие (I6) для функции \tilde{V}_2 . Для этого проведем на плоскости ξ разрез от точки $\xi = \frac{\omega}{b_1}$ вертикально вниз. Тогда $\gamma = \sqrt{\xi^2 - \frac{R}{M} \omega^2}$ является однозначной аналитической функцией ξ в правой полуплоскости с таким разрезом. Мы считаем при этом, что выбрана та из ветвей γ , для которой $\operatorname{Re} \gamma > 0$ при

вещественных ξ . Легко видеть, что ξ лежит на "-" листе при $\text{Im } \xi < 0$, $0 \leq \text{Re } \xi < \frac{\omega}{b_1}$ область II и на "+" листе в остальных точках правой полуплоскости (область I).

После этого функция $V(\omega, \xi, z)$, определенная формулой (19), становится однозначной аналитической функцией от ξ (при фиксированных ω и z). Легко видеть, что единственными особыми точками функции V будут при этом те точки ξ , в которых $W_1(\omega, \xi) = 0$, т.е. собственные значения однородной краевой задачи (II)-(I4). При этом полюса, лежащие в области I (см. рис. I),

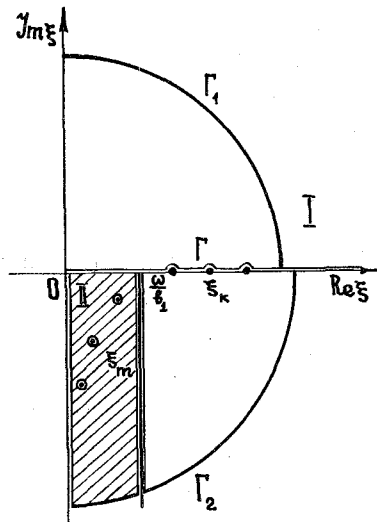


Рис. I.

соответствуют физическим собственным значениям и, значит, могут быть расположены лишь на вещественной оси $\text{Im } \xi = 0$ между точками $\frac{\omega}{b_1}$ и $\frac{\omega}{b_2}$. Кроме того, могут быть полюса в области II (см. рис. I), соответствующие нефизическим собственным значениям.

Перейдем теперь к преобразованию интеграла

$$\int_{\Gamma} V(\omega, \xi, z) J_1(\xi r) \xi d\xi. \quad (20)$$

Для этого представим его в виде

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} V H_1^{(u)} \xi d\xi + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} V H_1^{(a)} \xi d\xi, \quad (21)$$

где $H_1^{(u)}$ и $H_1^{(a)}$ - функции Ханкеля.

Сдвигая контур Γ в каждом из двух полученных интервалов и используя свойства функций Ханкеля (см. [8], [7]), получим

$$\int_{\Gamma} V J_1 \xi d\xi = \pi i \left[\sum_{\xi_k} \text{Res} V H_1^{(a)} \xi + \sum_{\xi_m} \text{Res} V H_1^{(u)}(\xi) \right] + \frac{1}{2} \int_{C_2} V H_1^{(a)} \xi d\xi, \quad (22)$$

где ξ_k - физические собственные значения, лежащие на вещественной оси, ξ_m - нефизические собственные значения, лежащие в области $\text{Im } \xi < 0$, $0 < \text{Re } \xi < \frac{\omega}{b_1}$; C_2 - контур, идущий по обоим берегам разреза (см. рис. I).

Члены первой суммы в (22) описывают волны Лява (*normal modes*), члены второй суммы - просачивающиеся волны (*leaking modes*), \int_{C_2} - интерференционную головную волну.

Для нахождения вычетов при фиксированных ω и z положим

$$A(\xi) = \frac{\tilde{V}_2(\omega, \xi, z) \int_0^z \tilde{V}_1(\omega, \xi, x) f(\omega, \xi, x) dx + \tilde{V}_1(\omega, \xi, z) \int_z^H \tilde{V}_2(\omega, \xi, x) f(\omega, \xi, x) dx}{\mu(H) \tilde{V}_1(\omega, \xi, H)} \quad (23)$$

$$B(\xi) = \frac{\tilde{V}_1'(\omega, \xi, H)}{\tilde{V}_1(\omega, \xi, H)} + \gamma \quad (24)$$

так, что

$$V(\omega, \xi, z) = \frac{A(\xi)}{B(\xi)}.$$

Тогда в точке ξ_m (полюсе подынтегрального выражения) $B(\xi_m) = 0$ и

$$\operatorname{Res} V H_1^{(2)} \Big|_{\xi_m} = \frac{A(\xi_m) H_1^{(2)}(\xi_m) \xi_m}{B'(\xi_m)}. \quad (25)$$

Положим

$$\Psi(\omega, \xi, z) = \frac{d\tilde{V}_1}{dz} \Big|_{\tilde{V}_1} \quad (26)$$

и

$$\varphi(\omega, \xi, x) = e^{\int \Psi(\omega, \xi, \lambda) d\lambda}. \quad (27)$$

Тогда

$$A(\xi_m) = \frac{\varphi(\omega, \xi_m, z) \int_0^H \varphi(\omega, \xi_m, x) f(\omega, \xi_m, x) dx}{\mu(H) \varphi^2(\omega, \xi_m, H)}, \quad (28)$$

Отсюда

$$B(\xi) = \Psi(\omega, \xi, H) + \gamma.$$

$$B'(\xi_m) = \frac{\partial \Psi(\omega, \xi, H)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_m} + \frac{\xi_m}{\gamma}. \quad (29)$$

В следующем параграфе мы опишем способ вычисления собственных значений ξ и величин $A(\xi_m)$, $B'(\xi_m)$, входящих в выражение (25).

§ 2. Вычисление собственных значений.

Алгоритм, позволяющий вычислять собственные значения и соответствующие им слагаемые в (22), основан на методе прогонки (см. [1]). Отметим прежде всего, что согласно (22) нам нужно исследовать собственные значения, лежащие на "-" листе в 4-ом квадранте.

Для каждого вещественного ω и комплексного ξ введем функцию $y(z)$ по формуле

$$y(z) = \frac{i + \mu \frac{\tilde{V}_1'}{\tilde{V}_1}}{i - \mu \frac{\tilde{V}_1'}{\tilde{V}_1}},$$

где \tilde{V}_1 - решение уравнения (II) с условиями (I5).

Функция $y(z)$ удовлетворяет неоднородному уравнению первого порядка

$$y_z' = -\frac{1}{z} i [-(\omega^2 p - \xi^2 \mu)(1+y)^2 + \frac{1}{\mu}(1-y)^2] \quad (30)$$

и начальному условию

$$y(0) = 1. \quad (31)$$

Пусть

$$\Phi(\xi) = y(H) - \frac{i+M\sqrt{\xi^2 - \frac{\omega^2 R^2}{M}}}{i-M\sqrt{\xi^2 - \frac{\omega^2 R^2}{M}}} \quad (32)$$

Поскольку нас интересуют значения ξ , лежащие на "-" листе, мы считаем, что $\operatorname{Re} \gamma < 0$.

Величина ξ будет собственным значением тогда и только тогда, когда

$$\Phi(\xi) = 0. \quad (33)$$

Покажем, что величины $A(\xi)$ и $B'(\xi)$ выражаются через y . Во-первых, $\Psi(\omega, \xi, z) = \frac{i(1+y)}{\mu(1+y)}$. Далее, для вычисления $B'(\xi_m)$ мы заменяем $\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}$ на $\frac{\Psi(\omega, \xi_m + \Delta \xi, z) - \Psi(\omega, \xi_m, z)}{\Delta \xi}$, где $\Delta \xi$ - заранее заданное приращение.

Для вычисления $A(\xi)$ проще всего поступить следующим образом. Как будет указано ниже, уравнение (30) удобнее интегрировать слева направо, т.е. от 0 к H . Поэтому сначала мы вместе с $y(z)$ вычисляем $\Psi(z)$, $\varphi(z) = e^{\int_0^z \Psi(\lambda) d\lambda}$, а также $\int \varphi(\lambda) f(\lambda) d\lambda$. Проинтегрировав таким образом уравнение до точки H и вычислив

$$C = \frac{\int_0^H \varphi(\omega, \xi_m, x) f(\omega, \xi_m, x) dx}{\mu(H) \varphi^2(\omega, \xi_m, H)}$$

мы интегрируем уравнение (30) снова при том же ξ_m и вычисляем

$$A(\xi_m) = \varphi(\omega, \xi_m, z) \cdot C.$$

2. Решение $y(z)$ ищется по трехчленной формуле Рунге-Кутты с переменным шагом, при этом интегрирование ведется слева направо, т.е. от 0 к H . Для этого уравнение (30) для комплексной функции $y(z)$ записывается в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для вещественной и мнимой части функции $y(z)$. Функции $\mu(z)$ и $\rho(z)$ задаются табличным способом; в точках, промежуточных между узлами таблицы производится полиномиальная интерполяция.

Величина h шага интегрирования выбирается по формуле $h = \min(h_{\max}, h_1)$, где h_{\max} - задаваемый заранее максимально возможный шаг интегрирования, а h_1 вычисляется на каждом шагу заново следующим образом. Пусть после некоторого числа K шагов сосчитано приближенное решение уравнения (30) в точке $z_0 \in [0, H]$ и $y(z_0) = y_0$. Положим $\mu_0 = \mu(z_0)$, $\rho_0 = \rho(z_0)$, и для каждого x обозначим через $\tilde{y}(x)$ - значение в точке $z_0 + x$ решения уравнения, в котором μ и ρ заменены на μ_0 и ρ_0 соответственно, с начальным условием $\tilde{y}(z_0) = y_0$. Через $\tilde{y}(x)$ обозначим решение такого же уравнения в той же точке $z_0 + x$, полученное по трехчленной формуле Рунге-Кутты с шагом x . Тогда h_1 определяется как наибольшее

значение x , при котором выполнено неравенство $|\tilde{y}(x) - \tilde{y}(x)| < \varepsilon$, где ε - число, выбираемое по заданной точности решения задачи.

Выбор направления интегрирования уравнения (30) (от 0 к H) обусловлен следующим. Пусть ξ таково, что $\operatorname{Re} \xi \neq 0$, $\operatorname{Im} \xi \neq 0$ и $y(\omega, \xi, z)$ - решение уравнения (30) с начальным условием (31). Тогда $|y(z)| \neq 1$ для всех $z > 0$. Если, кроме того, $\operatorname{Re} \xi > 0$, $\operatorname{Im} \xi < 0$, то $|y(z)| < 1$ при $z > 0$.

Для доказательства первого утверждения заметим, что если в некоторой точке z_0 , $0 < z_0 \leq H$ имеем $|y(z_0)| = 1$, то $\tilde{V}_1(z_0)$ вещественно (\tilde{V}_1 определяется в § I п.3). Тем самым, \tilde{V}_1 является собственной функцией, а ξ соответствующим собственным значением самосопряженной краевой задачи на отрезке $[0, z_0]$, что возможно, очевидно, лишь при вещественном ξ .

Для доказательства второго утверждения достаточно вычислить

$$\frac{dy}{dz} \quad \text{при} \quad z = 0.$$

3. Покажем, как искать корни уравнения $\Phi(\xi) = 0$, где Φ задается формулой (32).

Функция $\Phi(\xi)$ является аналитической функцией комплексного переменного ξ . Для нахождения ее нулей мы воспользуемся аналогом метода Ньютона нахождения нулей функции вещественного переменного. Точнее, решение уравнения $\Phi(\xi) = 0$ ищется как предел последовательности ξ_1, ξ_2, \dots , где

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \Delta \xi_i,$$

а $\Delta \xi_i$ вычисляем по формуле

$$\Delta \xi_i = \begin{cases} \frac{-\Phi(\xi_i)}{\Phi'(\xi_i)}, & \text{если} \quad \left| \frac{\Phi(\xi_i)}{\Phi'(\xi_i)} \right| < \sigma, \\ \frac{-\Phi(\xi_i)}{\Phi'(\xi_i)} \cdot \frac{\sigma}{\left| \frac{\Phi(\xi_i)}{\Phi'(\xi_i)} \right|}, & \text{если} \quad \left| \frac{\Phi(\xi_i)}{\Phi'(\xi_i)} \right| > \sigma, \end{cases} \quad (34)$$

число σ задается заранее.

$\Phi(\xi_i)$ находится следующим образом. Пусть $\xi = \sigma + i\tau$, $\Phi(\xi) = \Phi_1(\sigma, \tau) + i\Phi_2(\sigma, \tau)$, где Φ_1 и Φ_2 вещественные функции. Тогда

$$\Phi(\xi) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma} + i \frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma}$$

и при вычислении $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \sigma}$ заменяется на отношение приращений

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \sigma} = \frac{\Phi_i(\sigma + \Delta \sigma, \tau) - \Phi_i(\sigma, \tau)}{\Delta \sigma}, \quad i = 1, 2.$$

Вычисления заканчиваются, и точка ξ считается собственным значением, если $|\Phi(\xi_n)| < \varepsilon_1$, где ε_1 - заранее выбранное число.

Поиск нулей осложняется тем, что $\Phi(\xi) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Im} \xi \rightarrow -\infty$ (напомним, что ξ лежит в IV квадранте). Поэтому при вычислении

мы можем получить "ложное" собственное значение, удовлетворяющее условию $|\Phi(\xi)| < \varepsilon$. Во избежание этого мы будем искать нули функции

$$\Psi(\xi) = \Phi(\xi) \cdot (\xi - i)^4. \quad (35)$$

Оказывается, что функция $\Psi(\xi)$ возрастает при $\xi \rightarrow -\infty$ и ясно, также, что в 4-м квадранте нули функции $\Psi(\xi)$ совпадают с нулями $\Phi(\xi)$.

4. Для нахождения начального приближения ξ_1 к собственному значению ξ используются два различных метода.

Во-первых, если нам нужно находить собственные значения $\xi(\omega)$ для многих значений ω , то используется формула полиномиальной экстраполяции ξ как функции от ω .

Во-вторых, оказывается полезным также следующий прием, позволяющий значительно уменьшить необходимое для вычислений машинное время. Функции μ и ρ заменяются близкими к ним кусочно-постоянными функциями $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\rho}$ с не очень большим (≤ 50) числом разрывов. Для таких функций решение уравнения (30) может быть вычислено явно (через показательные функции) и при этом требуется значительно меньше времени, чем при решении уравнения методом Рунге-Кутты. Поскольку основное время при вычислении собственных значений занимает решение уравнения (30) при различных ξ , то вычисление собственных значений значительно ускоряется. После этого мы используем найденные приближенные собственные значения в качестве начального приближения при поиске собственных значений для заданных нам функций μ и ρ .

5. Как было показано в п.3, для нахождения собственных значений нам нужно уметь находить комплексные нули функции $\Phi(\xi)$. Заметим, однако, что поскольку Φ комплексно-значная функция, то обычные методы контроля того, что найденная величина ξ действительно близка к точному нулю ξ_0 функции Φ неприменимы. Здесь мы опишем метод, позволяющий тем не менее, выполнить такой контроль. Заметим, что $\Phi(\xi)$ - аналитическая функция комплексного переменного ξ . Поэтому, если C - замкнутый контур, ограничивающий область \mathcal{A} на плоскости ξ , и

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\Phi'(\xi)}{\Phi(\xi)} d\xi, \quad (36)$$

то J - целое число, равное разности между числом нулей и числом полюсов функции $\Phi(\xi)$, лежащих в области \mathcal{A} .

Покажем, теперь, что $\Phi(\xi)$ не имеет полюсов в четвертом квадранте. В самом деле

$$\Phi(\xi) = \gamma(\omega, \xi, H) - \frac{i + M \sqrt{\xi^2 - \frac{R}{M} \omega^2}}{i - M \sqrt{\xi^2 - \frac{R}{M} \omega^2}}.$$

Здесь первое слагаемое не имеет полюсов в IV квадранте поскольку $|\psi(\omega, \xi, H)| < 1$ (см. п. 2); очевидно также, что знаменатель во втором слагаемом не обращается в нуль, когда ξ лежит внутри четвертого квадранта.

Поэтому величина \mathcal{J} равна, в действительности, числу нулей функции Φ , т.е. числу собственных значений, лежащих в области \mathcal{D} .

Приведенный метод может различными способами применяться для исследования комплексных собственных значений.

Во-первых, с его помощью можно проверить, что найденные в результате вычислений величины ξ_k близки к собственным значениям ξ_k . Для этого в качестве C нужно взять маленький контур (величина его определяется заранее заданной точностью, с которой должны быть найдены собственные значения) и проверить, будет ли величина \mathcal{J} , определенная формулой (36), равняться I.

Во-вторых, мы можем при заданном ω находить количество с собственных значений, лежащих в большой области \mathcal{D} , и, тем самым, быть уверенным в том, что при вычислении собственных значений мы по тем или иным причинам не пропустили ни одного из них.

При вычислении \mathcal{J} интеграл в формуле (36) можно заменить конечной суммой

$$\Sigma = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^N \frac{\Phi(\xi_{j+1}) - \Phi(\xi_{j-1})}{2\Phi(\xi_j)} ;$$

здесь $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ точки на контуре C , разбивающие его на участки малой длины, и мы считаем, что $\xi_{N+1} = \xi_1$, $\xi_0 = \xi_N$.

§ 3. Некоторые свойства комплексных собственных значений и собственных функций

В этом параграфе мы опишем ряд свойств комплексных собственных значений и собственных функций, полученных в результате просчета большого числа примеров.

I. При фиксированном ω может существовать, вообще говоря, бесконечно много комплексных собственных значений. Оказывается, что соответствующие этим собственным значениям комплексно-значные функции $\psi(\omega, \xi, z)$ обладают рядом интересных свойств. Эти свойства легко проиллюстрировать, рассмотрев кривые $\psi(\omega, \xi, z)$ на плоскости комплексного переменного z . Графики $\psi(\omega, \xi, z)$, соответствующие комплексным собственным значениям $\xi_I = 1.03 - 2.06i$, $\xi_{II} = 2.02 - 8.55i$ и $H=1$, $\rho(z)=1$, приведены на рис. 2. Что касается величины μ , то она определяется значениями в трех точках $\mu(0) = 0,75$, $\mu(0.3) = 0,5$, $\mu(1) = I$ и линейно интерполируется в промежутках между ними.

Прежде всего, все эти кривые начинаются при $z=0$ в точке $\psi=1$.

Кончатся они (при $z=H$) в точке

$$y = \frac{i + M\sqrt{\xi^2 - \frac{R}{M}\omega^2}}{i + M\sqrt{\xi^2 - \frac{R}{M}\omega^2}},$$

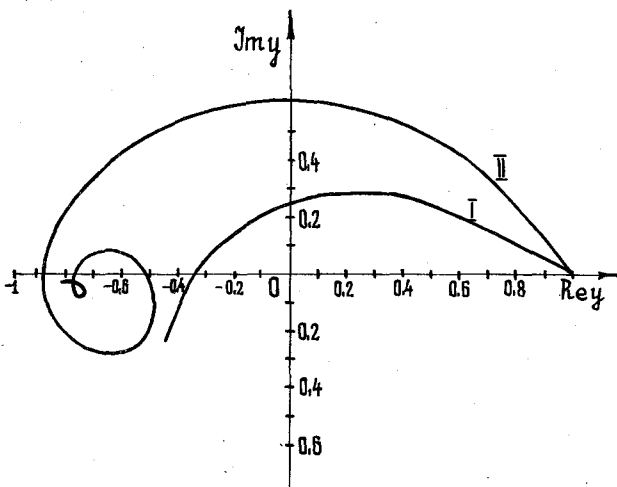


Рис. 2.

где ξ - соответствующее собственное значение.

Далее, как указывалось в § 2 п.2.

$|y(z)| \leq 1$ для всех z , т.е. кривые $y(z)$ лежат внутри единичного круга на плоскости y .

Для формулировки наиболее важного свойства кривых $y(z)$ введем величину $\Omega(\xi)$, которая геометрически представляет собой чис-

ло оборотов касательной к кривой $y(z)$ при изменении z от 0 до H . Для определения $\Omega(\xi)$ положим $\varphi(z) = \text{Arg } y'(z)$ и

$\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^H \varphi'(z) dz$. Пусть теперь ξ_1 и ξ_2 - два лежащих в 4-ом квадранте собственных значения и $0 > \text{Im } \xi_1 > \text{Im } \xi_2$. Тогда $\Omega(\xi_2) > \Omega(\xi_1) > 0$, причем, если ξ_1 и ξ_2 - "соседние" собственные значения (т.е. не существует собственного значения $\tilde{\xi}$ с $\text{Im } \xi_1 > \text{Im } \tilde{\xi} > \text{Im } \xi_2$), то $\Omega(\xi_2) - \Omega(\xi_1)$ близко к 1. Тем самым величина Ω может служить неким эквивалентом номера собственного значения, существующего для действительных собственных значений и вычисляемого через число нулей собственной функции (см. [1]).

2. Для описания зависимости собственных значений ξ от частоты ω полезно нарисовать кривые $\xi(\omega)$ на плоскости комплексного переменного ξ . Полученные кривые обладают рядом характерных особенностей.

Во-первых, поскольку вместе с каждым собственным значением ξ собственными значениями являются также $\bar{\xi}$, $-\xi$ и $-\bar{\xi}$, то вся картина симметрична относительно вещественной и мнимой оси на плоскости ξ .

Далее, при увеличении ω , как правило, $\text{Re } \xi$ увеличивается, а $|\text{Im } \xi|$ уменьшается (для кривых, лежащих в 4-ом квадранте). При некотором значении $\omega = \omega_{кр}$ кривая $\xi(\omega)$ сливается с симметричной ей кривой $\bar{\xi}(\omega)$ в некоторой точке ξ_1 на вещественной оси $\text{Im } \xi = 0$, причем

$$\omega_{кр} b_1^{-1} \leq \xi_1 \leq \omega_{кр} b_2^{-1} (b_1 = \max v(z), b_2 = \min v(z), 0 \leq z \leq H).$$

При дальнейшем увеличении ω мы получаем два нефизических собственных значения, лежащих на вещественной оси. При этом большее из них все время остается нефизическим, а меньшее становится при некотором ω_2 , равным $\xi = \omega_2 b_1^{-1}$, и после этого превращается в физическое собственное значение. Такие переходы иллюстрируются на рис.3. При этом сплошные и прерывистые линии относятся соответственно к "+" и "-" листам. Кроме того, ω'_1, ω'_2 - точки слияния двух комплексных собственных значений, а ω_1, ω_2 - точки перехода с "+" листа на "-" лист.

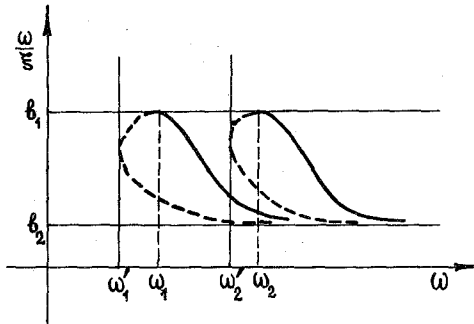


Рис.3.

функции $\Phi(\omega, \text{Re} \xi)$, заданной формулой (32) при фиксированном $\text{Im} \xi = -c_2$, определяют нужные нам пары (ω, ξ) . Эти нули можно найти обычным методом наименьших квадратов (см. [2]).

3. Часто нужно находить комплексные собственные значения, расположенные внутри прямоугольника $0 > \text{Im} \xi > -c_2$, $0 \leq \text{Re} \xi \leq c_1$, $c_1, c_2 > 0$ при всех ω , $\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}$. Для этого полезно уметь вычислять пары (ω, ξ) такие, что $\text{Im} \xi = -c_2$ и ξ является собственным значением при этом ω . Нули функции

Литература

1. Андрианова З.С., Кейлис-Борок В.И., Левшин А.Л., Нейгауз М.Г. Поверхностные волны Лява. М., 1965, 108 с.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. т.1.М., 1966, 632 с.
3. Левшин А.Л. Поверхностные и каналовые сейсмические волны. М., 1973, 176 с.
4. Редже Т. Аналитические свойства матрицы рассеяния. Сб. переводов "Математика", 1963, т.7, № 4, с.83-91.
5. Янсон З.А. Распространение нестационарных упругих волн SH в полупространстве с двумя волноводами, I и II. Изв. АН СССР, серия "Физика Земли", 1962, № 2, с.3-18, № 3, с.19-37.
6. Alsop L.E. The leaky - mode period equation a plane-wave approach. Bull. Seism. Soc., 1970, v.60, № 6, p.1989-1998.
7. Gilbert F. Propagation of Transient Leaking Modes in Rev. of Geoph., 1964, v.2, № I, p.123-253.
8. Ewing M., Yardetzky W., Press F. Elastic Waves in Layered Media. New York, 1957, 380 p.