



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. G. Emel'yanov, A sewing theorem for quadratic differentials,  
*Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 2009, Volume 371, 69–77

<https://www.mathnet.ru/eng/zns13545>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.171

April 28, 2025, 16:22:07



Е. Г. Емельянов

## О “СКЛЕИВАНИИ” КВАДРАТИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Восьмидесятилетию со дня рождения  
Игоря Петровича Митюка  
посвящается

Согласно основной структурной теореме Дженкинса [1], дополнение замыкания объединения всех критических траекторий квадратичного дифференциала  $Qdz^2$  на компактной римановой поверхности  $\mathfrak{R}$  состоит из конечного числа областей, каждая из которых есть либо круговая, либо кольцевая, либо концевая, либо полособразная область этого дифференциала. В случае отсутствия плотностных структур можно сказать, что замкнутые критические траектории квадратичного дифференциала разбивают поверхность  $\mathfrak{R}$  на конечное число областей указанного вида. Если квадратичный дифференциал не имеет полюсов порядка  $> 2$ , то концевые области в разбиении отсутствуют. Каждая круговая область  $D_i$  квадратичного дифференциала допускает конформный гомеоморфизм  $\zeta = \zeta(z)$  на единичный круг, удовлетворяющий уравнению

$$-\frac{\alpha_i^2}{4\pi^2} \frac{d\zeta^2}{\zeta^2} = Qdz^2,$$

где  $\alpha_i > 0$  – метрическая характеристика квадратичного дифференциала, означающая длину его замкнутой траектории в области  $D_i$ . Для кольцевой области  $D_j$  существует конформный гомеоморфизм на круговое кольцо  $\{1 < |z| < r_j\}$ , удовлетворяющий такому же уравнению. Здесь  $r_j$  – еще одна метрическая характеристика квадратичного дифференциала, определяющая конформный модуль области  $D_j$ . Для полособразной области  $D_k$  существует конформный гомеоморфизм на полосу  $\{0 < \text{Im } z < h_k\}$ , удовлетворяющий уравнению

$$d\zeta^2 = Qdz^2,$$

---

*Ключевые слова* : квадратичный дифференциал, траектория, экстремальное разбиение.

где  $h_k$  – длина дуги ортогональной траектории квадратичного дифференциала, соединяющей противоположные стороны области  $D_k$ . Набор параметров  $\alpha_i$ ,  $r_j$ ,  $h_k$  и старшие коэффициенты разложений квадратичного дифференциала в окрестностях полюсов второго порядка определяют квадратичный дифференциал с заданным типом разбиения.

Естественным обращением “основной структурной теоремы” Дженкинса для случая отсутствия плотностных структур и полюсов порядка  $> 2$  является утверждение о возможности “склеить” риманову поверхность  $\mathfrak{R}$  из нескольких копий единичного круга, нескольких круговых колец с заданными модулями и нескольких горизонтальных полос с произвольно выбранными высотами, получив на ней квадратичный дифференциал с заданными метрическими характеристиками. Формулировка и доказательство такого утверждения и является целью данной работы. Полученная теорема является теоремой существования квадратичных дифференциалов с произвольно выбранными метрическими характеристиками.

Сравнительно недавно появились работы П. М. Тамразова [2, 3], в которых таким способом (т.е. при помощи “склеивания”) было доказано существование квадратичного дифференциала с произвольно выбранными метрическими свойствами для задач Чеботарева и Грётша (здесь  $\mathfrak{R} = \mathbb{C}$ ), позднее появилась работа А. Ю. Солынина [4], содержащая общий результат в случае отсутствия полособразных областей. Оба автора для описания требуемого разбиения рассматриваемой поверхности использовали заданный на ней граф. Мы используем другой подход, который представляется более удобным.

## 1. ИСХОДНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

**1.1. Области.** Пусть для  $1 \leq k \leq p_1$  область  $D_k$  представляет собой копию единичного круга, для  $p_1 + 1 \leq k \leq p_1 + p_2$  область  $D_k$  есть кольцо  $\{1 < |z| < r_k\}$  и для  $p_1 + p_2 + 1 \leq k \leq p_1 + p_2 + p_3 = p$  область  $D_k$  есть полоса  $\{0 < \text{Im } z < h_k\}$ . При этом для  $1 \leq k \leq p_1 + p_2$  заданы положительные числа  $\alpha_k$ .

**1.2. Дуги.** Пусть задано отображение  $k = k(i)$  множества индексов  $1, 2, \dots, 2q$  в множество  $1, 2, \dots, p$ . Пусть  $\gamma_i \subset \partial D_k$ ,  $k = k(i)$  – открытая дуга, ориентированная соответственно естественной ориентации границы  $\partial D_k$ ,  $P(i)$  и  $Q(i)$  – начальная и конечная точки дуги  $\gamma_i$ , со-

ответственно. При этом, возможно,  $P(i) = \pm\infty$  или  $Q(i) = \pm\infty$ , но не одновременно. Для  $1 \leq i \leq 2q$  положим

$$i' = 2q - i + 1$$

Через  $|\gamma_i|$  будем обозначать длину  $\gamma_i$  в метрике соответствующего квадратичного дифференциала на  $D_k$ , т.е. дифференциала  $-\frac{\alpha_k^2}{4\pi^2} \frac{dz^2}{z^2}$ , если  $D_k$  – кольцо или круг, и дифференциала  $dz^2$ , если  $D_k$  – полоса. Должны быть выполнены условия:

$$|\gamma_i| = |\gamma_{i'}|, \tag{1}$$

если  $P(i) = \infty$ , то  $Q(i') = \infty$ , и если  $Q(i) = \infty$ , то  $P(i') = \infty$ ;

$$\forall k, \quad 1 \leq k \leq p, \quad \partial D_k = \bigcup_{k(i)=k} \overline{\gamma_i}$$

**1.3. Циклы.** Будем писать  $\gamma_i \succ \gamma_j$ , если  $k(i) = k(j)$ ,  $P(i) = Q(j)$  (возможно,  $P(i) = Q(j) = \infty$ ). Набор дуг  $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots, \gamma_{i_{2m}}$  назовем циклом, если выполнены условия:

$$\begin{aligned} 1^0 \quad & \gamma_{i_{2k+1}} \succ \gamma_{i_{2k}}, \quad 0 \leq k \leq m; \\ 2^0 \quad & (i_{2k})' = i_{2k+1}, \quad 0 \leq k \leq m-1, \quad (i_{2m})' = i_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Число  $m$  назовем длиной цикла. Потребуем, чтобы при  $P(i_1) \neq \infty$  было  $m \neq 2$ . Два цикла, состоящие из одних и тех же дуг, отождествляются.

## 2. “СКЛЕИВАНИЕ” ПОВЕРХНОСТИ $\mathfrak{R}$

**2.1. Точки.** Точками  $\mathfrak{R}$  являются:

- 1<sup>0</sup>. точки областей  $D_k$ ,  $1 \leq k \leq p$ ;
- 2<sup>0</sup>. пары отождествленных (“склеенных”) точек  $(p, p')$ ,  $p \in \gamma_i$ ,  $p' \in \gamma_{i'}$ ;
- 3<sup>0</sup>. точки  $c_s$ ,  $1 \leq s \leq s_1$ , каждая из которых соответствует некоторому циклу длины  $m > 1$ , в котором  $P(i_1) \neq \infty$ ;
- 4<sup>0</sup>. точки  $a_s$ ,  $1 \leq s \leq s_2$ , каждая из которых соответствует циклу длины 1, в котором  $P(i_1) \neq \infty$ ;
- 5<sup>0</sup>. точки  $b_s$ ,  $1 \leq s \leq s_3$ , каждая из которых соответствует циклу длины  $m \geq 1$ , в котором  $P(i_1) = \infty$ .

**2.2. Локальные координаты.** Пусть в дальнейшем  $z_k$  – естественная координата в области  $D_k$ .

1. Пусть  $p \in D_k$ . Тогда окрестностью точки  $p$  в  $\mathfrak{A}$  является ее окрестность в  $D_k$ ,  $\zeta = z_k - z_k(p)$  – координата в окрестности точки  $p \in \mathfrak{A}$ , представляющая ее нулем.

2. Пусть  $p \in \gamma_i$ ,  $p' \in \gamma_{i'}$ ,  $k = k(i)$ ,  $k' = k(i')$ . Точки  $p$  и  $p'$  склеиваются, если выполнены условия:

$$|p - P(i)| = |p' - Q(i')|, \quad |p - Q(i)| = |p' - P(i')|.$$

Можем считать, что  $P(i) \neq \infty$ . Положим

$$\zeta_k = \chi(z_k - z_k(p)), \quad \chi = \pm 1, \quad (3)$$

если  $D_k$  – полоса, и

$$\zeta_k = \chi \frac{\alpha_k}{2\pi} i \log \frac{z_k}{z_k(p)}, \quad \chi = \pm 1,$$

если  $D_k$  – кольцо или круг. Знак  $\chi$  выбирается таким образом, чтобы  $\zeta_k(p)$  возрастало при движении точки  $p$  вдоль дуги  $\gamma_i$  от  $P(i)$  к  $Q(i)$ . Тогда для склеивающихся точек  $q \in \gamma_i$ ,  $q' \in \gamma_{i'}$  значения  $\zeta_k(q)$  и  $-\zeta_{k'}(q')$  совпадают. Локальной координатой в окрестности точки  $(p, p') \in \mathfrak{A}$  будет функция

$$\zeta(q) = \begin{cases} \zeta_k(q), & q \in D_k \\ -\zeta_{k'}(q'), & q \in D_{k'} \end{cases} \quad (4)$$

$$\zeta(q, q') = \zeta_k(q) = -\zeta_{k'}(q').$$

3. Пусть точка  $c_s \in \mathfrak{A}$  соответствует циклу  $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots, \gamma_{i_{2m}}$ ,  $P(i_1) \neq \infty$ ,  $k_j = k(i_{2j-1})$ .

Положим

$$\zeta_{k_j}(q) = \chi(z_{k_j}(q) - z_{k_j}(P(i_{2j-1}))), \quad 1 \leq j \leq m,$$

если область  $D_{k_j}$  – полоса, и

$$\zeta_{k_j}(q) = \chi \frac{\alpha_{k_j}}{2\pi} i \log \frac{z_{k_j}}{z_{k_j}(P(i_{2j-1}))},$$

если область  $D_{k_j}$  – кольцо или круг,  $\chi = \pm 1$ , где знак  $\chi$  выбирается, как выше. Тогда локальной координатой в окрестности точки  $c_s \in \mathfrak{R}$  будет функция

$$\zeta(q) = (\zeta_{k_j}(q))^{\frac{2}{m}} \epsilon^{j-1}, \quad (5)$$

если  $q \in D_{k_j}$ ,

$$\zeta(q, q') = (\zeta_{k_j}(q))^{\frac{2}{m}} \epsilon^{j-1} = (\zeta_{k_{j+1}}(q'))^{\frac{2}{m}} \epsilon^j, \quad (6)$$

если  $q \in \gamma_{2j}$ ,  $q' \in \gamma_{2j+1}$  – склеенные точки,  $\epsilon = \exp(\frac{2\pi i}{m})$ .

4. Пусть  $a_s$  соответствует циклу  $\gamma_{i_1}, \gamma'_{i_1}, P(i_1) \neq \infty, k = k(i_1)$ . Локальной координатой в окрестности точки  $a_s \in \mathfrak{R}$  будет функция

$$\zeta(q) = (\zeta_k(q))^2,$$

если  $q \in D_k$ , и функция

$$\zeta(q, q') = (\zeta_k(q))^2 = (\zeta_k(q'))^2,$$

если  $q \in \gamma_{i_1}, q' \in \gamma'_{i_1}$ .

5. Пусть точка  $b_s$  соответствует циклу  $\gamma_{i_1}, \gamma_{i_2}, \dots, \gamma_{i_{2m}}, P(i_1) = \infty$ . Тогда  $P(i_1) = Q(i_2) = \dots = Q(i_{2m}) = \infty$ . В дальнейшем в этом пункте для упрощения записи будем опускать индекс  $i$  и писать вместо  $i_j$  просто  $j$ . Положим

$$k_j = k(2j - 1), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad \zeta_j(q) = \chi[z_{k_j} - z_{k_j}(Q(2j - 1))]$$

для  $q \in \overline{D_{k_j}}$ ,  $\chi = \pm 1$ . Знак  $\chi$  выбирается таким образом, чтобы при движении точки  $q$  вдоль дуги  $\gamma_{2j-1}$  значение  $\zeta_j$  возрастало. Пусть

$$w_0 = 0, \quad w_j = z_{k_j}(P(2j)) - z_{k_j}(Q(2j - 1)), \quad j = \overline{1, m} \quad (7)$$

$$w_1 + w_2 + \dots + w_m = A_s = |A_s| i e^{-i\theta_s}.$$

Координату в окрестности точки  $b_s$  определим следующим образом:

$$\zeta(q) = \exp\left(\frac{2\pi}{|A_s|} e^{i\theta_s} \left(\zeta_j(q) + \sum_{t=0}^{j-1} w_t\right)\right) \quad (8)$$

для  $q \in D_{k_j}$ .

## 3. ТЕОРЕМА О “СКЛЕИВАНИИ”

**Теорема.** Пусть области  $D_k$ ,  $1 \leq k \leq p$ , и дуги  $\gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq 2q$ , описаны выше. Тогда определенная в §2 поверхность  $\mathfrak{R}$  вместе с заданной на ней системой локальных координат  $\zeta(q)$  представляет собой компактную риманову поверхность рода

$$g = 1 - \frac{E}{2}, \quad E = s_1 + s_2 + s_3 - q + p_1 + p_3.$$

Пусть  $\varphi_k : D_k \rightarrow \mathfrak{R}$  – естественное вложение,  $I(\zeta) = \varphi^{-1}$  – обратное отображение. Тогда

$$(I')^2 d\zeta^2$$

– мероморфный квадратичный дифференциал на  $\mathfrak{R}$ , для которого области  $\mathcal{D}_k = \varphi(D_k)$  соответственно круговые, кольцевые и полособразные области. В точках  $c_s$ ,  $1 \leq s \leq s_1$ , этот дифференциал имеет нули порядков  $m_s - 2$ , в точках  $a_s$ ,  $1 \leq s \leq s_2$ , – простые полюсы, и в точках  $b_s$ ,  $1 \leq s \leq s_3$ , – двойные полюсы. При этом в окрестности точки  $b_s$  в терминах параметра, представляющего эту точку нулем, имеет место разложение

$$(I')^2 = -\frac{A_s^2}{4\pi^2} \frac{1}{\zeta^2} + \dots \quad (9)$$

Кроме того, этот дифференциал имеет двойной полюс в каждой точке, являющейся образом нуля при вложении в  $\mathfrak{R}$  круга, и не имеет других особенностей.

**Доказательство.** 1. Легко видеть, что  $\mathfrak{R}$  будет ориентируемой двумерной поверхностью без края. Доказательство того утверждения, что  $\mathfrak{R}$  – риманова поверхность, состоит в прямой проверке согласованности введенных выше локальных координат.

2. Дуги  $\gamma_i$ ,  $\gamma_{i'}$  склеиваются в дугу  $\Gamma_i$  на  $\mathfrak{R}$ ,  $1 \leq i \leq q$ . Определим для  $1 + p_1 \leq k \leq 1 + p_1 + p_2$  дуги  $\Gamma_{q+k-p_1} \subset \mathcal{D}_k$  таким образом, чтобы каждая из них соединяла две точки множества  $\{c_s\}$ , принадлежащие различным граничным компонентам двусвязной области  $\mathcal{D}_k$ . Тогда набор точек  $\{c_s\} \cup \{a_s\} \cup \{b_s\}$ , набор дуг  $\Gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq q + p_2$ , и набор областей  $\mathcal{D}_k$ ,  $1 \leq k \leq p_1$ ,  $p_1 + p_2 + 1 \leq k \leq p$ , и  $\mathcal{D}_k \setminus \Gamma_{q+k-p_1}$ ,  $1 + p_1 \leq k \leq 1 + p_1 + p_2$ , образуют клеточное разбиение поверхности  $\mathfrak{R}$ . Отсюда получаем значение эйлеровой характеристики  $E$  этой поверхности.

3. Разложение (9) следует из (7).

4. ПРИМЕРЫ И ЗАМЕЧАНИЯ

**4.1.** Пусть на двумерной сфере  $S^2$  задан плоский связный граф  $\Gamma$  без циклов (дерево),  $\{c_s\}_1^{s_1}$ ,  $\{a_s\}_1^{s_2}$  – соответственно множества его вершин порядка  $\geq 3$  и порядка 1,  $\{\Gamma_i\}_{i=1}^q$  – множество его ребер. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_q$  – произвольный набор положительных чисел,  $1 = 2 \sum_i x_i$ ,  $\Gamma = \bigcup \Gamma_i$ ,  $G = S^2 \setminus \Gamma$ .

Выберем множество областей состоящим из одного единичного круга  $\Delta$  и определим набор дуг  $\gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq 2q$ , на границе этого круга следующим образом. Одной из вершин графа порядка 1 сопоставим точку  $z = 1$  на единичной окружности. Обходя границу  $\partial G$  в положительном направлении, начиная от выбранной вершины, будем сопоставлять одной стороне разреза по дуге  $\Gamma_i$  дугу  $\gamma_i$  на единичной окружности длины  $2\pi x_i$ . Если другая сторона разреза уже пройдена, то дуге присваивается номер  $i'$ . Легко видеть, что вершины графа порядка 1 однозначно соответствуют циклам длины 1. Склеенная поверхность будет в этом случае, очевидно, римановой сферой. Пусть  $\varphi : \Delta \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  – естественное вложение. Можем считать, что  $\varphi(0) = \infty$ . “Склеенный” на сфере квадратичный дифференциал имеет единственный двойной полюс в  $\infty$  и простые полюсы в точках  $a_s$ ,  $1 \leq s \leq s_2$ , соответствующих вершинам графа порядка 1. Континуум  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \varphi(\Delta)$  будет, как известно, континуумом наименьшей емкости  $E(a_1, a_2, \dots, a_{s_2})$ . Это доказывает результат П. М. Тамразова [2, 3], согласно которому при надлежащем выборе точек  $a_1, a_2, \dots, a_{s_2}$  на сфере можно получить континуум наименьшей емкости с произвольно заданными метрическими характеристиками.

**4.2. Размерность множества склеенных поверхностей.** Пусть выбран набор областей  $D_k$ ,  $1 \leq k \leq p$  набор дуг  $\gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq 2q$  и заданы положительные числа  $h_k$  и  $\alpha_k$  как в §1. Пусть также заданы старшие коэффициенты  $A_s$  разложения квадратичного дифференциала в двойных полюсах  $b_s$ . Покажем, что тогда набор исходных материалов характеризуется  $M$  параметрами, где

$$M = q - p_1 - p_3 - s_3. \tag{10}$$

1<sup>0</sup>. Число дуг  $\gamma_i$ , имеющих конечную длину  $|\gamma_i| = x_i$ , равно  $q - 2p_3$ . Длины  $x_i$  входят в число определяющих параметров.

2<sup>0</sup>. Каждая полоса  $D_k$ ,  $p_1 + p_2 + 1 \leq k \leq p$  характеризуется значением параметра  $y_k$ , определяющего относительный сдвиг дуг, расположенных на противоположных сторонах полосы  $D_k$ .



3<sup>0</sup>. Каждое кольцо  $D_k$ ,  $p_1 + 1 \leq k \leq p_1 + p_2$ , характеризуется двумя параметрами: параметром  $r_k$ , определяющим его конформный модуль, и параметром  $y_k$ , определяющим относительный сдвиг дуг, лежащих на разных граничных окружностях  $D_k$ .

Таким образом, всего имеется  $q - p_3 + 2p_2$  параметров. При этом сумма длин дуг, расположенных на одной граничной окружности круга или кольца  $D_k$ , должна быть равна  $\alpha_k$ , и в каждой точке  $b_s$  должно выполняться условие

$$\sum_k y_k = \operatorname{Re} A_s,$$

где суммирование производится по индексам  $k$ , для которых полосы  $D_k$  входят в соответствующий цикл. Таким образом, всего имеем  $s_3 + p_1 + 2p_3$  уравнений, откуда и следует (10).

Система круговых, кольцевых и полособразных областей “склеенного” квадратичного дифференциала на римановой поверхности  $\mathfrak{R}$  является экстремальной в соответствующей задаче об экстремальном разбиении этой поверхности (см., например, [5]). Обозначим

$$\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \setminus (\{a_s\}_1^{s_2} \cup \{b_s\}_1^{s_3} \cup \{p_k\}_1^{p_1}), \quad n = s_2 + s_3 + p_1.$$

Данными указанной задачи являются  $p_2$  гомотопических классов замкнутых кривых на  $\mathfrak{R}'$ , каждый из которых содержит замкнутую траекторию, лежащую в своей кольцевой области  $D_k$ , и  $p_3$  гомотопических классов кривых на  $\mathfrak{R}'$  с концами в точках множества  $\{b_s\}_1^{s_3}$ , каждый из которых содержит траекторию, лежащую в своей полособразной области  $D_k$ . Также данными задачи служат точки  $a_s, b_s, p_k$  и параметры  $h_k, \alpha_k A_s$ .

Вещественная размерность пространства Тейхмюллера  $T(n)$  поверхностей рода  $g$  с  $n$  проколами равна

$$6g - 6 + 2n = -3E + 2(S_2 + s_3 + p_1) = M + N - s_1 \geq M,$$

где  $s_1$  – число нулей квадратичного дифференциала  $Qdz^2$ ,  $N$  – их суммарная кратность. Пусть  $\mathfrak{R}(t)$  – кривая в пространстве  $T(n)$ ,  $\mathfrak{R}(0) = \mathfrak{R}$ . Гомотопия  $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}(t)$  естественно переносит данные задачи об экстремальном разбиении на поверхность  $\mathfrak{R}(t)$  и порождает на этой поверхности квадратичный дифференциал  $Q_t dz^2$ . Исходные

материалы для “склеивания” этого дифференциала описываются  $M$ -мерным вектором  $X(t)$ . Из единственности решения задачи об экстремальном разбиении следует, что соответствие  $X(t) \longleftrightarrow \mathfrak{R}(t)$  является гомеоморфизмом. Это доказывает, что найдется комплексная структура на компактной поверхности рода  $g$  и набор  $n$  точек на ней такие, что определенный на полученной римановой поверхности квадратичный дифференциал  $Qdz^2$ , обладающий тем свойством, что  $p_1$  круговых,  $p_2$  кольцевых и  $p_3$  полосообразных областей этого дифференциала разбивают указанную поверхность требуемым образом, имеет произвольно заданные метрические характеристики. Последнее утверждение обобщает теорему 1 из [4].

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. A. Jenkins, *Univalent functions and conformal mappings*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (N. F.), Bd. 18, Springer-Verlag, Berlin ets., 1958; 2nd ed. corrected, 1965. Перев. на русск. яз. 1-го изд., Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, М., 1962.
2. P. M. Tamrazov, *Tchebotarov's extremal problem*. — Cent. Eur. J. Math. **3** (2003) No. 4, 591–605.
3. P. M. Tamrazov, *Tchebotarov's problem*. — C. R. Math. Acad. Sci. Paris **341** (2005) No. 7, 404–408.
4. A. Yu. Solyin, *Quadratic differentials and weighted graphs on compact surfaces*. In: *Analysis and Mathematical Physics.* Trend in Mathematics, 473–505, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
5. Е. Г. Емельянов, Г. В. Кузьмина, *Теоремы об экстремальном разбиении в семействах систем областей различных типов*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 74–104.

Emel'yanov E.G. A sewing theorem for quadratic differentials.

Quadratic differentials on a finite Riemann surface with poles of order not exceeding two are considered. The existence of such a differential with prescribed metrical characteristics is proved. These characteristics are the following: the first coefficients in the expansions of a quadratic differential in neighborhoods of it's poles of order two, the conformal modules of the ring domains, and the heights of the strip domains in the decomposition of the Riemann surface defined by this differential.

С.-Петербургский университет  
экономики и финансов,  
Садовая ул. 21, 191023 Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: emelyanoveg@rambler.ru

Поступило 18 октября 2009 г.