2000. Т. 36, № 12. С. 1652 — 1657

УДК 517.925.41

ЦЕНТРЫ И ФОКУСЫ ОДНОГО КЛАССА КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. П. Садовский

Рассмотрим систему

$$dx/dt = x + Ax^2 + Bx^3 + 4Cy^3, \quad dy/dt = -y + Mxy/3 + Nx^2y/3, \tag{1}$$

где A, B, C, M, N — комплексные постоянные. Для системы (1) существует формальный ряд $H = xy + \sum\limits_{k=3}^{\infty} f_k(x,y)$, где f_k — однородные полиномы k-й степени, для которого

$$dH/dt = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(xy)^{k+1}. \tag{2}$$

Коэффициенты v_k в (2) называются фокусными величинами системы (1).

Определение 1. Особая точка $O(0,0)$ системы (1) называется центром, если $v_k = 0$, $k = 1,2,\ldots$

В случае центра для (1) существует аналитический в окрестности $x = y = 0$ интеграл $H = xy + \ldots$

Определение 2. Особая точка $O(0,0)$ системы (1) называется фокусом порядка n, если $v_k = 0$, $k = \overline{1, n-1}$, $v_n \neq 0$.

В [1] доказано существование кубических систем, имеющих фокус 6-го порядка, в [2] — фокус 7-го порядка, в [3] — фокус 8-го порядка. В [4] доказано существование кубических систем с 11 малоамплитудными предельными циклами. Таким образом, существуют кубические системы, имеющие в $O(0,0)$ фокус 11-го порядка.

В настоящей работе укажем необходимые и достаточные условия центра системы (1), а также докажем существование систем вида (1), имеющих в $O(0,0)$ фокус 12-го порядка. При проведении вычислений используется система MATHEMATICA. Для (1) имеем случай резонанса $1:-1$ [5].

В системе (1) положим $X = x + Cy^3$, $Y = y^3$. В результате получим систему

$$\begin{aligned} \dot X &= X + AX^2 + C(M-2A)XY + C^2(A-M)Y^2 + BX^3 + \\ &+ C(N-3B)X^2Y + C^2(3B-2N)XY^2 + C^3(N-B)Y^3, \\ \dot Y &= -3Y + MXY - CMY^2 + NX^2Y - 2CNXY^2 + C^2NY^3, \end{aligned} \tag{3}$$

для которой имеем случай резонанса $1:-3$ [5]. Для системы (3) существует формальный ряд $H_1 = X^3Y + \ldots$, для которого $dH_1/dt = \sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(X^3Y)^{k+1}$. Коэффициенты g_k называются фокусными величинами системы (3). В случае $g_k = 0$, $k = 1,2,\ldots$, особая точка $O(0,0)$ системы (3) называется центром. Если $g_k = 0$, $k = \overline{1, m-1}$, $g_m \neq 0$, то точка $O(0,0)$ системы (3) называется фокусом m-го порядка.

В дальнейшем фокусные величины системы (1) будем записывать с точностью до числовых множителей, не равных нулю.

Предложение. *Для системы (1)* $v_{3k-2} = 0$, $v_{3k-1} = 0$, $v_{3k} = g_k(\mathrm{mod}\,(g_1, g_2, \ldots, g_{k-1}))$, $k = 1,2,\ldots$

Теорема 1. *Точка $O(0,0)$ системы (1) является центром тогда и только тогда, когда выполняется одна из следующих девяти серий условий:*

1) $C = 0$;

2) $6A + M = 0,\ 9B + N = 0$;

3) $A + M = 0,\ B - N = 0$;

4) $B + M(A+M) = 0,\ N + 2M(A+M) = 0$;

5) $A - M = 0,\ B = 0,\ N = 0$;

6) $3A + 2M = 0,\ A^2 - 4B = 0,\ N = 0$;

7) $2A + M = 0,\ 2A^2 - 9B = 0,\ 2A^2 + 3N = 0$;

8) $2A + 3M = 0,\ 2A^2 - 9B = 0,\ 2A^2 + 9N = 0$;

9) $2A - 3M = 0,\ 2A^2 - 9B = 0,\ 2A^2 - 9N = 0$.

Доказательство. Достаточность. В случае 1) система (1) имеет первый интеграл $H = xy\exp[\varphi(x)]$, где $\varphi(x) = -\int\limits_0^x [3A + M + s(3B + N)]/[3(1 + As + Bs^2)]\,ds$, а значит, точка $O(0,0)$ является центром. В случае 2) первым интегралом системы (1) является $H = y(1 + Ax^2 + Bx^3 + Cy^3)$, точка $O(0,0)$ — центр.

Предположим, что выполняются условия 3). Покажем, что в этом случае система (1) имеет первый интеграл

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} f_{3k}(x) y^{3k}, \tag{4}$$

где

$$f_{3k}(x) = P_{k+2}(x)/(1 + Ax + Bx^2)^{2k}, \tag{5}$$

$P_{k+2}(x)$ — полином $(k+2)$-й степени, $k = 1, 2, \ldots$ Действительно, если (4) — первый интеграл системы (1), то f_{3k} удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered} xf_3'(1 + Ax + Bx^2) + f_3(-3 + Mx + Nx^2) = 0, \\ xf_{3k}'(1 + Ax + Bx^2) + kf_{3k}(-3 + Mx + Nx^2) + 4Cf_{3k-3}' = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

$k = 2, 3, \ldots$ В рассматриваемом случае $M = -A$, $N = B$. С учетом этого из первого уравнения системы (6) находим $f_3 = x^3/(1 + Ax + Bx^2)^2$, т.е. f_3 имеет вид (5). Если f_{3k} — функция вида (5), то $f_{3k}' = Q_{k+3}(x)/(1 + Ax + Bx^2)^{2k+1}$, где Q_{k+3} — полином $(k+3)$-й степени. Из системы (6) для f_{3k+3} получаем уравнение $xf_{3k+3}'(1 + Ax + Bx^2) + (k+1)f_{3k+3}(-3 - Ax + Bx^2) + 4CQ_{k+3}/(1 + Ax + Bx^2)^{2k+1} = 0$, из которого находим $f_{3k+3} = P_{k+3}(x)/(1 + Ax + Bx^2)^{2k+2}$, где P_{k+3} — полином $(k+3)$-й степени. Таким образом, в случае 3) для системы (1) методом математической индукции доказано существование интеграла (4), где f_{3k} имеют вид (5). Точка $O(0,0)$ является центром системы (1).

Пусть имеют место условия 4). Докажем существование для (1) интеграла (4), где

$$f_{3k}(x) = P_{k+2}[u(x)]/(1 - Mx)^{2k}, \tag{7}$$

$u(x) = x/[1 + x(A+M)]$, $P_{k+2}(z)$ — полином $(k+2)$-й степени, $k = 1, 2, \ldots$ Действительно, с учетом $B = -M(A+M)$, $N = -2M(A+M)$ из первого уравнения системы (6) находим $f_3(x) = u^3(x)/(1 - Mx)^2$, т.е. f_3 имеет вид (7). Если f_{3k} — функция вида (7), то $f_{3k}'/(x + Ax^2 + Bx^3) = \{P_{k+2}'(u)[1 - (A + 2M)u][1 - (A+M)u] + 2kMP_{k+2}(u)\}u'/[u(1 - Mx)^{2k+2}] \equiv Q_{k+3}(u)u'/[u(1 - Mx)^{2k+2}]$. В этом случае из (6) для f_{3k+3} получаем уравнение $f_{3k+3}' - (k+1)f_{3k+3}[3 - Mx + 2M(A+M)x^2]/[x(1 - Mx)(1 + Ax + Mx)] + 4CQ_{k+3}(u)u'/[u(1 - Mx)^{2k+2}] = 0$, из которого находим $f_{3k+3}(x) = P_{k+3}(u)/(1 - Mx)^{2k+2}$, где $P_{k+3}(z)$ — полином $(k+3)$-й степени. Таким образом, в случае 4) система (1) имеет интеграл (4), а поэтому точка $O(0,0)$ — центр системы (1).

Пусть выполняются условия 8). Тогда система (1) имеет интеграл (4), где

$$f_{3k}(x) = P_{k+2}(u)/(3 + 2Ax)^{5k}, \tag{8}$$

$u = x(3+2Ax)$, $P_{k+2}(z)$ — полином $(k+2)$-й степени, $k = 1,2,\ldots$ Действительно, в этом случае $B = 2A^2/9$, $M = -2A/3$, $N = -2A^2/9$, а поэтому из первого уравнения системы (6) находим $f_3 = u^3/(3+Ax)^5$, т.е. f_3 имеет вид (8). Если f_{3k} — функция вида (8), то $f'_{3k}/(1+ +Ax+Bx^2) = 9[P'_{k+2}(u)(9+4Au) - 10kAP_{k+2}]u'/[u(3+2Ax)^{5k+3}] \equiv Q_{k+2}(u)u'/[u(3+2Ax)^{5k+3}]$. В этом случае из системы (6) для f_{3k+3} имеем уравнение $f'_{3k+3} + (k+1)f_{3k+3}(-3+Mx+ +Nx^2)/(x+Ax+Bx^2) + 4CQ_{k+2}(u)u'/[u(3+2Ax)^{5k+3}] = 0$, из которого получаем $f_{3k+3}(x) = = P_{k+3}(u)/(3+2Ax)^{5k+5}$, где $P_{k+3}(z)$ — полином $(k+3)$-й степени. Таким образом, при выполнении 8) точка $O(0,0)$ является центром системы (1).

В случае выполнения условий 5) система (3) имеет вид

$$\dot{X} = X(1+AX-ACY), \quad \dot{Y} = Y(-3+AX-ACY). \tag{9}$$

Согласно [6], система (9) имеет аналитический интеграл $H_1 = X^3Y + \ldots$; точка $O(0,0)$ системы (1) является центром.

Если имеют место условия 6), то система (1) будет вида

$$\dot{x} = x(1+Ax/2)^2 + 4Cy^3, \quad \dot{y} = -y(1+Ax/2). \tag{10}$$

Замена $x = X - CY$, $y^3 = Y(1+Ax/2)^2$, $d\tau = (1+Ax/2)\,dt$ преобразует (10) к системе

$$dX/d\tau = X + AX^2/2 - 9AC^2Y^2/2, \quad dY/d\tau = -Y(3+AX+3ACY). \tag{11}$$

Так как, согласно [6], точка $O(0,0)$ системы (11) является центром, то и особая точка $O(0,0)$ системы (10) — центр.

Если выполняются условия 7), то система (1) имеет вид

$$\dot{x} = x(1+Ax/3)(1+2Ax/3) + 4Cy^3, \quad \dot{y} = -y[1+(2/3)Ax(1+Ax/3)], \tag{12}$$

и заменой

$$X - CY = x(1+Ax/3), \quad Y(1+2Ax/3) = y^3 \tag{13}$$

преобразуется к системе

$$\dot{X} = X + 4AX^2/3 - 4AC^2Y^2, \quad \dot{Y} = -Y(3+8AX/3). \tag{14}$$

Особая точка $O(0,0)$ системы (14) является центром [6]. Следовательно, точка $O(0,0)$ — центр системы (12).

При выполнении условий 9) система (1) имеет вид

$$\dot{x} = x(1+Ax/3)(1+2Ax/3) + 4Cy^3, \quad \dot{y} = y[-1+(2/9)Ax(1+Ax/3)]. \tag{15}$$

Замена (13) преобразует ее к системе

$$\dot{X} = X + 4AX^2/3 + 8ACXY/3 - 20AC^2Y^2/3, \quad \dot{Y} = -Y(3+8ACY/3). \tag{16}$$

Согласно [5], точка $O(0,0)$ системы (16) является центром. Тогда и $O(0,0)$ системы (15) — центр.

Заметим, что система (1) в случае выполнения условий 8) заменой (13) преобразуется к виду

$$\dot{X} = X + 4AX^2/3 + 4ACXY/3 - 16AC^2Y^2/3, \quad \dot{Y} = -Y(3+4AX/3+4ACY/3). \tag{17}$$

Точка $O(0,0)$ системы (17) является центром.

Необходимость. Будем использовать первые 4 фокусные величины системы (3). Имеем

$$g_1 = C\{M(6A+M)(A^2-M^2) + 2B(9A^2+3AM-11M^2) + 27B^2 -$$
$$- N[2(3A^2+11AM+3M^2)+24B] - 3N^2\},$$

$$g_2 = C^2\{M(6A+M)(M^2-A^2)(4260A^4+20888A^3M+28165A^2M^2+11550AM^3+1509M^4)+$$
$$+4B(-19170A^6-127296A^5M-181344A^4M^2+32501A^3M^3+175042A^2M^4+75117AM^5+9534M^6)+$$
$$+3B^2(-145980A^4-389652A^3M-204653A^2M^2+89586AM^3+19607M^4)-162B^3(2855A^2+$$
$$+4443AM+703M^2)+N[2(12780A^6+114942A^5M+337729A^4M^2+407036A^3M^3+207375A^2M^4+$$
$$+47544AM^5+4158M^6)+6B[41046A^4+189415A^3M+236250A^2M^2+80066AM^3+7665M^4]+$$
$$+18B^2(25981A^2+39819AM+5873M^2)]\},$$
$$g_j = C^j\left[\sum_{k=0}^{2j-1} a_{4j-2k,j}(A,M)B^k + N\sum_{k=0}^{2j-2} b_{4j-2-2k,j}(A,M)B^k\right],$$

где $a_{m,j}$, $b_{m,j}$ — однородные полиномы m-й степени относительно A, M, $j=3,4$.

Если $C=0$, то $g_j=0$, $j=\overline{1,4}$, имеем случай центра 1). Пусть $C\neq 0$. Тогда рассматриваем $H_j = g_j/C^j$, $j=\overline{1,4}$. Необходимыми условиями центра при $C\neq 0$ являются $H_j=0$, $j=\overline{1,4}$. Результант R_1 полиномов H_1, H_2 относительно N выражается так:

$$R_1 = (6A+M)(A+M)(B+AM+M^2)A_1,$$

где

$$A_1 = M(M^2-A^2)(1840320A^9+4487328A^8M-5163528A^7M^2-32987688A^6M^3-49795702A^5M^4-$$
$$-35548535A^4M^5-14615738A^3M^6-3520040A^2M^7-458392AM^8-25705M^9)+B(-5520960A^{10}-$$
$$-1442016A^9M+45354456A^8M^2+66049284A^7M^3-101815258A^6M^4-364161857A^5M^5-$$
$$-368557275A^4M^6-167069150A^3M^7-45824056A^2M^8-7137141AM^9-389787M^{10})+$$
$$+B^2(33299424A^8+53002080A^7M-113606676A^6M^2-445552006A^5M^3-605354263A^4M^4-$$
$$-217445704A^3M^5+157192730A^2M^6+37915686AM^7-996759M^8)+B^3(-24617520A^6+$$
$$+74815920A^5M+815702562A^4M^2+1692007629A^3M^3+2079335615A^2M^4+1531207091AM^5+$$
$$+211619183M^6)+108B^4(-351396A^4+6912933A^3M+13760812A^2M^2+13664116AM^3+$$
$$+11757583M^4)+3888B^5(114543A^2-25099AM-248792M^2).$$

Результанты R_{j-1} полиномов H_1, H_j, $j=3,4$, относительно N имеют вид $R_{j-1}=(B+$ $+AM+M^2)(A+M)(6A+M)A_{j-1}$, где $A_{j-1}=\sum\limits_{k=0}^{4j-3} b_{8j-2k-4,j}(A,M)B^k$, $b_{m,j}$ — однородные полиномы m-й степени относительно A, M. Необходимыми условиями центра являются $R_k=0$, $k=\overline{1,3}$.

Пусть $B+AM+M^2=0$. Тогда $H_1=(-6A^2+8AM+24M^2-3N)(2AM+2M^2+N)$, $H_j=(6A+M)(2A+3M)(2AM+2M^2+N)S_{4j-4}(A,M)$, $j=\overline{2,4}$, где S_{4j-4} — однородные полиномы $(4j-4)$-й степени относительно A, M. Если при этом $2AM+2M^2+N=0$, то имеем случай центра 4). Предположим $2AM+2M^2+N\neq 0$. Тогда при $6A+M=0$ имеем $B+30A^2=0$, $270A^2-N=0$, т.е. находим случай центра, для которого выполняются условия 2). Если $2A+3M=0$, то $2A^2-9B=0$, $2A^2+9N=0$, получаем случай центра 8). Если $(6A+M)(2A+3M)(2AM+2M^2+N)\neq 0$, то из $S_4=0$, $S_8=0$ находим $A=0$, $M=0$, а тогда $H_1\neq 0$; других случаев центра не получаем.

Предположим $A+M=0$. Тогда $H_1=(10A^2-27B-3N)(B-N)$, $H_j=A^2T_{2j-2}(A^2,B)\times$ $\times(B-N)$, $j=\overline{2,4}$, где $T_{2j-2}(x,y)$ — однородные полиномы $(2j-2)$-й степени. В этом случае при $B-N=0$ получаем случай центра 3). Пусть $B-N\neq 0$. Тогда при $A=0$ из $H_1=0$ находим, что $9B+N=0$, т.е. имеем частный случай 2). Если $A(B-N)\neq 0$, то из $T_2=0$, $T_4=0$ получаем $A=0$, $B=0$, что невозможно.

Пусть $6A+M=0$. Тогда $H_1=(-30A^2+B-N)(9B+N)$, $H_j=A^2(30A^2+B)(9B+N)\times$ $\times V_{2j-3}(A^2,B)$, $j=\overline{2,4}$, где $V_{2j-3}(x,y)$ — однородные полиномы $(2j-3)$-й степени. Если

$9B+N=0$, то имеем случай центра 2). Предположим, что $9B+N\neq 0$. Тогда при $30A^2+B=0$ находим, что $60A^2+N=0$, т.е. получаем частный случай 4). Если $A=0$, то $M=0$, $B-N=0$, т.е. имеем частный случай 3). Если $A(30A^2+B)(9B+N)=0$, то из $V_1=0$, $V_3=0$ находим $A=0$, $B=0$, что невозможно.

Предположим, что $(6A+M)(A+M)(B+AM+M^2)\neq 0$. Тогда необходимыми условиями центра являются условия $A_j=0$, $j=\overline{1,3}$.

Пусть Z_1 — результант полиномов A_1, A_2 относительно B, тогда $Z_1=WD_1D_2$, где $W=M^4(A+M)^7(A+2M)^3(3A+2M)^2(A-M)(2A+M)(2A-3M)(2A+3M)$, D_1 — однородный полином 33-й степени относительно A, M с коэффициентами порядка 10^{44}, а D_2 — однородный полином 62-й степени с коэффициентами порядка 10^{97}. Результант Z_2 полиномов A_1, A_3 относительно B будет вида $Z_2=WD_3D_4$, где D_3 — однородный полином 57-й степени с коэффициентами порядка 10^{91}, D_4 — однородный полином 86-й степени с коэффициентами порядка 10^{163}. Найдем случаи центра, когда $W=0$.

Пусть $M=0$. Тогда $AB\neq 0$, $A_1=A^2BE_4(A^2,B)$, $A_2=A^2BE_8(A^2,B)$, где $E_i(x,y)$ — однородные полиномы i-й степени. Из $E_4=0$, $E_8=0$ находим $A=0$, $B=0$, что невозможно. Предположим, что $M-A=0$. Тогда $A\neq 0$, $A_1=A^2B\widetilde{E_4}(A^2,B)$, $A_2=A^2B\widetilde{E_8}(A^2,B)$, где $\widetilde{E_i}(x,y)$ — однородные полиномы i-й степени. Если $B=0$, то из $H_1=0$, $H_2=0$ находим $N=0$, т.е. имеем случай центра 5). Если же $B\neq 0$, то из $\widetilde{E_4}=0$, $\widetilde{E_8}=0$ получаем $A=0$, $B=0$, что невозможно. Предположим $2A+M=0$. Тогда $A\neq 0$, $A_1=A^2(-2A^2+9B)G_4(A^2,B)$, $A_2=A^2(-2A^2+9B)G_8(A^2,B)$, где $G_i(x,y)$ — однородные полиномы i-й степени. Если $2A^2-9B=0$, то из $H_1=0$, $H_2=0$ получаем $2A^2+3N=0$, т.е. имеем случай центра 7). Если $2A^2-9B\neq 0$, то из $G_4=0$, $G_8=0$ находим $A=0$, $B=0$, что невозможно. Пусть $A+2M=0$. Тогда $A\neq 0$, $A_1=A^2(-A^2+4B)\widetilde{G_4}(A^2,B)$, $A_2=A^2(-A^2+4B)\widetilde{G_8}(A^2,B)$, где $\widetilde{G_i}(x,y)$ — однородные полиномы i-й степени. Если при этом $-A^2+4B=0$, то из $H_1=0$, $H_2=0$ получаем $A^2-2N=0$, т.е. имеем случай центра, для которого выполняются условия 4). Если $-A^2+4B\neq 0$, то из $\widetilde{G_4}=0$, $\widetilde{G_8}=0$ находим $A=0$, $B=0$, что невозможно. Предположим теперь $3A+2M=0$. Тогда $A\neq 0$, $A_1=A^2(5A^2-4B)(A^2-4B)F_3(A^2,B)$, $A_2=A^2(-A^2+4B)F_8(A^2,B)$, $A_3=A^2(-A^2+4B)F_{12}(A^2,B)$, где $F_i(x,y)$ — однородные полиномы i-й степени. Если $A-4B=0$, то из $H_1=0$, $H_2=0$ находим $N=0$, т.е. имеем случай центра 6). Если же $A^2-4B\neq 0$, то из $F_8=0$, $F_{12}=0$ имеем $A=0$, $B=0$, а это невозможно. Пусть $2A-3M=0$. Тогда $A\neq 0$, $A_1=A^2(-2A^2+9B)\widetilde{F_4}(A^2,B)$, $A_2=A^2(-2A^2+9B)\widetilde{F_8}(A^2,B)$, где $\widetilde{F_i}(x,y)$ — однородные полиномы i-й степени. Если $2A^2-9B=0$, то из $H_1=0$, $H_2=0$ получаем $2A^2-9N=0$, т.е. находим случай центра 9). Если $2A^2-9B\neq 0$, то из $\widetilde{F_4}=0$ имеем $A=0$, $B=0$, что невозможно. Предположим $2A+3M=0$. Тогда $A\neq 0$, $A_1=A^2(-2A^2+9B)M_4(A^2,B)$, $A_2=A^2(-2A^2+9B)M_8(A^2,B)$, где $M_i(x,y)$ — однородные полиномы i-й степени. Если при этом $2A^2-9B=0$, то $H_1=(4A^2-9N)(2A^2+9N)$. Тогда при $4A^2-9N=0$ имеем частный случай 4). Если же $2A^2+9N=0$, то получаем случай центра 8). Если $2A^2-9B\neq 0$, то из $M_4=0$, $M_8=0$ имеем $A=0$, $B=0$, что невозможно. Таким образом, случаи центра с $W=0$ исследованы полностью.

Пусть $W\neq 0$. Тогда из $D_1D_2=0$, $D_3D_4=0$ получаем $A=0$, $B=0$, т.е. новых случаев центра не находим. Теорема 1 доказана.

Пусть $\widetilde{R_2}$ — результант полиномов H_2, H_3 относительно N. Имеем

$$\widetilde{R_2}=(6A+M)(A+M)(B+AM+M^2)Q_2,$$

где

$$\begin{aligned}Q_2={}&M(M^2-A^2)(-34490152512A^{11}-82397396448A^{10}M+107974123128A^9M^2+\\&+630947463288A^8M^3+884151201726A^7M^4+495998080955A^6M^5+52121148264A^5M^6-\\&-82759538924A^4M^7-50329603408A^3M^8-13355954711A^2M^9-1771289598AM^{10}-\\&-97999680M^{11})+B(103470457536A^{12}+30485971296A^{11}M-851379511176A^{10}M^2-\end{aligned}$$

$$- 1234535895396A^9M^3 + 1967077754274A^8M^4 + 6777105199331A^7M^5 + 6181722382518A^6M^6 +$$

$$+ 1578651742572A^5M^7 - 547584641141A^4M^8 - 478625366517A^3M^9 - 157670678148A^2M^{10} -$$

$$- 25418296806AM^{11} - 1368543783M^{12}) + B^2(-598383425376A^{10} - 955394644896A^9M +$$

$$+ 2093143955940A^8M^2 + 8127286110450A^7M^3 + 10990850584857A^6M^4 + 3545616922595A^5M^5 -$$

$$- 3717173154263A^4M^6 - 630526672380A^3M^7 + 864436318383A^2M^8 + 176103724815AM^9 -$$

$$- 1827712557M^{10}) + B^3(305583841296A^8 - 1678162007232A^7M - 14775386689566A^6M^2 -$$

$$- 28603755784935A^5M^3 - 31528896194442A^4M^4 - 19380830320465A^3M^5 + 4511054164513A^2M^6 +$$

$$+ 5841470144904AM^7 + 806073974871M^8) + 3B^4(276064026336A^6 - 4782958388676A^5M -$$

$$- 10371176135226A^4M^2 - 10503144583947A^3M^3 - 8862897070077A^2M^4 - 195640930301AM^5 +$$

$$+ 1290907987043M^6) + 108B^5(-75533152644A^4 - 11207407617A^3M + 116827222602A^2M^2 -$$

$$- 75359154926AM^3 - 91405386151M^4) + 11664B^6(-178171263A^2 + 28929139AM + 403158752M^2).$$

Результант Z_3 полиномов A_1, Q_2 относительно B имеет вид $Z_3 = WD_1D_5^2$, где D_5 — однородный полином 13-й степени относительно A, M с коэффициентами порядка 10^{20}. Если $W \neq 0$, то методом исключения из системы уравнений $A_1 = 0$, $Q_2 = 0$ получаем уравнение $U_1B + U_0 = 0$, где U_1 — однородный полином 53-й степени относительно A, M с коэффициентами порядка 10^{73}, U_0 — однородный полином 55-й степени с коэффициентами порядка 10^{71}. Если $C(6A + M)(A + M)(B + AM + M^2)W \neq 0$, то система уравнений $g_k = 0$, $k = \overline{1,3}$ эквивалентна системе

$$H_2 = 0, \quad U_1B + U_0 = 0, \quad D_1 = 0, \quad AC \neq 0, \tag{18}$$

все решения которой удовлетворяют условию $g_4 \neq 0$. Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Если выполняются условия (18), то точка $O(0,0)$ системы (1) является фокусом 12-го порядка.*

Например, $O(0,0)$ системы (1) является фокусом 12-го порядка, если

$$A = 1, \quad C = 1, \quad B = 0,253479998548445719216846870303395892485871535977537\ldots,$$

$$M = -1,120319200838695757902490408938725471581775680958771 8\ldots,$$

$$N = 0,233332253301867453542155899567521188150595953189889 16\ldots.$$

Замечание. Если для системы (1) $v_k = 0$, $k = \overline{1,12}$, то $v_k = 0$ для $k > 12$.

Интересно, существуют ли кубические системы, имеющие 12 малоамплитудных предельных циклов. Заметим, что нам неизвестно, существуют ли вещественные кубические системы с чисто мнимыми собственными значениями линейной части, имеющие вещественные фокусы 12-го порядка.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

Литература

1. *Wang D.* // J. Diff. Eq. 1990. Vol. 87. P. 305 — 315.
2. *Liu Yi-rong* // Chinese Scince Bulletin. 1990. Vol. 35, N 15. P. 1241 — 1245.
3. *James E. M. & Lloyd N. G.* // IMA J. Appl. Math. 1991. Vol. 47. P. 163 — 171.
4. *Zoladek H.* // Nonlinearity. 1995. Vol. 8. P. 843 — 860.
5. *Zoladek H.* // J. Diff. Eq. 1997. Vol. 137, N 1. P. 94 — 118.
6. *Fronville A., Sadovski A. P., Zoladek H.* // Fundamenta Mathematicae. 1998. Vol. 157. P. 191 — 207.

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы

Поступила в редакцию 1 апреля 1999 г.