Д. В. Ховратович, О мощности некоторых подклассов монотонных функций, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 4, 81–97

DOI: 10.4213/dm131

Дискретная математика

том 17 выпуск 4 * 2005

УДК 519.7

О мощности некоторых подклассов монотонных функций

© 2005 г. Д. В. Ховратович

Рассматривается вопрос о числе функций от n переменных из классов, являющихся пересечениями класса M монотонных функций с другими предполными классами в трехзначной логике. Получена асимптотика при $n \to \infty$ логарифма мощности таких классов.

1. Общий подход

Задача оценки числа функций из некоторого класса $\mathcal{F}$ может быть решена следующим способом.

Каждой функции $f \in \mathcal{F}$ по некоторому правилу ставится в соответствие набор функций $\langle f_1, f_2, \ldots, f_l \rangle$. Это соответствие можно описать как отображение

$$\mathcal{P}: \mathcal{F} \to \widehat{\mathcal{F}}_1 \times \widehat{\mathcal{F}}_2 \times \ldots \times \widehat{\mathcal{F}}_l,$$

где $\widehat{\mathcal{F}}_i$, $i = 1, \ldots, n$, — некоторые множества функций, символ $\times$ обозначает взятие декартова произведения множеств. Тогда, если отображение $\mathcal{P}$ инъективно, то

$$|\mathcal{F}| \leqslant |\widehat{\mathcal{F}}_1||\widehat{\mathcal{F}}_2| \ldots |\widehat{\mathcal{F}}_l|.$$

Если известны верхние оценки мощности классов $\widehat{\mathcal{F}}_i$, то можно легко получить верхнюю оценку мощности $\mathcal{F}$.

С учетом уже построенных множеств $\widehat{\mathcal{F}}_i$, для получения нижней оценки достаточно, чтобы для некоторого k, $1 \leqslant k \leqslant l$, существовало инъективное отображение $\mathcal{Q}$, действующее из $\widehat{\mathcal{F}}_k$ в $\mathcal{F}$. Тогда $|\mathcal{F}| \geqslant |\widehat{\mathcal{F}}_k|$.

2. Основные определения

Обозначим через E_k, $k \in \mathrm{N}$, множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, n-ю декартову степень этого множества обозначим через E_k^n, а элементы полученного множества будем называть наборами гиперкуба (или просто куба) и представлять в виде $(a_1, \ldots, a_n)$.

Далее для сокращения записи будем обозначать через $f(A)$ множество всех значений, принимаемых функцией f на множестве A. Множество функций, действующих из A в B, будем обозначать $\{A \to B\}$.

Определение 1. Пусть $j \in E_k$. Тогда назовем j-подкубом куба E_k^n с индексом $N \subset \{1,2,\dots,n\}$ множество всех таких наборов $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ куба E_k^n, что

$$\alpha_i = j \iff i \in N, \quad i = 1,\dots n.$$

Например, 2-подкуб куба E_3^3 с индексом $\{2,3\}$ — это множество наборов $\{(0,2,2),(1,2,2)\}$.

Замечание 1. Заметим, что число j-подкубов в кубе E_k^n не зависит от k и равно 2^n. Кроме того, j-подкубы не пересекаются, а в объединении дают весь куб E_k^n.

Определение 2. Частичным порядком O на множестве E_k называется двухместное отношение на этом множестве, удовлетворяющее условиям рефлексивности, транзитивности и антисимметричности. Для элементов из E_k, удовлетворяющих этому отношению, применяется обозначение $a \leqslant_O b$, причем, если $a \neq b$, то будем писать $a < b$. Если любые два элемента сравнимы по данному порядку, то он называется линейным. В дальнейшем будем рассматривать только линейные порядки.

Введем обозначения для линейных порядков, используемых нами в дальнейшем, пусть

$$\begin{aligned} O_3&: \quad 0 < 1 < 2, \\ O_3^0&: \quad 0 < 1, \\ O_3^2&: \quad 1 < 2, \\ O_3'&: \quad 1 < 0 < 2. \end{aligned}$$

Определение 3. Пусть на множестве E_k задан порядок O, а наборы a и b принадлежат множеству E_k^n. Будем говорить, что набор $a = (a_1,a_2,\dots,a_n)$ меньше либо равен набору $b = (b_1,b_2,\dots,b_n)$ согласно порядку O и писать $a \leqslant_O b$, если $a_i \leqslant_O b_i$, $i = 1,\dots n$. Легко проверить, что заданное таким образом отношение также является порядком.

Определение 4. Пусть на множестве E_k задан некоторый порядок O. Функции f, действующие из E_k^n в E_k и такие, что

$$\forall a,b \in E_k^n \quad a \leqslant_O b \implies f(a) \leqslant_O f(b),$$

будем называть сохраняющими порядок O, а класс всех таких функций обозначать $\{A \to_O B\}$.

Определение 5. Классом $M_3(n)$ называется множество функций $\{E_3^n \to_{O_3} E_3\}$. Известно [1], что данный класс является предполным в множестве $\mathcal{P}_3$ всех функций трехзначной логики.

Определение 6. Пусть на множестве A введен некоторый порядок O_1, а на множестве B — некоторый порядок O_2. Функции f, действующие из A в B и такие, что

$$\forall a,b \in A \quad a \leqslant_{O_1} b \implies f(a) \leqslant_{O_2} f(b),$$

будем называть сохраняющими порядок $O_1 \mid O_2$, а класс всех таких функций обозначать $\{A \to_{O_1|O_2} B\}$.

3. Класс $M_3(n) \cap U_{\{0\}\{1,2\}}(n)$

Определение 7. Классом $U_{\{0\}\{1,2\}}(n)$ называется множество всех функций трехзначной логики от n переменных, сохраняющих разбиение $D = \{0\}\{1,2\}$ (см. также [1]).

Согласно [1], данный класс является предполным в $\mathcal{P}_3$.

Теорема 1. *Для числа $\psi_{MU_0}(n)$ функций в классе $M_3(n) \cap U_{\{0\}\{1,2\}}(n)$ справедливо равенство*

$$\psi_{MU_0}(n) = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon(n))},$$

где $\varepsilon(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Обозначим исследуемый класс функций через $\mathcal{F}$.

Лемма 1. *Пусть $f \in \mathcal{F}$. Тогда на каждом 0-подкубе куба E_3^n функция f принимает либо только значение 0, либо только значения 1 и 2.*

Доказательство. Пусть A — некоторый 0-подкуб куба E_3^n, а N — его индекс. Заметим, что любые два набора $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ из A эквивалентны согласно данному разбиению, это следует из того, что

$$\tilde{\alpha}_i = 0 \iff i \in N \iff \tilde{\beta}_i = 0.$$

Функция f сохраняет разбиение D, поэтому

$$\forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in A \quad f(\tilde{\alpha}) \overset{D}{\sim} f(\tilde{\beta}),$$

следовательно, на наборах из A функция f принимает либо только значение 0, либо только 1 и 2. Отсюда следует утверждение леммы.

Введем множество $\hat{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{2^n}\}$, состоящее из всех 0-подкубов куба E_3^n. Заметим, что $\bigcup_{A_i \in A} A_i = E_3^n$.

Введем также множество $\widehat{S} = \{S_1, S_2\}$ подстановок на E_k, где

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

и построим функциональные множества

$$\widehat{\mathcal{F}}_1 = \{\hat{A} \to \widehat{S}\}, \tag{1}$$

$$\widehat{\mathcal{F}}_2 = \{E_3^n \to_{O_3 | O_3^2} \{1,2\}\}. \tag{2}$$

Фиксируем произвольную функцию f из $\mathcal{F}$. Определим для нее функцию f_1 из $\widehat{\mathcal{F}}_1$, полагая для всех $A \in \hat{A}$

$$f_1(A) = \begin{cases} S_1, & \text{если } f(A) = \{0\}, \\ S_2 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3}$$

Теперь построим функцию f_2, определенную на E_3^n, полагая для всех $\tilde{\alpha} \in E_3^n$

$$f_2(\tilde{\alpha}) = f_1(A_{\tilde{\alpha}})[f(\tilde{\alpha})], \tag{4}$$

где $A_{\tilde{\alpha}}$ — 0-подкуб, содержащий набор $\tilde{\alpha}$. Корректность такого определения следует из того, что каждый набор попадает ровно в один 0-подкуб.

Лемма 2. *Пусть f — функция из $\mathcal{F}$, а функции f_1 и f_2 задаются по правилам* (3) *и* (4) *соответственно. Тогда функция f_2 принадлежит функциональному множеству $\widehat{\mathcal{F}}_2$.*

Доказательство. Согласно определению подстановок из $\widehat{S}$, если $f(\widetilde{\alpha}) \neq 0$, то $f(\widetilde{\alpha}) = f_2(\widetilde{\alpha})$, в противном случае $f_2(\widetilde{\alpha}) = 1$.

Таким образом, функция f_2 получается из f заменой всех нулей на единицы. Из этого следует, что $f_2(E_3^n) \subset \{1,2\}$. Теперь возьмем два произвольных набора a и b из E_3^n такие, что $a \leqslant_{O_3} b$. Функция f сохраняет порядок O_3, поэтому

$$f(a) \leqslant_{O_3} f(b) \implies f_2(a) \leqslant_{O_3} f_2(b).$$

Из этого следует, что $f_2(a) \leqslant_{O_3^2} f_2(b)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Существует инъективное отображение $\mathcal{P}$ множества $\mathcal{F}$ в $\widehat{\mathcal{F}}_1 \times \widehat{\mathcal{F}}_2$.*

Доказательство. Положим $\mathcal{P}(f) = (f_1, f_2)$, где функции f_1 и f_2 задаются по правилам (3) и (4) соответственно. Функция f_1 принадлежит множеству $\widehat{\mathcal{F}}_1$ по определению. Функция f_2 принадлежит множеству $\widehat{\mathcal{F}}_2$ по лемме 2. Таким образом, отображение $\mathcal{P}$ действует из $\mathcal{F}$ в $\widehat{\mathcal{F}}_1 \times \widehat{\mathcal{F}}_2$.

Покажем его инъективность. Действительно, пусть функции f' и f'' принадлежат классу $\mathcal{F}$ и отличны друг от друга на наборе $\widetilde{\alpha}$. Возможны следующие варианты.

Среди значений $f'(\widetilde{\alpha}), f''(\widetilde{\alpha})$ есть 2. Тогда $f_2'(\widetilde{\alpha}) \neq f_2''(\widetilde{\alpha})$, так как подстановки множества $\widehat{S}$ переводят в двойку только двойку, поэтому $\mathcal{P}(f') \neq \mathcal{P}(f'')$.

Среди значений $f'(\widetilde{\alpha}), f''(\widetilde{\alpha})$ нет двойки, а значит, есть 0 и 1. Пусть $A_{\widetilde{\alpha}}$ есть 0-подкуб, соответствующий набору $\widetilde{\alpha}$. Тогда, по лемме 1, на этом подкубе одна из функций будет принимать только значение 0, а другая — только 1 и 2. Отсюда следует, что $f_1'(A_{\widetilde{\alpha}}) \neq f_1''(A_{\widetilde{\alpha}})$. Таким образом, и в этом случае $\mathcal{P}(f') \neq \mathcal{P}(f'')$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Справедлива оценка*

$$|\mathcal{F}| \leqslant 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_1(n))},$$

где $\varepsilon_1(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Согласно лемме 3 существует инъективное отображение $\mathcal{P}$, действующее из $\mathcal{F}$ в $\widehat{\mathcal{F}}_1 \times \widehat{\mathcal{F}}_2$. Поэтому

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{P}(\mathcal{F})| \leqslant |\widehat{\mathcal{F}}_1||\widehat{\mathcal{F}}_2|.$$

Мощность $\widehat{\mathcal{F}}_1$, очевидно, равна $|\hat{A}|^{|\widehat{S}|} = 2^{2^n}$, а для мощности $\widehat{\mathcal{F}}_2$ справедлива оценка (см. [2])

$$|\widehat{\mathcal{F}}_2| = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))}, \tag{5}$$

где $\varepsilon_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Отсюда получаем, что

$$|\mathcal{F}| \leqslant 2^{2^n} 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))} = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))+2^n} = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_1(n))},$$

где $\varepsilon_1(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Существует инъективное отображение* $\mathfrak{Q}$ *из* $\widehat{\mathcal{F}}_2$ *в* $\mathcal{F}$.

Доказательство. Покажем, что достаточно взять тривиальное отображение

$$\mathfrak{Q}(f_2) = f_2$$

для всех $f_2 \in \widehat{\mathcal{F}}_2$. Очевидно, что это отображение инъективно. Покажем, что $\mathfrak{Q}$ действует в $\mathcal{F}$. Это утверждение эквивалентно тому, что

$$\widehat{\mathcal{F}}_2 \subset M_3(n) \cap U_{\{0\}\{1,2\}}(n).$$

Действительно, функции из $\widehat{\mathcal{F}}_2$ сохраняют порядок O_3: из того, что $f_2(a) \leqslant_{O_3^2} f_2(b)$ при всех $a \leqslant_{O_3} b$, следует, что $f_2(a) \leqslant_{O_3} f_2(b)$. Они также сохраняют разбиение $\{0\}\{1,2\}$, так как множество значений этих функций попадает в один класс эквивалентности по данному разбиению.

Лемма 6. *Справедлива оценка*

$$|\mathcal{F}| \geqslant 2^{\sqrt{3/4\pi n}3^n(1+\varepsilon_2(n))},$$

где $\varepsilon_2(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Согласно лемме 5 существует инъективное отображение $\mathfrak{Q}$, действующее из $\widehat{\mathcal{F}}_2$ в $\mathcal{F}$. Поэтому в силу (5)

$$|\mathcal{F}| \geqslant |\widehat{\mathcal{F}}_2| = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))}.$$

Утверждение теоремы следует теперь из лемм 4 и 6.

Следствие 1. *Пусть* $\psi_{MU_1}(n)$ *— число функций из класса* $M_3(n) \cap U_{\{1\}\{0,2\}}(n)$, *а* $\psi_{MU_2}(n)$ *— число функций из класса* $M_3(n) \cap U_{\{2\}\{0,1\}}(n)$. *Тогда справедливы соотношения*

$$\psi_{MU_1}(n) = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_3(n))},$$
$$\psi_{MU_2}(n) = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_4(n))},$$

где $\varepsilon_3(n) \to 0$ *и* $\varepsilon_4(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Для доказательства этих соотношений достаточно провести те же самые рассуждения с перестановкой констант и изменением соответствующих порядков.

4. Класс $M_3(n) \cap T_{\mathscr{C}_0,1}(n)$

Определение 8. Классом $T_{\mathscr{C}_0,1}(n)$ называется множество всех функций трехзначной логики от n переменных, сохраняющих предикат

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Согласно [1], данный класс является предполным в $\mathcal{P}_3$.

Теорема 2. *Для числа $\psi_{MT_0}(n)$ функций в классе $M_3(n) \cap T_{\mathscr{C}_0,1}(n)$ справедливо равенство*

$$\psi_{MT_0}(n) = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon(n))},$$

где $\varepsilon(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Обозначим исследуемый класс функций через $\mathscr{F}$.

Лемма 7. *Пусть $f \in \mathscr{F}$, A — произвольный 2-подкуб куба E_3^n. Тогда 1 и 2 не входят во множество $f(A)$ одновременно.*

Доказательство. Пусть N — индекс 2-подкуба A. Заметим, что любые два набора $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из A сравнимы по предикату R_1, это следует из того, что

$$\widetilde{\alpha}_i = 2 \iff i \in N \iff \widetilde{\beta}_i = 2,$$

поэтому запрещенных по данному предикату пар значений не возникает. Функция f сохраняет предикат R_1, поэтому любая пара ее значений на наборах из A должна быть сравнима по данному предикату. Таким образом, невозможен случай, когда на одном наборе принимается значение 1, а на другом — значение 2. Из этого следует, что эти два значения не могут входить в множество $f(A)$ одновременно. Отсюда следует утверждение леммы.

Введем множество $\hat{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_{2^n}\}$, состоящее из всех 2-подкубов куба E_3^n. Заметим, что

$$\bigcup_{A_i \in A} A_i = E_3^n.$$

Введем множество подстановок $\widehat{S} = \{S_1, S_2\}$, где

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

и построим функциональные множества

$$\widehat{\mathscr{F}}_1 = \{\hat{A} \to \widehat{S}\},$$
$$\widehat{\mathscr{F}}_2 = \{E_3^n \to_{O_3|O_3^0} \{0,1\}\}.$$

Фиксируем произвольную функцию f из $\mathscr{F}$. Определим для нее функцию f_1 из $\widehat{\mathscr{F}}_1$, полагая для всех $A \in \hat{A}$

$$f_1(A) = \begin{cases} S_1, & \text{если } 2 \in f(A), \\ S_2 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{6}$$

Теперь построим функцию f_2, определенную на E_3^n, полагая для всех $\widetilde{\alpha} \in E_3^n$

$$f_2(\widetilde{\alpha}) = f_1(A_{\widetilde{\alpha}})[f(\widetilde{\alpha})], \tag{7}$$

где $A_{\widetilde{\alpha}}$ — 2-подкуб, содержащий набор $\widetilde{\alpha}$. Корректность такого определения следует из того, что каждый набор попадает ровно в один 2-подкуб.

Лемма 8. *Пусть f — функция из $\mathcal{F}$, а функции f_1 и f_2 задаются по правилам (6) и (7) соответственно. Тогда функция f_2 принадлежит функциональному множеству $\widehat{\mathcal{F}}_2$.*

Доказательство. Согласно определению подстановок из $\widehat{S}$, если $f(\widetilde{\alpha}) \neq 2$, то $f(\widetilde{\alpha}) = f_2(\widetilde{\alpha})$, в противном случае $f_2(\widetilde{\alpha}) = 1$.

Таким образом, функция f_2 получается из f заменой всех двоек на единицы. Из этого следует, что $f_2(E_3^n) \subset \{0, 1\}$. Теперь возьмем произвольные два набора a и b из E_3^n такие, что $a \leqslant_{O_3} b$. Функция f сохраняет порядок O_3, поэтому

$$f(a) \leqslant_{O_3} f(b) \implies f_2(a) \leqslant_{O_3} f_2(b).$$

Из этого следует, что $f_2(a) \leqslant_{O_3^0} f_2(b)$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Существует инъективное отображение $\mathcal{P}$ из $\mathcal{F}$ в $\widehat{\mathcal{F}}_1 \times \widehat{\mathcal{F}}_2$.*

Доказательство. Положим $\mathcal{P}(f) = (f_1, f_2)$, где функции f_1 и f_2 задаются по правилам (6) и (7) соответственно. Функция f_1 принадлежит множеству $\widehat{\mathcal{F}}_1$ по определению. Функция f_2 принадлежит множеству $\widehat{\mathcal{F}}_2$ по лемме 8. Таким образом, отображение $\mathcal{P}$ действует из $\mathcal{F}$ в $\widehat{\mathcal{F}}_1 \times \widehat{\mathcal{F}}_2$.

Покажем его инъективность. Действительно, пусть функции f' и f'' принадлежат классу $\mathcal{F}$ и отличны друг от друга на наборе $\widetilde{\alpha}$. Возможны следующие варианты.

Среди значений $f'(\widetilde{\alpha}), f''(\widetilde{\alpha})$ есть 0. Тогда $f_2'(\widetilde{\alpha}) \neq f_2''(\widetilde{\alpha})$, так как подстановки множества $\widehat{S}$ переводят в ноль только ноль, поэтому $\mathcal{P}(f') \neq \mathcal{P}(f'')$.

Среди значений $f'(\widetilde{\alpha}), f''(\widetilde{\alpha})$ нет нуля, а значит, есть 2 и 1. Пусть $A_{\widetilde{\alpha}}$ — 2-подкуб, соответствующий набору $\widetilde{\alpha}$. Тогда, по лемме 7, на этом 2-подкубе одна из функций будет принимать значение 2, а другая не будет. Отсюда следует, что $f_1'(A_{\widetilde{\alpha}}) \neq f_1''(A_{\widetilde{\alpha}})$. Таким образом, и в этом случае $\mathcal{P}(f') \neq \mathcal{P}(f'')$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Справедлива оценка*

$$|\mathcal{F}| \leqslant 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_1(n))},$$

где $\varepsilon_1(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Согласно лемме 9 существует инъективное отображение $\mathcal{P}$, действующее из $\mathcal{F}$ в $\widehat{\mathcal{F}}_1 \times \widehat{\mathcal{F}}_2$. Поэтому

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{P}(\mathcal{F})| \leqslant |\widehat{\mathcal{F}}_1||\widehat{\mathcal{F}}_2|.$$

Мощность $\widehat{\mathcal{F}}_1$, очевидно, равна $|\widehat{A}|^{|\widehat{S}|} = 2^{2^n}$, а для мощности $\widehat{\mathcal{F}}_2$ справедлива оценка (см. [2])

$$|\widehat{\mathcal{F}}_2| = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))}, \tag{8}$$

где $\varepsilon_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда получаем, что

$$|\mathcal{F}| \leqslant 2^{2^n} 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))} = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))+2^n} = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_1(n))},$$

где $\varepsilon_1(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Лемма 11. *Существует инъективное отображение $\mathcal{Q}$ из $\widehat{\mathcal{F}}_2$ в $\mathcal{F}$.*

Доказательство. Покажем, что достаточно взять тривиальное отображение

$$\mathfrak{Q}(f_2) = f_2$$

для всех $f_2 \in \widehat{\mathcal{F}}_2$. Очевидно, что это отображение инъективно. Покажем, что $\mathfrak{Q}$ действует в $\mathcal{F}$. Это утверждение эквивалентно тому, что

$$\widehat{\mathcal{F}}_2 \subset M_3(n) \cap T_{\mathcal{C}_0,1}(n).$$

Действительно, все функции из $\widehat{\mathcal{F}}_2$ сохраняют порядок O_3: если $f_2(a) \leqslant_{O_3^2} f_2(b)$ для всех $a \leqslant_{O_3} b$, то $f_2(a) \leqslant_{O_3} f_2(b)$. Они также сохраняют предикат R_1, так как любая пара значений из множества $\{0, 1\}$ удовлетворяет этому предикату.

Лемма 12. *Справедлива оценка*

$$|\mathcal{F}| \geqslant 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))},$$

где $\varepsilon_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Согласно лемме 11 существует инъективное отображение $\mathfrak{Q}$, действующее из $\widehat{\mathcal{F}}_2$ в $\mathcal{F}$. Поэтому в силу (8)

$$|\mathcal{F}| \geqslant |\widehat{\mathcal{F}}_2| = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_2(n))}.$$

Утверждение теоремы следует теперь из лемм 10 и 12.

Следствие 2. *Обозначим через $T_{\mathcal{C}_2,1}(n)$ класс функций трехзначной логики от n переменных, сохраняющих предикат*

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\psi_{MT_2}(n)$ — число функций из класса $M_3(n) \cap T_{\mathcal{C}_2,1}(n)$. Тогда справедливо равенство

$$\psi_{MT_2}(n) = 2^{\sqrt{3/(4\pi n)}3^n(1+\varepsilon_4(n))},$$

где $\varepsilon_3(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Для доказательства этого равенства достаточно провести те же самые рассуждения с взаимной заменой констант 2 на 0 и соответствующей перестановкой порядков.

5. Класс $M_3(n) \cap M_3'(n)$

Определение 9. Классом $M_3'(n)$ называется множество функций $\{E_3^n \to_{O_3'} E_3\}$.

Теорема 3. *Для числа $\psi_{MM'}(n)$ функций из класса $M_3(n) \cap M_3'(n)$ справедливо равенство*

$$\psi_{MM'}(n) = 2^{\sqrt{2/(\pi n)}2^n(1+\varepsilon(n))},$$

где $\varepsilon(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Для сокращения записи обозначим исследуемый класс через $\mathcal{F}$. Введем множество $\hat{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{2^n}\}$, состоящее из всех 2-подкубов куба E_3^n.

Лемма 13. *Пусть $f \in \mathcal{F}$, A — произвольный 2-подкуб куба E_3^n. Тогда f на A принимает либо только значение 2, либо только значения 0 и 1.*

Доказательство. Пусть N — индекс A. Предположим, что на наборе $\tilde{\alpha} \in A$ функция f принимает значение 2. Для доказательства леммы достаточно показать, что в этом случае на всем 2-подкубе A принимается значение 2.

Для этого рассмотрим набор $\tilde{\alpha}_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где

$$\alpha_j = 0 \iff j \notin N,$$
$$\alpha_j = 2 \iff j \in N.$$

Ясно, что он также принадлежит 2-подкубу A.

Из определения порядка O_3' и того, что функция f сохраняет порядок O_3', следует, что

$$\tilde{\alpha} \leqslant_{O_3'} \tilde{\alpha}_0 \implies 2 = f(\tilde{\alpha}) \leqslant_{O_3'} f(\tilde{\alpha}_0) \implies f(\tilde{\alpha}_0) = 2.$$

С другой стороны, для произвольного набора $\tilde{\beta}$ из A

$$\tilde{\alpha}_0 \leqslant_{O_3} \tilde{\beta} \implies 2 = f(\tilde{\alpha}_0) \leqslant_{O_3} f(\tilde{\beta}) \implies f(\tilde{\beta}) = 2.$$

Таким образом, на всем множестве A будет приниматься значение 2.

Лемма доказана.

Теперь для каждой функции $f \not\equiv 2$ из $\mathcal{F}$ построим множество $I(f) \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ следующим образом:

$$I(f) = \bigcup_{A \in \hat{A} : f(A) \subset \{0,1\}} N(A), \tag{9}$$

где $N(A)$ — индекс 2-подкуба A.

Введем обозначение

$$\mathcal{F}(I) = \{f \in \mathcal{F} \mid I(f) = I\}.$$

Заметим, что

$$\mathcal{F} = \left(\biguplus_{I \subset \{1,2,\ldots,n\}} \mathcal{F}(I) \right) \cup \{f \equiv 2\}. \tag{10}$$

Переформулируем определение монотонных булевых функций в наших обозначениях.

Определение 10. Классом $M_2(n)$ называется множество функций $\{E_2^n \to_{O_3^0} E_2\}$.

Докажем основную лемму.

Лемма 14. *Пусть $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда*

$$|\mathcal{F}(I)| \leqslant |M_2(|I|)| |M_2(n - |I|)|.$$

Доказательство. Согласно определению 2-подкуба, он однозначно определяется своим индексом. Построим взаимно однозначное соответствие между элементами множества E_2^n и индексами 2-подкубов и будем считать, что по такому же правилу определяется соответствие между наборами из E_2^n и 2-подкубами куба E_3^n.

Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in E_2^n$. Определим множество $N_{\widetilde{\alpha}} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, полагая

$$i \in N_{\widetilde{\alpha}} \iff \alpha_i = 1, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Пусть $A_{N_{\widetilde{\alpha}}}$ — 2-подкуб с индексом $N_{\widetilde{\alpha}}$.

Теперь построим для каждой функции f из $\mathcal{F}(I)$ функцию h_f, определенную на множестве E_2^n и задаваемую для всех $\widetilde{\alpha} \in E_2^n$ формулой

$$h_f(\widetilde{\alpha}) = \begin{cases} 1, & f(A_{N_{\widetilde{\alpha}}}) = \{2\}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{12}$$

Покажем, что все такие функции являются монотонными булевыми функциями.

Лемма 15. *Пусть $f \in \mathcal{F}(I)$ и h_f определяется формулой* (12). *Тогда $h_f \in \{E_2^n \to_{O_3^0} E_2\}$.*

Доказательство. По определению $h_f \in \{E_2^n \to E_2\}$. Покажем, что h_f сохраняет O_3^0. Фиксируем произвольные наборы $a, b \in E_2^n$ такие, что $a \leqslant_{O_3^0} b$. Очевидно, что если $h_f(a) = 0$, то $h_f(a) \leqslant_{O_3^0} h_f(b)$. Предположим, что $h_f(a) = 1$. Согласно определению h_f, это означает, что $f(A_{N_a}) = \{2\}$. Возьмем в 2-подкубе A_{N_a} набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ такой, что

$$\alpha_i = \begin{cases} 2, & \text{если } i \in N_a, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Аналогичным образом возьмем в 2-подкубе A_{N_b} набор $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ такой, что

$$\beta_i = \begin{cases} 2, & \text{если } i \in N_b, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку $a \leqslant_{O_3^0} b$, справедливо соотношение (11), $N_a \subset N_b$. Отсюда получаем, что $\widetilde{\alpha} \leqslant_{O_3} \widetilde{\beta}$. Функция f по определению сохраняет порядок O_3, поэтому $2 = f(\widetilde{\alpha}) \leqslant_{O_3} f(\widetilde{\beta})$. Следовательно, $f(\widetilde{\beta}) = 2$. Согласно лемме 13 это означает, что на всех наборах 2-подкуба A_{N_b} функция f принимает только значение 2. По определению функции h_f это означает, что $h_f(b) = 1$. Таким образом, $h_f(a) \leqslant_{O_3^0} h_f(b)$. Лемма доказана.

Введем обозначение

$$H_{\mathcal{F}_I} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}(I)} \{h_f\}.$$

Лемма 16. *Пусть $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда*

$$|H_{\mathcal{F}_I}| \leqslant |M_2(|I|)|.$$

Доказательство. В случае, если $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, утверждение леммы является следствием леммы 15.

Рассмотрим случай $I \neq \{1,2,\dots,n\}$. Фиксируем произвольную функцию f из $\mathcal{F}(I)$ и произвольное число $j \in \{1,2,\dots,n\}\backslash I$. Фиксируем также произвольный набор $\tilde{\alpha}$ куба E_2^n, j-я компонента которого равна единице. Рассмотрим соответствующий ему 2-подкуб $A_{N_{\tilde{\alpha}}}$. Согласно определению $N_{\tilde{\alpha}}$, $j \in N_{\tilde{\alpha}}$. Кроме того, $j \notin I$. Согласно определению I (см. (9)) и лемме 13 на $A_{N_{\tilde{\alpha}}}$ функция f будет принимать только значение 2. По определению h_f это дает равенство $h_f(\tilde{\alpha}) = 1$.

Итак, если в наборе из E_2^n хотя бы одна компонента с номером не из I равна 1, то значение функции h_f на этом наборе равно 1. Пусть $|I| = l$. Не ограничивая общности рассуждений, положим $I = \{1,2,\dots,l\}$. Тогда получаем, что функцию h_f можно представить в виде

$$h_f(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_{l+1} \vee x_{l+2} \vee \dots \vee x_n \vee \hat{h}_f(x_1,x_2,\dots,x_l), \tag{13}$$

где $\hat{h}_f$ — тоже монотонная функция, то есть $\hat{h}_f \in \{E_2^l \to_{O_3^0} E_2\}$

Число функций вида (13) не превосходит

$$|\{E_2^l \to_{O_3^0} E_2\}| = |M_2(l)| = |M_2(|I|)|.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Теперь рассмотрим произвольную функцию f из класса $\mathcal{F}(I)$. Пусть D — множество наборов куба E_3^n, на которых функция f не принимает значение 2.

Пусть мощность $|I|$ равна l. Не ограничивая общности рассуждений, положим $I = \{1,2,\dots,l\}$. Пусть $\alpha_{l+1},\alpha_{l+2},\dots,\alpha_n$ — элементы множества $\{0,1\}$. Введем множество наборов

$$B(\alpha_{l+1},\alpha_{l+2},\dots,\alpha_n) = \{(a_1,a_2,\dots,a_n) \in D \mid a_{l+1} = \alpha_{l+1}, a_{l+2} = \alpha_{l+2},\dots,a_n = \alpha_n\}.$$

Лемма 17. *Пусть f — функция из $\mathcal{F}(I)$, а $\hat{\alpha} = (\alpha_{l+1},\alpha_{l+2},\dots,\alpha_n)$ — набор элементов множества $\{0,1\}$. Пусть a и b — наборы из E_3^n такие, что $b \in B(\hat{\alpha})$, $a = (a_1,a_2,\dots,a_l,\hat{\alpha})$ и $a \leqslant_{O_3} b$. Тогда $a \in B(\hat{\alpha})$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $a \in D$. Действительно, $b \in B(\hat{\alpha})$, следовательно, $f(b) \in \{0,1\}$. Функция f сохраняет порядок O_3, а $a \leqslant_{O_3} b$, поэтому $f(a) \leqslant_{O_3} f(b)$. Отсюда получаем, что $f(a) \in \{0,1\}$, следовательно, $a \in D$.

Лемма 18. *Пусть f — функция из $\mathcal{F}(I)$, а $\hat{\alpha} = (\alpha_{l+1},\alpha_{l+2},\dots,\alpha_n)$ — набор элементов множества $\{0,1\}$. Пусть $a = (a_1,a_2,\dots,a_n)$, $b = (b_1,b_2,\dots,b_n)$ — наборы из $B(\hat{\alpha})$, причем*

$$a_i \neq b_i \iff b_i = 2, \quad i = 1,\dots,n.$$

Тогда $f(a) = f(b)$.

Доказательство. Заметим, что $a \leqslant_{O_3} b$ и $a \leqslant_{O_3'} b$. Отсюда следует, что справедливы соотношения $f(a) \leqslant_{O_3} f(b)$ и $f(a) \leqslant_{O_3'} f(b)$. Набор b лежит в $B(\alpha_{l+1},\alpha_{l+2},\dots,\alpha_n)$, поэтому $f(b) \in \{0,1\}$. Заметим, что 0 — минимальный элемент порядка O_3, а 1 — минимальный элемент порядка O_3'. Из этого следует, что $f(b)$ является минимальным элементом по одному из порядков. Отсюда получаем, что $f(a) = f(b)$.

Лемма 19. *Пусть f — функция из $\mathcal{F}(I)$, а $\alpha_{l+1},\alpha_{l+2},\dots,\alpha_n$ — элементы множества $\{0,1\}$. Тогда на множестве $B(\alpha_{l+1},\alpha_{l+2},\dots,\alpha_n)$ функция f либо тождественно равна 0, либо тождественно равна 1.*

Доказательство. Для краткости обозначим $\widehat{\alpha}$ последовательность $\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \ldots, \alpha_n$. Так как множество $B(\widehat{\alpha})$ является подмножеством D, функция f на нем принимает только значения 0 и 1. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что функция f постоянна на $B(\widehat{\alpha})$.

Для этого индукцией по m докажем, что для любого $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha}) \in B(\widehat{\alpha})$ справедливо равенство

$$f(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha}) = f(0, \ldots, 0, \beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha}), \tag{14}$$

где в правой части равны нулю первые m аргументов функции f.

Очевидно, при $m = 0$ равенство (14) верно.

Предположим, что при всех $m < t \leqslant l$ равенство (14) выполнено. Докажем равенство для $m = t$.

Фиксируем произвольный набор $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha})$ из $B(\widehat{\alpha})$. Рассмотрим следующие случаи.

Пусть $\beta_t = 0$. Тогда по предположению индукции

$$\begin{aligned} f(\beta_1, \ldots, \beta_{t-1}, \beta_t, \beta_{t+1}, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha}) &= f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{t-1}, \beta_t, \beta_{t+1}, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha}) \\ &= f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{t-1}, 0, \beta_{t+1}, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha}) \\ &= f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{t}, \beta_{t+1}, \beta_{t+2}, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пусть $\beta_t = 2$. Тогда рассмотрим набор $\widetilde{\beta}_0 = (\beta_1, \ldots, \beta_{t-1}, 0, \beta_{t+1}, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha})$. Для пары наборов $\widetilde{\beta}_0$ и $\widetilde{\beta}$ верно утверждение леммы 17, поэтому $\widetilde{\beta}_0 \in B(\widehat{\alpha})$. В этом случае для $\widetilde{\beta}_0$ и $\widetilde{\beta}$ верно также утверждение леммы 18, поэтому $f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\beta}_0)$. Кроме того, по предположению индукции

$$f(\widetilde{\beta}_0) = f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{t}, \beta_{t+1}, \beta_{t+2}, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha}),$$

и в этом случае мы также доказали верность индуктивного перехода.

Пусть теперь $\beta_t = 1$. Рассмотрим набор $\widetilde{\beta}' = (\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_l, \widehat{\alpha})$, где β'_i, $i = 1, \ldots, l$, определяются по правилу

$$\beta'_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta_i = 2, \\ \beta_i & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{15}$$

Заметим, что для наборов $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\beta}'$ верно утверждение леммы 17, поэтому $\widetilde{\beta}' \in B(\widehat{\alpha})$. В этом случае для $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\beta}'$ верно также утверждение леммы 18, поэтому

$$f(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\beta}'). \tag{16}$$

Константа t лежит в множестве I, что означает, что существует такой 2-подкуб A, индекс $N \subset I$ которого содержит t, причем $f(A) \subset \{0, 1\}$. Таким образом, построив набор $\widetilde{\beta}^A = (\beta^A_1, \beta^A_2, \ldots, \beta^A_l, \widehat{\alpha})$ из этого 2-подкуба такой, что для $i = 1, \ldots, l$

$$\beta^A_i = \begin{cases} 2, & \text{если } i \in N; \\ \beta'_i & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

мы получим, что $\widetilde{\beta}^A \in B(\widehat{\alpha})$. Заметим, что для наборов $\widetilde{\beta}'$ и $\widetilde{\beta}^A$ верно утверждение леммы 18, поэтому

$$f(\widetilde{\beta}') = f(\widetilde{\beta}^A). \tag{17}$$

Построим набор $\widetilde{\beta}'' = (\beta_1'', \beta_2'', \ldots, \beta_l'', \widehat{\alpha})$, где β_i'', $i = 1, \ldots, l$, определяются по правилу $\beta_t'' = 0$, $\beta_i'' = \beta_i'$, если $i \neq t$.

Так как $t \in N$ и $\widetilde{\beta}'' \in B(\widehat{\alpha})$ (достаточно применить лемму 17), для наборов $\widetilde{\beta}^A$ и $\widetilde{\beta}''$ верно утверждение леммы 18, поэтому

$$f(\widetilde{\beta}^A) = f(\widetilde{\beta}''). \tag{18}$$

Наконец, построим набор $\widetilde{\beta}''' = (\beta_1''', \beta_2''', \ldots, \beta_l''', \widehat{\alpha})$, где β_i''', $i = 1, \ldots, l$, определяются по правилу $\beta_t''' = 0$, $\beta_i''' = \beta_i$, если $i \neq t$.

Заметим, что $\widetilde{\beta}''' \leqslant_{O_3} \widetilde{\beta}$, поэтому по лемме 17 $\widetilde{\beta}''' \in B(\widehat{\alpha})$. В силу (15) получаем, что для наборов $\widetilde{\beta}''$ и $\widetilde{\beta}'''$ верно утверждение леммы 18, поэтому

$$f(\widetilde{\beta}'') = f(\widetilde{\beta}'''). \tag{19}$$

По построению

$$f(\widetilde{\beta}''') = f(\beta_1, \ldots, \beta_{t-1}, 0, \beta_{t+1}, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha}).$$

В то же время по предположению индукции

$$\begin{aligned} f(\widetilde{\beta}''') &= f(\beta_1, \ldots, \beta_{t-1}, 0, \beta_{t+1}, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha}) \\ &= f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{t-1}, 0, \beta_{t+1}, \beta_{t+2}, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha}) \\ &= f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{t}, \beta_{t+1}, \beta_{t+2}, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha}). \end{aligned} \tag{20}$$

Объединяя равенства (16), (17), (18), (19) и (20), получим, что

$$f(\widetilde{\beta}) = f(\beta_1, \ldots, \beta_{t-1}, \beta_t, \beta_{t+1}, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha}) = f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{t}, \beta_{t+1}, \beta_{t+2}, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha}).$$

Таким образом, и в последнем случае индуктивный переход имеет место.

Этим завершается доказательство индуктивного перехода. Вспомогательное утверждение доказано. Взяв $m = l$, получим, что для всех $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha}) \in B(\widehat{\alpha})$

$$f(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l, \widehat{\alpha}) = f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{l}, \widehat{\alpha}),$$

что и дает утверждение леммы.

Лемма доказана.

Пусть $f \in \mathcal{F}(I)$. Определим функцию s_f, действующую на множестве E_2^{n-l}, по правилу

$$s_f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-l}) = f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{l}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-l}). \tag{21}$$

Введем функциональное множество

$$S_{\mathcal{F}_{\mathcal{S}}} = \{E_2^{n-l} \to_{O_3^0} E_2\}.$$

Лемма 20. *Пусть* $f \in \mathcal{F}(I)$, s_f *определяется по правилу* (21). *Тогда* $s_f \in S_{\mathcal{F}_s}$.

Доказательство. Сначала покажем, что s_f действует в E_2. Фиксируем произвольный набор $\widetilde{\beta} \in E_2^{n-l}$.

По определению I и $\mathcal{F}(I)$, функция f тождественно не равна 2, следовательно, существует набор $\widetilde{\alpha} \in E_3^n$ такой, что $f(\widetilde{\alpha}) \in \{0,1\}$. Заметим, что $\widetilde{\alpha}_0 \leqslant_{O_3} \widetilde{\alpha}$. Функция f принадлежит классу $M_3(n)$, поэтому $f(\widetilde{\alpha}_0) \leqslant_{O_3} f(\widetilde{\alpha})$. Отсюда получаем, что $f(\widetilde{\alpha}_0) \in \{0,1\}$. Набор $\widetilde{\alpha}_0$ находится в одном 2-подкубе с набором $(0,\dots,0,\widetilde{\beta})$ размерности n и по лемме 13 $f(0,\dots,0,\widetilde{\beta})$ также лежит во множестве $\{0,1\}$. Следовательно, $s_f(\widetilde{\beta}) \in \{0,1\} = E_2$.

Покажем, что построенная функция s_f сохраняет порядок O_3^0. Пусть

$$(a_1,a_2,\dots,a_{n-l}), \quad (b_1,b_2,\dots,b_{n-l}) \in E_2^{n-l},$$

причем

$$(a_1,a_2,\dots,a_{n-l}) \leqslant_{O_3^0} (b_1,b_2,\dots,b_{n-l}).$$

В этом случае

$$\begin{aligned}
(a_1,a_2,\dots,a_{n-l}) &\leqslant_{O_3^0} (b_1,b_2,\dots,b_{n-l}) && \Longrightarrow\\
(\underbrace{0,\dots,0}_{l},a_1,a_2,\dots,a_{n-l}) &\leqslant_{O_3} (\underbrace{0,\dots,0}_{l},b_1,b_2,\dots,b_{n-l}) && \Longrightarrow\\
f(\underbrace{0,\dots,0}_{l},a_1,a_2,\dots,a_{n-l}) &\leqslant_{O_3} f(\underbrace{0,\dots,0}_{l},b_1,b_2,\dots,b_{n-l}) && \Longrightarrow\\
s_f(a_1,a_2,\dots,a_{n-l}) &\leqslant_{O_3} s_f(b_1,b_2,\dots,b_{n-l}) && \Longrightarrow\\
s_f(a_1,a_2,\dots,a_{n-l}) &\leqslant_{O_3^0} s_f(b_1,b_2,\dots,b_{n-l}).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Таким образом, определив отображение $\mathcal{P}$ на множестве $\mathcal{F}(I)$ по правилу $\mathcal{P}(f) = h_f \times s_f$, получим, что $\mathcal{P}$ действует из $\mathcal{F}(I)$ в $H_{\mathcal{F}_s} \times S_{\mathcal{F}_I}$.

Лемма 21. *Существует инъективное отображение* $\mathcal{P}$ *из* $\mathcal{F}(I)$ *в* $H_{\mathcal{F}_s} \times S_{\mathcal{F}_I}$.

Доказательство. Для произвольной функции f из $\mathcal{F}(I)$ положим

$$\mathcal{P}(f) = (h_f, s_f),$$

где h_f определяется по правилу (12), а s_f по правилу (21). Согласно определению $H_{\mathcal{F}_s}$ и лемме 20, это отображение действует в $H_{\mathcal{F}_s} \times S_{\mathcal{F}_I}$. Покажем его инъективность.

Действительно, возьмем две любые различные функции f' и f'' из $\mathcal{F}(I)$. Пусть набор $\widetilde{\alpha}$ их различает. Возможны следующие варианты.

Среди значений $f'(\widetilde{\alpha})$, $f''(\widetilde{\alpha})$ есть двойка. Пусть $A_{\widetilde{\alpha}}$ — 2-подкуб, соответствующий набору $\widetilde{\alpha}$. По лемме 13, одна из функций f', f'' будет принимать на нем только значение 2, а другая только значения 0 и 1. Определим набор $a = (a_1,a_2,\dots,a_n)$ из множества E_2^n по правилу

$$a_i = \begin{cases} 1, & \text{если } j \in N(A_{\widetilde{\alpha}}),\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

В этом случае $A_{N_a} = A_{\widetilde{\alpha}}$. Согласно определению, одна из функций $h_{f'}$, $h_{f''}$ на a принимает значение 1, а другая значение 0, поэтому $h_{f'} \neq h_{f''}$. В этом случае $\mathcal{P}(f') \neq \mathcal{P}(f'')$.

Среди значений $f'(\widetilde{\alpha}), f''(\widetilde{\alpha})$ нет двойки, следовательно, есть 0 и 1. Пусть

$$\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \qquad \widetilde{\alpha}_0 = (\underbrace{0, \dots, 0}_{l}, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_n).$$

В этом случае $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}_0 \in B(\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \dots, \alpha_n)$. Согласно лемме 19

$$f'(\widetilde{\alpha}_0) = f'(\widetilde{\alpha}), \qquad f''(\widetilde{\alpha}_0) = f''(\widetilde{\alpha}).$$

По определению функции s_f

$$s_{f'}(\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \dots, \alpha_n) = f'(\widetilde{\alpha}_0), \qquad s_{f''}(\alpha_{l+1}, \alpha_{l+2}, \dots, \alpha_n) = f''(\widetilde{\alpha}_0),$$

откуда следует, что $s_{f'} \neq s_{f''}$. Таким образом, и в этом случае $\mathcal{P}(f') \neq \mathcal{P}(f'')$. Лемма доказана.

Из лемм 21 и 16 следует, что для $\mathcal{F}(I)$ справедлива оценка

$$|\mathcal{F}(I)| \leqslant |H_{\mathcal{F}_{\mathfrak{s}}}||S_{\mathcal{F}_{\mathfrak{s}}}| \leqslant \{M_2(n-l) = S_{\mathcal{F}_I}\} \leqslant |M_2(l)||M_2(n-l)| = |M_2(|I|)||M_2(n-|I|)|.$$

Основная лемма доказана.

Лемма 22. *Справедлива оценка*

$$|\mathcal{F}| \leqslant 2^{\sqrt{2/(\pi n)}2^n(1+\varepsilon_1(n))},$$

где $\varepsilon_1(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Согласно основной лемме и равенству (10) справедливы неравенства

$$|\mathcal{F}| \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n} \sum_{|I|=k} |\mathcal{F}(I)| \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |M_2(k)||M_2(n-k)|$$
$$\leqslant 2\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} |M_2(k)|||M_2(n-k)| \leqslant n\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}|M_2(\lfloor n/2 \rfloor)||M_2(n)|.$$

Согласно [3] для $|M_2(n)|$ справедлива оценка

$$|M_2(n)| = 2^{\sqrt{2/(\pi n)}2^n(1+\varepsilon_2(n))}, \tag{22}$$

где $\varepsilon_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда получаем, что

$$|\mathcal{F}| \leqslant n\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}|M_2(\lfloor n/2 \rfloor)|\,|M_2(n)|$$
$$\leqslant 2^{n+\log_2 n + \sqrt{2/(\pi n/2)}2^{n/2}(1+\varepsilon_2(n)) + \sqrt{2/(\pi n)}2^n(1+\varepsilon_2(n))} = 2^{\sqrt{2/(\pi n)}2^n(1+\varepsilon_1(n))},$$

где $\varepsilon_1(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Лемма доказана.

Лемма 23. *Существует инъективное отображение* $\mathcal{Q}$ *из* $S_{\mathcal{F}_\varnothing}$ *в* $\mathcal{F}(\varnothing)$.

Доказательство. Напомним, что по определению

$$S_{\mathcal{F}_\varnothing} = \{E_2^n \to_{O_3^0} E_2\}.$$

Построим для произвольной функции $f \in S_{\mathcal{F}_\varnothing}$ функцию $f' = \mathfrak{Q}[f]$, действующую на E_3^n, по следующему правилу: для любого $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in E_3^n$

$$f'(\widetilde{\alpha}) = \begin{cases} 2, & \text{если существует } i \text{ такое, что } \alpha_i = 2, \\ f(\widetilde{\alpha}) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что все построенные таким образом функции различны. Покажем, что все они принадлежат классу $\mathcal{F}(\varnothing)$. По определению $\mathcal{F}(\varnothing)$ в этот класс входят все функции класса $\mathcal{F}$, отличные от двойки только на 2-подкубе с параметром $N = \varnothing$.

Так как построенные функции отличны от 2 только на 2-подкубе с параметром $N = \varnothing$ (обозначим его A_0), достаточно показать, что все они сохраняют порядки O_3 и O_3'. Фиксируем два произвольных набора $a \leqslant_{O_3} b$ и функцию $f \in S_{\mathcal{F}_\varnothing}$. Возможны следующие варианты.

(1) $a \in A_0, b \notin A_0$. Тогда $f'(a) = f(a) \in \{0, 1\}$ и

$$f'(b) = 2 \implies f'(a) \leqslant_{O_3} f'(b).$$

(2) $a \notin A_0, b \notin A_0$. Тогда

$$f'(a) = f'(b) = 2 \implies f'(a) \leqslant_{O_3} f'(b).$$

(3) $a \in A_0, b \in A_0$. Тогда $f'(a) = f(a), f'(b) = f(b)$. Так как f сохраняет порядок O_3^0, а $a \leqslant_{O_3} b \Rightarrow a \leqslant_{O_3^0} b$, справедливы соотношения

$$f(a) \leqslant_{O_3^0} f(b) \implies f(a) \leqslant_{O_3} f(b) \implies f'(a) \leqslant_{O_3} f'(b).$$

(4) $a \notin A_0$, $b \in A_0$. Это означает, что некоторая (скажем, i-я) компонента набора a равна 2. Но $a \leqslant_{O_3} b$, поэтому i-я компонента набора b также должна быть равна 2, что противоречит тому, что $b \in A_0$. Поэтому такой случай невозможен.

Теперь фиксируем произвольные наборы $a \leqslant_{O_3'} b$. Рассмотрим те же варианты.

(1′) $a \in A_0, b \notin A_0$. Тогда $f'(a) = f(a) \in \{0, 1\}$ и

$$f'(b) = 2 \implies f'(a) \leqslant_{O_3'} f'(b).$$

(2′) $a \notin A_0, b \notin A_0$. Тогда

$$f'(a) = f'(b) = 2 \implies f'(a) \leqslant_{O_3'} f'(b).$$

(3′) $a \in A_0, b \in A_0$. Тогда $f'(a) = f(a), f'(b) = f(b)$. Так как f сохраняет порядок O_3^0, а $a \leqslant_{O_3'} b \Rightarrow b \leqslant_{O_3^0} a$), справедливы соотношения

$$f(b) \leqslant_{O_3^0} f(a) \implies f(a) \leqslant_{O_3'} f(b) \implies f'(a) \leqslant_{O_3'} f'(b).$$

(4′) $a \notin A_0$, $b \in A_0$. Это означает, что некоторая (скажем, i-я) компонента набора a равна 2. Но $a \leqslant_{O_3'} b$, поэтому i-я компонента набора b также должна быть равна 2, что противоречит тому, что $b \in A_0$. Поэтому такой случай невозможен.

Лемма доказана.

Лемма 24. *Справедлива оценка*

$$|\mathcal{F}| \geqslant 2^{\sqrt{2/(\pi n)}\cdot 2^n(1+\varepsilon_2(n))},$$

где $\varepsilon_2(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Согласно лемме 23, существует инъективное отображение $\mathfrak{Q}$, действующее из $S_{\mathcal{F}_\varnothing}$ в $\mathcal{F}(\varnothing)$. Поэтому согласно (22)

$$|\mathcal{F}| \geqslant |\mathcal{F}(\varnothing)| \geqslant |S_{\mathcal{F}_\varnothing}| = |M_2(n)| = 2^{\sqrt{2/(\pi n)}2^n(1+\varepsilon_2(n))},$$

где $\varepsilon_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда получаем, что

$$|\mathcal{F}| \geqslant 2^{\sqrt{2/(\pi n)}2^n(1+\varepsilon_2(n))},$$

где $\varepsilon_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Лемма доказана.

Из лемм 24 и 22 получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

Аналогичный результат верен для всех классов, являющихся пересечением двух предполных классов монотонных функций.

Список литературы

1. Яблонский С. В., Функциональные построения в k-значной логике. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР* (1958) **51**, 5–142.

2. Алексеев В. Б., О числе монотонных k-значных функций. *Проблемы кибернетики* (1974) **28**, 5–24.

3. Клейтмен Д., О проблеме Дедекинда: число монотонных булевых функций. *Киберн. сб.* (1970) **7**, 43–52.

Статья поступила 28.05.2005.