



Общероссийский математический портал

В. Т. Борухов, О компакте решений неравенства диссипации для релаксационных систем,
Дифференц. уравнения, 2005, том 41, номер 4, 549–550

<https://www.mathnet.ru/de11265>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

18 апреля 2025 г., 11:00:40



УДК 517.938

О КОМПАКТЕ РЕШЕНИЙ НЕРАВЕНСТВА ДИССИПАЦИИ
ДЛЯ РЕЛАКСАЦИОННЫХ СИСТЕМ

© 2005 г. В. Т. Борухов

Рассмотрим линейную управляемую и наблюдаемую релаксационную односвязную систему

$$\Sigma = (A, b, c, d) : \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad y(t) = cx(t) + du(t), \quad t \geq 0,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t), y(t) \in \mathbb{R}$. Напомним, что система Σ называется релаксационной [1], если $d \geq 0$ и функция $V(t) = ce^{At}b$ удовлетворяет условиям полной монотонности: $(-1)^k V^{(k)}(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0$, $\forall k = \overline{0, \infty}$.

В приложениях теории релаксационных систем важное место занимает неравенство диссипации [1, 2], матричная форма которого для системы Σ имеет вид

$$-W(Q) \geq 0, \quad W(Q) := \begin{bmatrix} L_A Q & Qb - c' \\ b'Q - c & -2d \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Здесь $Q \in S_n$, S_n – пространство вещественных симметрических $n \times n$ -матриц, $L_A Q := A'Q + QA$, штрих обозначает транспонирование, неравенство $-W(Q) \geq 0$ означает, что квадратичная форма $-z'W(Q)z$ ($z \in \mathbb{R}^{n+1}$) неотрицательно определена.

Далее, без ограничения общности будем считать, что выполнено условие $d > 0$, $\det A \neq 0$. Множество $\Omega = \{Q \mid W(Q) \leq 0\}$ решений неравенства (1) является в этом случае замкнутым выпуклым компактом в S_n размерности $\dim \Omega = n(n+1)/2$. При этом, согласно [3], Ω допускает стратификацию $\Omega = (\Omega_0 \setminus \Omega_1) \cup \dots \cup (\Omega_n \setminus \Omega_{n+1})$, где $\Omega_0 = \Omega$ ($\Omega_{n+1} = \emptyset$), $\Omega_i \setminus \Omega_{i+1} \quad \forall i = \overline{1, n}$ – гладкие многообразия размерности $(n-i)(n+i+2)/2$, $\Omega_1 = \partial\Omega$ – граница Ω , $\Omega_i \quad \forall i = \overline{2, n}$ – полуалгебраические множества расположенных на $\partial\Omega$ особых точек кратности не меньше i алгебраического множества $P_1 = \{Q \mid \text{rank } W(Q) \leq n\}$. Множество Ω_i имеет вид $\Omega_i = P_i \cap \partial\Omega$, где $P_i = \{Q \mid \text{rank } W(Q) \leq n-i+1\}$. Алгебраические множества $P_i \quad \forall i = \overline{1, n}$ образуют фильтрацию

$$S_n =: P_0 \supset P_1 \supset \dots \supset P_n \supset P_{n+1} = \emptyset \quad (2)$$

пространства S_n . В работе [4] показано, что совокупность Ω_n особых точек максимальной кратности полуалгебраического множества Ω имеет мощность 2^n , $\Omega_n = P_n$ и, кроме того, Ω_n совпадает со множеством симметрических вещественных решений алгебраического уравнения Риккати

$$R(Q) := L_A Q + (2d)^{-1}(Qb - c')(b'Q - c) = 0. \quad (3)$$

Рассмотрим разрешающий многогранник $\text{conv } \Omega_n$ для неравенства диссипации (1). Геометрические свойства многогранника $\text{conv } \Omega_n$ изучались в работах [5, 6], из которых, в частности, следует, что $\dim \text{conv } \Omega_n = \dim \Omega$ и Ω_n – множество вершин $\text{conv } \Omega_n$. Целью настоящей работы является описание класса граней $\text{conv } \Omega_n$, лежащих на границе множества Ω .

Обозначим через \mathcal{L}_k объединение аффинных плоскостей размерности k , составленных из аффинных оболочек подмножеств множества Ω_n , а через L_k объединение k -мерных граней разрешающего многогранника. Определим индекс m_j , полагая

$$m_j = \begin{cases} n-j-1 & \text{для } j \in \{1, 2, \dots, n-5\}, \\ l+1 & \text{для } j \in \{n-2l, n-2l+1\}, \quad l=1, 2. \end{cases} \quad (4)$$

Класс плоскостей, принадлежащих фильтрации (2), характеризует

Теорема 1. *Справедливы включения $\mathcal{L}_{m_j-1} \subseteq P_j \quad \forall j = \overline{1, n-1}$.*

Доказательство. Пусть Q_i , $i = \overline{1, m_j}$, – особые точки кратности n такие, что $\dim \text{aff}\{Q_i \mid i = \overline{1, m_j}\} = m_j - 1$. Образует матрицу $Q_0 = \sum_{i=1}^{m_j} \alpha_i Q_i$, $\sum_{i=1}^{m_j} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, m_j}$, которая соответствует произвольной точке из плоскости, натянутой на Q_i , $i = \overline{1, m_j}$.

Запишем P_j в виде $P_j = \{Q : \text{rank } R(Q) \leq n - j\}$. Применим оператор Риккати $R : S_n \rightarrow S_n$, действие которого определено формулой (3), к матрице Q_0 . Имеем $R(Q_0) = L_{A - \frac{1}{2d}bc}Q_0 + \frac{1}{2d}(Q_0bb'Q_0 + c'c)$, где

$$\begin{aligned} L_{A - \frac{1}{2d}bc}Q_0 &= \left(A' - \frac{1}{2d}c'b'\right)Q_0 + Q_0\left(A - \frac{1}{2d}bc\right) = \sum_{i=1}^{m_j} \alpha_i \left(\left(A' - \frac{1}{2d}c'b'\right)Q_i + Q_i\left(A - \frac{1}{2d}bc\right) \right) = \\ &= -\frac{1}{2d} \sum_{i=1}^{m_j} \alpha_i (Q_i bb' Q_i + c'c) = -\frac{1}{2d} \left(\sum_{i=1}^{m_j} \alpha_i Q_i bb' Q_i + c'c \right). \end{aligned}$$

Тогда

$$2dR(Q_0) = Q_0 bb' Q_0 - \sum_{i=1}^{m_j} \alpha_i Q_i bb' Q_i. \quad (5)$$

Таким образом, $\text{rank } R(Q_0) \leq m_j + 1$ для $j \in \{1, \dots, n-5\}$ и, следовательно, $Q_0 \in P_j$, где $j = n - m_j - 1$. Так как Q_0 – произвольная точка из плоскости, натянутой на $n - j - 1$ особых точек, то на P_j лежит вся эта плоскость.

Далее преобразуем правую часть выражения (5). Пусть $\gamma_{m_j} := \{(i, l) \mid 1 \leq i < l \leq m_j\}$, тогда

$$\begin{aligned} 2dR(Q_0) &= \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{l=1}^{m_j} \alpha_i \alpha_l Q_i bb' Q_l - \sum_{i=1}^{m_j} \alpha_i Q_i bb' Q_i = \sum_{i=1}^{m_j} \alpha_i (\alpha_i - 1) Q_i bb' Q_i + \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{l=1, l \neq i}^{m_j} \alpha_i \alpha_l Q_i bb' Q_l = \\ &= \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{l=1, l \neq i}^{m_j} \alpha_i \alpha_l Q_i bb' Q_l - \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{l=1, l \neq i}^{m_j} \alpha_i \alpha_l Q_i bb' Q_i = \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{l=1}^{m_j} \alpha_i \alpha_l Q_i bb' (Q_l - Q_i) = \\ &= \sum_{(i,l) \in \gamma_{m_j}} \alpha_i \alpha_l (Q_i bb' (Q_l - Q_i) + Q_l bb' (Q_i - Q_l)) = - \sum_{(i,l) \in \gamma_{m_j}} \alpha_i \alpha_l (Q_l - Q_i) bb' (Q_l - Q_i). \end{aligned}$$

Получаем, что $\text{rank } R(Q_0) \leq m_j(m_j - 1)/2$ и, следовательно, $Q_0 \in P_j$, где $j = n - m_j(m_j - 1)/2$. Значит, на P_j лежат плоскости, натянутые на $m_j = \lceil (\sqrt{8(n-i)} + 1 + 1)/2 \rceil$ особых точек ($\lceil \cdot \rceil$ – целая часть числа).

Итак, $m_j = \max\{n - j - 1, \lceil (\sqrt{8(n-j)} + 1 + 1)/2 \rceil\}$, откуда и вытекает (4). Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Справедливы включения $L_{m_j-1} \subseteq \mathcal{L}_{m_j-1}$, $L_{m_j-1} \subseteq \Omega_j \quad \forall j = \overline{1, n-1}$.*

Следствие 2. *На границе множества Ω лежат: 1) ребра для $n = 2, 3, \dots$; 2) 2-мерные грани для $n = 4, 5, \dots$; 3) $(n-3)$ -мерные грани для $n \geq 6$ многогранника $\text{conv } \Omega_n$.*

Напомним, что отрезок, соединяющий две вершины и не принадлежащий ни одной собственной грани многогранника, называется диагональю многогранника.

Следствие 3. *Выпуклая оболочка размерности $m_j - 1 \quad \forall j = \overline{1, n-1}$ подмножества вершин $\text{conv } \Omega_n$ принадлежит границе многогранника $\text{conv } \Omega_n$. В частности, $\text{conv } \Omega_n$ не имеет диагоналей.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Willems J.C. // J. of Franklin Inst. 1978. V. 301. № 6. P. 605–621.
2. Якубович В.А. // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143. № 6. С. 1304–1307.
3. Борухов В.Т., Зеленьяк Д.М. // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С. 3–14.
4. Борухов В.Т., Зеленьяк Д.М. // Автоматика и телемеханика. 2003. № 4. С. 18–29.
5. Борухов В.Т., Зеленьяк Д.М. // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47. № 6. С. 21–23.
6. Борухов В.Т. // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 158–166.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию
16.04.2004 г.