Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 333, 2006 г.

В. В. Капустин

КОММУТАТОРЫ В МОДЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Настоящая заметка посвящена коммутаторам в модельных пространствах $\mathbf{K}_\theta$. Пусть θ – внутренняя функция на единичной окружности $\mathbb{T}$, т.е. $\theta \in H^\infty$, $|\theta| = 1$ почти всюду на $\mathbb{T}$ относительно меры Лебега m (мера m предполагается нормированной так, что $m\mathbb{T} = 1$). Определим модельное подпространство $\mathbf{K}_\theta$ пространства Харди H^2 формулой $\mathbf{K}_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$; модельный оператор S_θ в нем действует по формуле $S_\theta = P_\theta M_z|_{\mathbf{K}_\theta}$, где M_z – оператор умножения на независимую переменную, а P_θ – ортопроектор на $\mathbf{K}_\theta$.

В этой статье всегда подразумевается, что $L^2 = L^2(\mathbb{T}, m)$. Операторы умножения на функции обозначаются буквой M с функцией в качестве нижнего ндекса; так, оператор умножения на функцию α обозначается через M_α. Проектор Рисса P_+ есть ортопроектор на H^2, $P_- = I - P_+$ – ортопроектор на ортогональное дополнение H^2_- подпространства H^2 в L^2. Если $s \in L^2$ и λ – точка единичного круга, то $(P_+ s)(\lambda) = \int \frac{s(\xi)\xi dm(\xi)}{\xi - \lambda}$, т.е. граничные значения функции от λ, стоящей в правой части, совпадают с $P_+ s$ m-почти всюду на единичной окружности.

Целью этой работы является описание ядерных операторов, т.е. операторов из класса Шаттена–фон Неймана $\mathfrak{S}_1$, представимых в виде $XS_\theta - S_\theta X$ для некоторого ограниченного линейного оператора X в $\mathbf{K}_\theta$.

Теорема. *Пусть $L : \mathbf{K}_\theta \to \mathbf{K}_\theta$ – ядерный оператор,*

$$L = \sum (\cdot, u_n) v_n, \tag{1}$$

где $u_n, v_n \in \mathbf{K}_\theta$ и

$$\sum ||u_n|| \cdot ||v_n|| < \infty. \tag{2}$$

(Ясно, что тогда $\sum \bar{u}_n v_n \in L^1$.)

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 05-01-00925.

1) *Если L представляется в виде $XS_\theta - S_\theta X$, то*

$$\sum \bar{u}_n v_n \in H_0^1 = \{f \in H^1 : f(0) = 0\}. \tag{3}$$

2) *Пусть $\varepsilon > 0$. Если $\sum \bar{u}_n v_n \in H_0^1$, то существует ядерный оператор, представимый в виде $XS_\theta - S_\theta X$ и близкий к L в $\mathfrak{S}_1$, т.е. такой, что норма их разности в $\mathfrak{S}_1$ не превосходит ε.*

Таким образом, в нашей основной теореме устанавливается описание замыкания в $\mathfrak{S}_1$ ядерных операторов, представимых в виде коммутатора $XS_\theta - S_\theta X$ при некотором X. Интерес к такому вопросу возник в связи с известной задачей об описании функций φ на единичной окружности, для которых из того, что $XU - VX \in \mathfrak{S}_1$, следует, что $X\varphi(U) - \varphi(V)X \in \mathfrak{S}_1$, где U, V – пара унитарных операторов; в известных исследованиях на эту тему всегда дополнительно получается, что $||X\varphi(U) - \varphi(V)X||_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \mathrm{const} \cdot ||XU - VX||_{\mathfrak{S}_1}$. Наиболее полный ответ на этот вопрос, по-видимому, даётся в статье В.В. Пеллера [1] в терминах классов Бесова. Вместо унитарных операторов можно рассматривать различные классы операторов и соответствующие им классы функций, применимые к операторам из заданного класса. В частности, такой вопрос можно поставить для сжатий класса C_0, т.е. таких сжатий T, для которых существует функция $\theta \in H^\infty$, не обращающаяся в нуль тождественно и такая, что $\theta(T) = 0$. Не умаляя общности, можно предполагать, что функция θ внутренняя; типичным оператором класса C_0 является оператор S_θ. Если зафиксировать внутреннюю функцию θ, то естественно рассмотреть класс $C_0(\theta)$ операторов T, для которых $\theta(T) = 0$. Естественным классом функций, применимых к операторам класса $C_0(\theta)$, является H^∞, а точнее – фактрор-алгебра $H^\infty/\theta H^\infty$. Разрешение сформулированного выше вопроса для оператора S_θ, т.е. для случая $U = V = S_\theta$, сразу привело бы и к обобщению на класс $C_0(\theta)$. С учётом результата настоящей заметки (и при используемых в ней обозначениях, см. ниже) этот вопрос (в формулировке с оценкой нормы) можно пересказать следующим образом: *для каких функций $\varphi \in H^\infty$ отображение $L \mapsto L_\varphi$, рассматриваемое на множестве ядерных операторов L, для которых $\Omega L \in \theta H^1$ (см.* (5), (6) *по поводу определения функции ΛL), ограничено относительно нормы класса $\mathfrak{S}_1$?*

Так как ядерный оператор L, заданный формулой (1), действует в подпространстве $\mathbf{K}_\theta$ пространства L^2, L может быть записан

как интегральный оператор, а именно,

$$(Lh)(z) = \int k(z,\xi)h(\xi)dm(\xi), \quad h \in \mathbf{K}_\theta,$$

где

$$k(z,\xi) = \sum \overline{u_n(\xi)} v_n(z).$$

Отметим, что, таким образом, выражение $\sum \bar{u}_n v_n$, фигурирующее в теореме, представляет собой диагональ ядра k. Нетрудно проверить, что отображение, сопоставляющее ядерному оператору диагональ ядра в его записи в виде интегрального оператора, корректно определено на операторах конечного ранга, т.е. не зависит от выбора набора векторов u_n, v_n, опеределяющего один и тот же оператор L. Очевидно, это отображение линейно и непрерывно действует из $\mathfrak{S}_1$ в L^1 (его норма равна 1), и потому оно является сжимающим линейным отображением на всём классе $\mathfrak{S}_1$.

Если $s \in L^2$, то положим $\tilde{s} = \theta \bar{z} \bar{s}$. Так как $\mathbf{K}_\theta = H^2 \cap \theta H^2_-$, нетрудно видеть, что функция s принадлежит или не принадлижит подпространству $\mathbf{K}_\theta$ одновременно с $\tilde{s}$. Нам будет удобнее работать с оператором L, записанным в виде

$$L = \sum (\cdot, \tilde{u}_n) v_n \tag{4}$$

вместо (1), т.е. с функциями $\tilde{u}_n$ вместо u_n. Тогда условие (3) переписывается как

$$\Omega L \in \theta H^1, \tag{5}$$

где $\Omega : \mathfrak{S}_1 \to L^1$,

$$\Omega \left(\sum (\cdot, \tilde{u}_n) v_n \right) = \sum u_n v_n. \tag{6}$$

Пусть $K : L^2 \to L^2$ – интегральный оператор с ядром k,

$$(Kh)(z) = \int k(z,\xi)h(\xi)dm(\xi).$$

Для $h \in L^2$ положим

$$(K_\varphi h)(z) = \int \frac{\varphi(\xi) - \varphi(z)}{\xi - z} k(z,\xi)h(\xi)dm(\xi).$$

Последнее выражение связано с функцией φ; сначала будем предполагать, что функция φ достаточно гладкая, что позволяет корректно определить оператор K_φ. Из теории двойных операторных интегралов хорошо известно (см., например, [2]), что если $K = XM_z - M_zX$ для некоторого оператора X, то

$$K_\varphi = XM_\varphi - M_\varphi X. \tag{7}$$

По операторам K, K_φ построим операторы в $\mathbf{K}_\theta$:

$$L = P_\theta K|_{\mathbf{K}_\theta}, \quad L_\varphi = P_\theta K_\varphi|_{\mathbf{K}_\theta}.$$

Возьмем оператор L ранга 1 на $\mathbf{K}_\theta$. Тогда $L = (\cdot, \tilde{u})v$ для некоторых функций $u, v \in \mathbf{K}_\theta$; пусть K – оператор на L^2, заданный той же самой формулой. В представлении K в виде интегрального оператора ядро имеет вид $k(z,\xi) = \overline{\tilde{u}(\xi)}v(z)$. Пусть φ – достаточно гладкая функция из H^∞. Для оператора K_φ и для $h \in \mathbf{K}_\theta$ получаем:

$$(K_\varphi h)(z) = v(z)\int \frac{\varphi(\xi)-\varphi(z)}{\xi - z}\overline{\tilde{u}(\xi)}h(\xi)dm(\xi),$$

откуда

$$\begin{aligned} K_\varphi =& M_v(P_+M_\varphi - M_\varphi P_+)M_{\bar{\theta}u} \\ =& M_v(P_+M_\varphi P_- - P_-M_\varphi P_+)M_{\bar{\theta}u} = M_vP_+M_\varphi P_-M_{\bar{\theta}u}. \end{aligned} \tag{8}$$

Последнее равенство являеется следствием соотношения $P_-M_\varphi P_+ = 0$, которое верно, так как $\varphi \in H^\infty$.

Если $\alpha \in H^\infty$, то $\alpha(S_\theta) = P_\theta M_\alpha|_{\mathbf{K}_\theta}$; $\alpha(S_\theta) = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \theta H^\infty$.

Если u, v – ограниченные функции, получаем

$$\begin{aligned} L_\varphi = P_\theta K_\varphi|_{\mathbf{K}_\theta} &= P_\theta M_v P_+ M_\varphi P_- M_{\bar{\theta}u}|_{\mathbf{K}_\theta} \\ &= P_\theta M_v P_\theta M_{\varphi\bar{\theta}} P_\theta M_u|_{\mathbf{K}_\theta} = v(S_\theta)(P_\theta M_{\varphi\bar{\theta}})u(S_\theta). \end{aligned} \tag{9}$$

Благодаря этой формуле оператор L_φ можно определить и для функций $\varphi \in H^\infty$ без предположений об их гладкости.

Доказательство теоремы. 1) Пусть L – ядерный оператор на $\mathbf{K}_\theta$, $L = XS_\theta - S_\theta X$. Тогда для оператора $K = (XP_\theta)M_z - M_z(XP_\theta)$ имеем $L = P_\theta K|_{\mathbf{K}_\theta}$. Если $\varphi \in H^\infty$, то в силу соотношения (7) с оператором XP_θ вместо X получаем $K_\varphi = XP_\theta M_\varphi - M_\varphi XP_\theta$, и

$L_\varphi = P_\theta K_\varphi|_{\mathbf{K}_\theta} = X\varphi(S_\theta) - \varphi(S_\theta)X$. В частности, отсюда следует, что если $\varphi \in \theta H^\infty$, то $L_\varphi = 0$.

Введем обозначение

$$\Phi_\theta = \{P_\theta \alpha : \alpha \in H^\infty\};$$

норма на Φ_θ определяется равенством

$$||\varphi||_{\Phi_\theta} = \inf\{||\alpha||_{H^\infty} : P_\theta \alpha = \varphi\}.$$

Если $\varphi \in \Phi_\theta$, то оператор $\varphi(S_\theta)$ определен естественным образом, и его норма равна $||\varphi||_{\Phi_\theta}$.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ класс операторов, которые могут быть представлены в виде конечной суммы $\sum(\cdot, \tilde{u}_n)v_n$, где $u_n, v_n \in \Phi_\theta$. Если $L = \sum(\cdot, \tilde{u}_n)v_n \in \mathfrak{F}$ и $\varphi = \theta$, из формулы (9) вытекает, что

$$L_\varphi = \sum v_n(S_\theta)u_n(S_\theta) = (\sum u_n v_n)(S_\theta).$$

Поскольку $L_\varphi = 0$, получаем, что внутренняя функция θ является делителем аналитической функции $\sum u_n v_n$, т.е. $\sum u_n v_n \in \theta H^2$ (и даже $\sum u_n v_n \in \theta H^p$ при всех $p > 1$).

В общем случае при выполнении условий (4) и (2), т.е. без предположения $L \in \mathfrak{F}$, требуется доказать, что $\sum u_n v_n \in \theta H^1$.

Определим оператор K на L^2 формулой (4), т.е. той же самой формулой, по которой оператор L действует в $\mathbf{K}_\theta$. Будем искать условие на L, равносильное тому, что $L_\varphi = 0$ для всех $\varphi \in \theta H^\infty$. Аналогично соотношению (8) получаем

$$K_\varphi = \sum M_{v_n} P_+ M_\varphi P_- M_{\bar{\theta} u_n}.$$

Возьмем ограниченную функцию $h \in \mathbf{K}_\theta$, и пусть $\varphi \in \theta H^\infty$. (Хорошо известно, что ограниченные функции из $\mathbf{K}_\theta$ плотны в $\mathbf{K}_\theta$.) Ясно, что $K_\varphi h \in H^1$, и

$$||K_\varphi h||_1 \leqslant \sup|\varphi| \cdot \sup|h| \cdot (\sum ||u_n|| \cdot ||v_n||).$$

(Отметим, что из того, что правая часть конечна, вытекает сходимость рассматриваемых здесь рядов). Свойство $L_\varphi = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $K_\varphi h \in \theta H^1$ для всех таких h и φ. Вектор $M_\varphi P_+ M_{\bar{\theta} u_n} h$ лежит в θH^2, следовательно, всегда имеем $(M_{v_n} P_+ M_\varphi P_+ M_{\bar{\theta} u_n})h \in \theta H^1$. Таким образом, остается проверить, что

$$\left(\sum M_{v_n} P_+ M_\varphi M_{\bar{\theta} u_n}\right) h = \sum M_{v_n} P_+ \varphi \bar{\theta} u_n h \in \theta H^1.$$

Поскольку по предположению $\varphi \in \theta H^\infty$, получаем, что $\varphi\bar{\theta}u_n h \in H^2$, и поэтому интересующее нас свойство переписывается так:

$$\sum v_n\varphi\bar{\theta}u_n h = (\sum v_n u_n)\bar{\theta}\varphi h \in \theta H^1$$

для всех $\varphi \in \theta H^\infty$ и всех ограниченных функций $h \in \mathbf{K}_\theta$. Очевидно, что это свойство равносильно условию $\sum u_n v_n \in \theta H^1$, то есть имеют место свойства (5)–(6). Так как для оператора L рассматривалось представление (4) вместо (1), первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть $\varepsilon > 0$. Для любого ядерного оператора L в $\mathbf{K}_\theta$ такого, что $\Omega L \in \theta H^1$, существует оператор $\hat{L}$ в $\mathbf{K}_\theta$ из класса $\mathfrak{F}$ такой, что $||L - \hat{L}|| < \varepsilon$, и для которого также $\Omega\hat{L} \in H^1_0$.*

Доказательство леммы. Пусть $L = \sum(\cdot, \tilde{u}_n)v_n$, $u, v \in \mathbf{K}_\theta$. Поскольку ограниченные функции плотны в $\mathbf{K}_\theta$, можно взять ограниченные функции вместо u_n, v_n, и рассмотреть конечную сумму так, чтобы норма разности L и полученного оператора $L_1 \in \mathfrak{F}$ не превосходила $\varepsilon/3$. Однако, нам также требуется, чтобы отображение Ω переводило искомый оператор в θH^1. По построению имеем

$$\Omega L_1 \in L^\infty \quad \text{и} \quad ||\Omega L_1 - \Omega L||_{L^1} \leqslant ||L_1 - L||_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \varepsilon/3.$$

Пусть $u, v \in \mathbf{K}_\theta = H^2 \cap \theta H^2_-$. Тогда

$$uv \in H^1 \cap \theta^2\bar{z}^2\overline{H^1}.$$

Следовательно, Ω отображает любой ядерный оператор, действующий в $\mathbf{K}_\theta$, в пространство $H^1 \cap \theta^2\bar{z}^2\overline{H^1}$. Так как $\Omega L \in \theta H^1$, имеем $\Omega L \in \theta H^1 \cap \theta^2\bar{z}^2\overline{H^1}$, и, следовательно

$$z\bar{\theta}\Omega L \in zH^1 \cap \theta\bar{z}\overline{H^1}.$$

Возьмем ограниченную функцию $f \in zH^1 \cap \theta\bar{z}\overline{H^1}$ такую, что $||z\bar{\theta}\Omega L - f||_{L^1} \leqslant \varepsilon/3$. Тогда для

$$g = \Omega L_1 - \bar{z}\theta f = (\Omega L_1 - \Omega L) + \bar{z}\theta(z\bar{\theta}\Omega L - f)$$

имеем

$$||g||_{L^1} \leqslant ||\Omega L_1 - \Omega L||_{L^1} + ||z\bar{\theta}\Omega L - f||_{L^1} \leqslant 2\varepsilon/3.$$

Также ясно, что g —ограниченная функция и $g \in H^1 \cap \theta^2 \bar{z}^2 \overline{H^1}$. Следовательно $g \in H^\infty$, и существуют ограниченные функции $p, q \in H^2$ такие, что $g = pq$ и $||p||_{H^2} \cdot ||q||_{H^2} \leqslant 2\varepsilon/3$. Определим $L_2 = (\cdot, P_\theta \tilde{p}) P_\theta q$. Тогда $L_2 \in \mathfrak{F}$, $||L_2||_{\mathfrak{S}_1} \leqslant 2\varepsilon/3$, и

$$\Omega L_2 - g = P_\theta p \cdot P_\theta q - pq \in \theta H^1.$$

Положим $\hat{L} = L_1 - L_2$. Оператор $\hat{L}$ принадлежит классу $\mathfrak{F}$, поскольку оба оператора L_1 и L_2 принадлежат $\mathfrak{F}$,

$$||\hat{L} - L||_{\mathfrak{S}_1} \leqslant ||L_1 - L||_{\mathfrak{S}_1} + ||L_2||_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \varepsilon,$$

и, наконец, $\Omega \hat{L} = \Omega L_1 - \Omega L_2 = (\bar{z}\theta f + g) - \Omega L_2 = \bar{z}\theta f - (\Omega L_2 - g) \in \theta H^1$. •

Таким образом, теорема будет доказана, если любой оператор $L \in \mathfrak{F}$, для которого $\Omega L \in \theta H^1$, удастся записать в виде $L = XS_\theta - S_\theta X$ для некоторого оператора X в $\mathbf{K}_\theta$.

На пространстве $\mathbf{K}_\theta$ имеем $S_\theta = M_z - (\cdot, \bar{z}\theta)\theta$. Если $\alpha \in H^\infty$, то $\alpha(S_\theta)^* = P_\theta M_{\bar{\alpha}}|_{\mathbf{K}_\theta}$. Для $\alpha \in \Phi_\theta$ получаем

$$\begin{aligned}
\alpha(S_\theta)^* S_\theta - S_\theta \alpha(S_\theta)^* =& P_+ M_{\bar{\alpha}} S_\theta - P_\theta M_z P_+ M_{\bar{\alpha}} \\
=& P_\theta (P_+ M_{\bar{\alpha}} M_z - (\cdot, \bar{z}\theta) P_+ M_{\bar{\alpha}} \theta - M_z P_+ M_{\bar{\alpha}}) \\
=& P_\theta (P_+ M_z - M_z P_+) M_{\bar{\alpha}} - (\cdot, \bar{z}\theta) P_\theta \bar{\alpha}\theta \\
=& P_\theta P_0 M_z M_{\bar{\alpha}} - (\cdot, \bar{z}\theta) P_\theta \bar{\alpha}\theta \\
=& (\cdot, \bar{z}\alpha) P_\theta 1 - (\cdot, \bar{z}\theta) P_\theta \bar{\alpha}\theta \\
=& (\cdot, P_\theta \bar{z}\alpha) P_\theta 1 - (\cdot, P_\theta \bar{z}\theta) P_\theta \bar{\alpha}\theta.
\end{aligned}$$

Пусть $u, v \in \Phi_\theta$. Рассмотрим оператор $X = v(S_\theta) S_\theta^* \tilde{u}(S_\theta)^*$. Применяя последнюю формулу при $\alpha = z\tilde{u}$ и принимая во внимание, что $\bar{\alpha}\theta = u \in \Phi_\theta$, получаем

$$\begin{aligned}
XS_\theta - S_\theta X =& v(S_\theta)(\alpha(S_\theta)^* S_\theta - S_\theta \alpha(S_\theta)^*) \\
=& (\cdot, P_\theta \bar{z}\alpha) v(S_\theta) P_\theta 1 - (\cdot, P_\theta \bar{z}\theta) v(S_\theta) P_\theta \bar{\alpha}\theta \\
=& (\cdot, \tilde{u}) v - (\cdot, P_\theta \bar{z}\theta) P_\theta uv.
\end{aligned} \tag{10}$$

Теперь возьмем оператор L в $\mathbf{K}_\theta$ из класса $\mathfrak{F}$, пусть $L = \sum (\cdot, \tilde{u}_n) v_n$, где сумма конечна, $u_n, v_n \in \Phi_\theta$, и предположим, что $\sum u_n v_n \in \theta H^1$. Поскольку $u_n, v_n \in \Phi_\theta$, имеем $\sum u_n v_n \in \theta H^2$, откуда $P_\theta \sum u_n v_n = 0$. По формуле (10) для $X = \sum v_n(S_\theta) S_\theta^* \tilde{u}_n(S_\theta)^*$ получаем

$$XS_\theta - S_\theta X = \sum (\cdot, \tilde{u}_n) v_n - (\cdot, P_\theta \bar{z}\theta) P_\theta \sum u_n v_n = \sum (\cdot, u_n) v_n = L.$$

Доказательство теоремы закончено. •

В заключение сформулируем еще несколько вопросов, которые кажутся интересными и ответы на которые автору неизвестны.

1. Справедлив ли аналог результата этой заметки для оператора одностороннего сдвига S на пространстве H^2, т.е. *верно ли, что если ядерный оператор* $L = \sum(\cdot, u_n)v_n$ *в* H^2 *представляется в виде* $XS - SX$, *то* $\sum \bar{u}_n v_n \in H_0^1$? *Верно ли обратное для операторов, для которых* $\sum \bar{u}_n v_n \in H_0^1$, *из плотного множества относительно нормы класса* $\mathfrak{S}_1$?

2. Пусть X – оператор в $\mathbf{K}_\theta$ такой, что $L = XS_\theta - S_\theta X$ – оператор конечного ранга. По нашей теореме имеем $\Omega L \in \theta H^1$, однако естественно предположить, что при условии конечности ранга класс θH^1 можно заменить более узким классом. Например, *верно ли, что* ΩL *попадает в* θH^p *при любом* $p > 1$?

3. Пусть $g \in H^1 \cap \theta^2 \bar{z}^2 \overline{H^1}$. Существуют ли функции $u_n, v_n \in \mathbf{K}_\theta$ такие, что $\sum u_n v_n = g$ и $\sum ||u_n||_{L^2} \cdot ||v_n||_{L^2} \leqslant \mathrm{const} \cdot ||g||_{L^1}$? Другими словами, *существует ли ядерный оператор* L *в* $\mathbf{K}_\theta$ *такой, что* $\Omega L = g$ *и* $||L||_{\mathfrak{S}_1} \leqslant \mathrm{const} \cdot ||g||_{L^1}$? Если ответ положителен, то *можно ли в качестве* L *выбрать оператор ранга 1?*

Литература

1. В. В. Пеллер, *Операторы Ганкеля в теории возмущений унитарных и самосопряженных операторов.* — Функциональный анализ и его приложения, **19** (1985), No. 2, 37–51.
2. M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak, *Double operator integrals in a Hilbert space.* — Integral Equations Operator Theory, **47** (2003), No. 2, 131–168.

V. V. Kapustin. Commutators in model spaces.

Let θ be an inner function, let $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$, and let $S_\theta : K_\theta \to K_\theta$ be defined by the formula $S_\theta f = P_\theta z f$, $f \in K_\theta$, where P_θ is the orthogonal projection of H^2 onto K_θ. Consider the set A of all trace class operators $L : K_\theta \to K_\theta$, $L = \sum(\cdot, u_n)v_n$, $\sum \|u_n\|\|v_n\| < \infty$ $(u_n, v_n \in K_\theta)$, such that $\sum \bar{u}_n v_n \in H_0^1$. It is shown that the trace class commutators of the form $XS_\theta - S_\theta X$ (where X is a bounded linear operator on K_θ) are dense in A in the trace class norm.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: kapustin@pdmi.ras.ru

Поступило 27 июля 2006 г.