С. Я. Новиков, В. В. Севостьянова, Классы эквивалентности фреймов Парсеваля, *Матем. заметки*, 2022, том 112, выпуск 6, 850–866

DOI: 10.4213/mzm13465

Математические заметки

Том 112 выпуск 6 декабрь 2022

УДК 517.982.254

Классы эквивалентности фреймов Парсеваля

С. Я. Новиков, В. В. Севостьянова

В данной заметке вводится максимально широкая эквивалентность на множестве фреймов конечномерного пространства, которая сохраняет основные характеристики фрейма: жесткость, равноугольность, спарк (наименьшее количество линейно зависимых векторов), так называемую проективно-перестановочно унитарная эквивалентность. Выясняется, например, что в пространствах $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^5$ и $\mathbb{R}^7$ жесткие равноугольные фреймы с полным спарком единственные с точностью до эквивалентности. Аналогичная единственность получена для общего равномерного фрейма Парсеваля с $d+1$ векторами в пространстве $\mathbb{R}^d$. Такие вопросы неоднократно поднимались в литературе.

Вычисление спарка является гораздо более сложной задачей с вычислительной точки зрения, чем вычисление ранга матрицы. В данной заметке изложена методика, которая, возможно, облегчит вычисление спарка. Весьма полезным в эквивалентной классификации фреймов оказалось использование матриц Зейделя и техники дополнений по Наймарку.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: жесткий фрейм, проективно-перестановочно унитарная эквивалентность, спарк, единственность, дополнение по Наймарку.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13465

1. Введение. Фреймы конечномерных пространств становятся предметом активных исследований алгебраистов и аналитиков, а также специалистов по цифровой обработке сигналов [1]–[3]. Можно привести два эквивалентных определения фрейма. Пусть n и d – натуральные числа, причем $n \geqslant d$, и пусть $\mathbb{F}$ обозначает поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Конечный фрейм* в d-мерном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}^d$ над полем $\mathbb{F}$ – это произвольный полный набор векторов: $\operatorname{span}\{\varphi_j\}_{j=1}^n = \mathbb{H}^d$. Таким образом обобщается определение базиса, так как не требуется линейная независимость векторов.

Формальное определение фрейма выглядит так. Набор векторов $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ называется *фреймом* для вещественного или комплексного $\mathbb{H}^d$, если существуют константы $0 < a \leqslant b < \infty$ такие, что для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{H}^d$

$$a\|\mathbf{x}\|^2 \leqslant \sum_{j=1}^n |\langle \mathbf{x}, \varphi_j\rangle|^2 \leqslant b\|\mathbf{x}\|^2.$$

Эти два определения эквивалентны [4].

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2022-878).

Каждый набор векторов и, в частности, фрейм, порождает несколько операторов.

Оператор *синтеза* для конечного набора векторов $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ из $\mathbb{H}^d$ определяется как

$$\mathbf{\Phi}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{H}^d, \qquad \mathbf{\Phi}\mathbf{x} := \sum_{j=1}^n \mathbf{x}(j)\varphi_j,$$

где $\mathbf{x}(j)$ обозначает j-ю координату вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$. Сопряженным к оператору синтеза является оператор *анализа* $\mathbf{\Phi}^*\colon \mathbb{H}^d \to \mathbb{F}^n$, для которого $(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{y})(j) = \langle \varphi_j, \mathbf{y}\rangle$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

Все скалярные произведения в данной статье сопряженно-линейны по *первому* аргументу и линейны по второму, т.е.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_j \overline{\mathbf{x}(j)}\mathbf{y}(j).$$

Композиция операторов анализа и синтеза определяет оператор Грама

$$\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$$

с соответствующей $(n \times n)$-матрицей, у которой $(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi})(j, j') = \langle \varphi_j, \varphi_{j'}\rangle$.

Перестановкой операторов получается *фреймовый оператор*

$$\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^*\colon \mathbb{H}^d \to \mathbb{H}^d, \qquad \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^*\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j, \mathbf{y}\rangle\varphi_j.$$

Хорошо известно, что последовательности $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ из $\mathbb{H}^d$ и $\{\widehat{\varphi}_j\}_{j=1}^n$ из $\widehat{\mathbb{H}^d}$ имеют одинаковые матрицы Грама тогда и только тогда, когда существует унитарный оператор $\mathbf{U}\colon \mathbb{H}^d \to \widehat{\mathbb{H}^d}$ такой, что $\mathbf{U}\varphi_j = \widehat{\varphi}_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$.

Для отдельно взятого вектора $\{\varphi_j\}$, $j = 1, \ldots, n$, операторы синтеза и анализа определяются так:

$$\varphi_j\colon \mathbb{F} \to \mathbb{H}^d, \quad \varphi_j x = x\varphi_j,$$
$$\varphi_j^*\colon \mathbb{H}^d \to \mathbb{F}, \quad \varphi_j^*\mathbf{y} = \langle \varphi_j, \mathbf{y}\rangle.$$

Используя эти определения, оператор синтеза можно записать в виде

$$\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^* = \sum_{j=1}^n \varphi_j\varphi_j^*.$$

Матрица оператора синтеза $\mathbf{\Phi}$ представляет собой $(d \times n)$-матрицу, столбцами которой являются векторы $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ фрейма.

В частности, если фреймовые границы равны между собой $(a = b)$, то фреймовый оператор $\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^* = a\mathbf{I}$, и представление вектора $\mathbf{x}$ становится особенно простым:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^d \langle \mathbf{x}, \varphi_i\rangle\varphi_i, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{H}^d.$$

Такие фреймы называются *жесткими* или *a-жесткими*. 1-Жесткие фреймы называют *фреймами Парсеваля* или *нормализованными* жесткими фреймами.

Фреймы, векторы которых имеют одинаковые нормы, называют *равномерными*: фрейм $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ называется *равномерным*, если существует $c > 0$ такое, что $\|\varphi_j\|^2 = c$, $j = 1, \dots, n$.

Если фрейм a-жесткий и равномерный, то возникают связи между $d = \dim(\mathbb{H})$, c и a:

$$da = \mathrm{Tr}(a\mathbf{I}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^*) = \mathrm{Tr}(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}) = \sum_{j=1}^n \|\varphi_j\|^2 = nc.$$

Следовательно, для равномерного фрейма Парсеваля $d = nc$, поэтому нормы векторов такого фрейма не превосходят 1.

Первая явная конструкция равномерного жесткого фрейма с n векторами в $\mathbb{R}^d$ для произвольных $n \geqslant d$ появилась в работе Мальцева [5] (без использования таких терминов).

В настоящее время известно довольно много способов построения равномерных жестких фреймов для произвольной пары (d, n) с $n \geqslant d$ как в вещественном, так и в комплексном пространствах [1].

Выделим еще один интересный класс фреймов среди множества равномерных фреймов.

Равномерный фрейм $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ называется *равноугольным*, если существует $w \geqslant 0$ такое, что

$$|\langle\varphi_j, \varphi_{j'}\rangle|^2 = w \qquad \text{для всех} \quad j \neq j'.$$

В данной заметке проводится классификация фреймов по классам их эквивалентностей. Показано, что в пространствах $\mathbb{R}^5$ и $\mathbb{R}^7$ фреймы с 10 и 14 векторами соответственно оказываются единственными с точностью до введенной проективно-перестановочной унитарной эквивалентности. Аналогичная единственность получена для общего равномерного фрейма Парсеваля с $d+1$ векторами в пространстве $\mathbb{R}^d$. Такие вопросы неоднократно поднимались в литературе [6], [2], [3].

Большое внимание в прикладных исследованиях привлекают фреймы с полным спарком; это фреймы $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ в $\mathbb{H}^d$ такие, что каждый набор из d векторов этого фрейма является линейно независимым [7]. Вычисление спарка, т.е. минимального количества линейно зависимых векторов системы, является вычислительно гораздо более сложной задачей, чем вычисление ранга матрицы. В данной заметке изложена методика, которая, возможно, облегчит вычисление спарка. Весьма полезным в эквивалентной классификации фреймов оказалось использование матриц Зейделя и техники дополнений по Наймарку.

2. Матрицы Грама. Пусть $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ – фрейм Парсеваля в своей линейной оболочке. Его фреймовый оператор $\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^* = \mathbf{I}$. Рассмотрим матрицу Грама этого фрейма.

Теорема 1. *Квадратная матрица* $\mathbf{G}$ *порядка* n *является матрицей Грама для фрейма Парсеваля* $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ *пространства* $\mathrm{span}(\{\varphi_j\}_{j=1}^n)$ *с размерностью, равной рангу матрицы* $\mathbf{G}$, *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{G}$ *является матрицей ортогонального проектирования, т.е.* $\mathbf{G} = \mathbf{G}^* = \mathbf{G}^2$.

При этом

$$d = \mathrm{rank}(\mathbf{G}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{G}) = \sum_{i=1}^n \|\varphi_i\|^2.$$

Доказательство. (⇒) Представляя матрицу Грама в виде композиции операторов анализа и синтеза, имеем

$$\mathbf{G}^2 = (\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi})(\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}) = \mathbf{\Phi}^*(\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^*)\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Phi}^*\mathbf{I}\mathbf{\Phi} = \mathbf{G}.$$

Самосопряженность $\mathbf{G}$ очевидна.

(⇐) Пусть $\mathbf{G}$ – квадратная матрица порядка n и $\mathbf{G} = \mathbf{G}^* = \mathbf{G}^2$. Столбцы матрицы $\mathbf{G}$ обозначим через $\varphi_i = \mathbf{G}\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ – стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{H}^n$. Если $\mathbf{f} \in \operatorname{span}(\{\varphi_j\}_{j=1}^n)$, то $\mathbf{f} = \mathbf{G}\mathbf{f}$ и

$$\mathbf{f} = \mathbf{G}\biggl(\sum_{i=1}^n \langle \mathbf{G}\mathbf{f}, \mathbf{e}_i\rangle \mathbf{e}_i\biggr) = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{f}, \mathbf{G}\mathbf{e}_i\rangle \mathbf{G}\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{f}, \varphi_i\rangle \varphi_i,$$

т.е. $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ является фреймом Парсеваля в $\operatorname{span}(\{\varphi_j\}_{j=1}^n)$. Матрицей Грама этого фрейма оказывается матрица $\mathbf{G}$. Размерность пространства $\operatorname{span}(\{\varphi_j\}_{j=1}^n)$ определяется рангом матрицы $\mathbf{G}$.

Для матрицы ортогонального проектирования ранг совпадает с ее следом, что обосновывает последнее равенство в формулировке теоремы.

На множестве фреймов можно ввести различные классы эквивалентности.

Определение 1. Два фрейма $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ называются *унитарно эквивалентными*, если существует унитарное преобразование $\mathbf{U}$, переводящее векторы одного фрейма в векторы другого:

$$\psi_i = \mathbf{U}\varphi_i \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Поскольку унитарное преобразование сохраняет скалярное произведение, матрицы Грама унитарно эквивалентных фреймов совпадают. Верно и обратное утверждение: если матрицы Грама двух систем векторов совпадают, то эти системы унитарно эквивалентны. Таким образом, в частности, фреймы Парсеваля унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их матрицы Грама совпадают.

Заметим также, что класс фреймов Парсеваля инвариантен относительно унитарных преобразований. Действительно, фреймовый оператор $\mathbf{S}_{\mathbf{U\Phi}}$ векторов $\{\mathbf{U}\varphi_i\}_{i=1}^n$ равен

$$\mathbf{S}_{\mathbf{U\Phi}} = \mathbf{U\Phi}(\mathbf{U\Phi})^* = \mathbf{U}\mathbf{I}\mathbf{U}^* = \mathbf{I}.$$

Справедливо и следующее

Предложение 1. *Пусть линейный оператор* $\mathbf{F}\colon \mathbb{H}^d \to \mathbb{H}^d$ *обратим и образом каждого фрейма Парсеваля* $\{\varphi_i\}_i$ *при этом отображении вновь является фрейм Парсеваля* $\{\mathbf{F}\varphi_i\}_i$. *Тогда* $\mathbf{F}$ *– унитарное преобразование.*

Доказательство. Так как фреймы $\{\varphi_i\}_i$ и $\{\mathbf{F}\varphi_i\}_i$ – фреймы Парсеваля, то их фреймовые операторы $\mathbf{S}_{\mathbf{F\Phi}} = \mathbf{S}_{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{I}$. Как было отмечено, $\mathbf{S}_{\mathbf{F\Phi}} = \mathbf{F}\,\mathbf{S}_{\mathbf{\Phi}}\,\mathbf{F}^*$. Следовательно, $\mathbf{I} = \mathbf{F}\,\mathbf{I}\,\mathbf{F}^* = \mathbf{F}\,\mathbf{F}^*$, т.е. оператор $\mathbf{F}$ является биекцией и $\mathbf{F}\mathbf{F}^* = \mathbf{I}$.

Класс унитарно эквивалентных фреймов определяется порядком, в котором расположены векторы фрейма. Например, фреймы Парсеваля с матрицами синтеза

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

не являются унитарно эквивалентными – достаточно сравнить их матрицы Грама.

3. Эквивалентные фреймы. Обозначим через S_n группу перестановок длины n.

Определение 2. Будем говорить, что два фрейма Парсеваля $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ *унитарно эквивалентны с точностью до перестановки* или *перестановочно унитарно эквивалентны*, если существует перестановка $\sigma \in S_n$, для которой фреймы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_{\sigma(i)}\}_{i=1}^n$ унитарно эквивалентны.

Заметим вновь, что класс всех фреймов Парсеваля инвариантен и относительно перестановочно унитарной эквивалентности. Если перестановка σ меняет местами векторы φ_i и φ_j фрейма $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ с матрицей Грама $\mathbf{G}$, то в новой матрице Грама $\mathbf{G}'$ поменяются местами строки и столбцы с номерами i и j.

Определение 3. Фреймы Парсеваля $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ называются *проективно унитарно эквивалентными*, если существует унитарное преобразование $\mathbf{U}$ и числа α_i, $|\alpha_i| = 1$, для которых выполняется

$$\psi_i = \alpha_i \, \mathbf{U}\varphi_i \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Умножение вектора φ_i на число α_i меняет матрицу Грама $\mathbf{G}$ фрейма следующим образом: i-я строка в g умножается на $\overline{\alpha_i}$, а i-й столбец – на α_i.

Заметим, что из проективной унитарной эквивалентности не следует унитарная эквивалентность. Действительно, легко проверить, что следующие два проективно унитарно эквивалентных фрейма с матрицами синтеза

$$\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

не являются унитарно эквивалентными.

Точная характеристика проективно унитарной эквивалентности фреймов с n векторами дается с помощью анализа циклов в некотором построенном по фрейму графе с n вершинами [8].

Определение 4. Будем говорить, что два фрейма $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ *проективно-перестановочно унитарно эквивалентны*, если существует перестановка $\sigma \in S_n$, для которой фреймы $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\{\psi_{\sigma(i)}\}_{i=1}^n$ проективно унитарно эквивалентны.

И еще раз отмечаем инвариантность класса фреймов Парсеваля относительно только что определенной эквивалентности. Из сказанного выше следует

Теорема 2. *Фреймы Парсеваля являются проективно-перестановочно унитарно эквивалентными тогда и только тогда, когда их матрицы Грама могут быть получены друг из друга цепочкой элементарных преобразований следующего вида*:

а) *для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ умножение i-й строки на число $\overline{\alpha_i}$ и умножение i-го столбца на число α_i для некоторого α_i такого, что $|\alpha_i| = 1$;*

б) *одновременная замена местами строк и столбцов с номерами i и j для каждой фиксированной пары индексов (i, j).*

Другими словами, фреймы $\mathbf{\Phi} = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ и $\mathbf{\Psi} = \{\psi_i\}_{i=1}^n$ проективно-перестановочно унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их матрицы Грама связаны соотношением

$$\mathrm{gram}(\mathbf{\Psi}) = \mathbf{C}^* \mathrm{gram}(\mathbf{\Phi}) \mathbf{C},$$

где $\mathbf{C}$ – *матрица, в каждой строке и каждом столбце которой стоит единственное ненулевое число, модуль которого равен* 1.

Как было показано в доказательстве теоремы 1, каждый фрейм Парсеваля определяется (с точностью до унитарной эквивалентности) матрицей Грама $\mathbf{G}$, которая для фрейма Парсеваля оказывается матрицей ортогонального проектирования в пространстве $\mathbb{F}^n$, столбцы матрицы $\mathbf{G}$ и являются (с точностью до унитарной эквивалентности) векторами фрейма Парсеваля в своей линейной оболочке, размерность которой равна рангу матрицы $\mathbf{G}$.

Покажем теперь, что полученные ранее в [2] равноугольные жесткие фреймы пространства $\mathbb{R}^5$ с 10 векторами и пространства $\mathbb{R}^7$ с 14 векторами оказываются единственными с точностью до проективно-перестановочно унитарной эквивалентности.

Интерес к этим фреймам возник в связи с полученным в [2] (см. также [3]) результатом, согласно которому равноугольные жесткие фреймы пространства $\mathbb{R}^d$ с полным спарком могут иметь только $2d$ векторов.

Напомним, что *спарком* фрейма $\mathbf{\Phi}$ называется минимальное количество линейно зависимых векторов $\mathbf{\Phi}$. Если спарк $\mathbf{\Phi}$ максимально возможный, на единицу больше размерности $\operatorname{span}(\mathbf{\Phi})$, то говорят о фрейме *с полным спарком* [2]. Фреймы с полным спарком являются удобными словарями в задачах сжатых измерений и для разреженных и избыточных представлений [7].

Близкое следующей теореме утверждение приводится без доказательства в [9].

Теорема 3. *Равноугольный фрейм Парсеваля пространства* $\mathbb{R}^d$ *с* $2d$ *векторами возможен только для нечетного* d.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ – равноугольный фрейм Парсеваля пространства $\mathbb{R}^d$. Для фрейма Парсеваля имеет место равенство $1 = cn/d$, где $c = \|\varphi_i\|^2$. (Напомним, что равноугольный фрейм, по определению, равномерный, т.е. нормы всех его векторов равны друг другу.) Пусть также $n = 2d$, тогда $\|\varphi_i\|^2 = 1/2$, $i = 1, \dots, n$. Для равноугольного фрейма имеем

$$|\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle|^2 = c^2 \frac{n-d}{d(n-1)}\,, \qquad |\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle| = \frac{1}{2\sqrt{2d-1}}\,, \quad i \neq j.$$

Матрица Грама такого фрейма имеет вид

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2\sqrt{2d-1}} \begin{pmatrix} \sqrt{2d-1} & \delta_{1,2} & \dots & \delta_{1,n} \\ \delta_{1,2} & \sqrt{2d-1} & \dots & \delta_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{1,n} & \delta_{2,n} & \dots & \sqrt{2d-1} \end{pmatrix}, \qquad \delta_{i,j} = \pm 1. \tag{3.1}$$

Как показано в теореме 1, фрейм $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ унитарно эквивалентен столбцам матрицы Грама $\mathbf{G}$.

Умножив некоторые векторы фрейма на -1 и перейдя таким образом к проективно унитарно эквивалентному фрейму, можно получить, что в матрице Грама в первой строке и первом столбце стоят единицы: $\delta_{1,j} = 1$, $j = 2, \dots, n$, и $\delta_{j,1} = 1$, $j = 2, \dots, n$.

В силу теоремы 1 имеет место равенство $\mathbf{G}^2 = \mathbf{G}$. Поскольку матрица $\mathbf{G}$ симметрична, скалярное произведение первой и i-й строк матрицы Грама равно

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2d-1}}\right)^2\left(2\delta_{1,i}\sqrt{2d-1}+\sum_{j\neq 1,i}\delta_{1,j}\delta_{i,j}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2d-1}}\delta_{1,i},$$

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2d-1}}\right)^2\left(2\sqrt{2d-1}+\sum_{j\neq 1,i}\delta_{i,j}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2d-1}}\,,$$

$$\sum_{j\neq 1,i}\delta_{i,j}=0. \tag{3.2}$$

Последнее означает, что в каждой строке i, $i\neq 1$, матрицы Грама $\mathbf{G}$ чисел $\delta_{i,j}=1$ на одну больше, чем чисел $\delta_{i,j}=-1$. Аналогично, скалярное произведение строк матрицы (3.1) с номерами i и j, $1<i<j$, равно

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2d-1}}\right)^2\left(1+2\delta_{i,j}\sqrt{2d-1}+\sum_{k\neq i,j}\delta_{i,k}\delta_{j,k}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2d-1}}\delta_{i,j},$$

$$\sum_{k\neq i,j}\delta_{i,k}\delta_{j,k}=-1. \tag{3.3}$$

Таким образом, если провести преобразование

$$2\sqrt{2d-1}\,(\mathbf{G}-\sqrt{2d-1}\cdot\mathbf{I})$$

и удалить из получившейся таким образом матрицы первую строку и первый столбец, то получится симметрическая $((n-1)\times(n-1))$-матрица $\mathbf{T}$ с нулями на главной диагонали и числами ±1 вне нее, так, что в каждой строке (столбце) 1 и -1 поровну, а скалярное произведение любых двух строк равно -1.

Матрицы такого вида хорошо известны в теории графов, они являются матрицами смежности и называются *матрицами Зейделя* [10].

Предположим, что d – четное число. Поскольку фреймы рассматриваются с точностью до перестановки векторов, можно считать, что векторы фрейма упорядочены таким образом, что первая строка матрицы Зейделя $\mathbf{T}$, соответствующая второй строке матрицы Грама, имеет вид

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & +1 & +1 & \dots & +1\\\hline\end{array}}_{d}\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -1 & -1 & \dots & -1\\\hline\end{array}}_{d-1}$$

Рассмотрим вторую строку матрицы $\mathbf{T}$. Аналогично, учитывая, что $+1$ и -1 представлены в равном количестве, переставим столбцы $2,3,\dots,d$ и $d+1,d+2,\dots,2d$ матрицы Грама так, чтобы вторая строка матрицы $\mathbf{T}$ имела вид

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & +1\\\hline +1 & 0\\\hline\end{array}\underbrace{\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|}\hline +1&\dots&+1\\\hline +1&\dots&+1\\\hline\end{array}}_{a}\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|}\hline +1&\dots&+1\\\hline -1&\dots&-1\\\hline\end{array}}_{d-a-2}}_{d-2}\underbrace{\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1&\dots&-1\\\hline +1&\dots&+1\\\hline\end{array}}_{d-a-2}\underbrace{\begin{array}{|c|c|c|}\hline -1&\dots&-1\\\hline -1&\dots&-1\\\hline\end{array}}_{a+1}}_{d-1}$$

где a – количество $+1$ в первой группе, стоящей правее главной диагонали на второй строке, $0\leqslant a\leqslant d-2$.

Скалярное произведение этих строк равно $-1 = 4a - 2d + 3$, и число $a = (d-3)/2$ целое только при нечетном d. Таким образом, равноугольный фрейм Парсеваля с $n = 2d$ возможен только при нечетных d.

Замечание 1. В $\mathbb{R}^3$ равноугольный фрейм Парсеваля с полным спарком хорошо известен [3]. Ниже в данной заметке будет проведена подробная классификация таких фреймов с точностью до эквивалентности в пространствах $\mathbb{R}^5$ и $\mathbb{R}^7$. Аналогичные рассуждения и результаты справедливы и в $\mathbb{R}^3$, оставляем их заинтересованному читателю.

Теорема 4. *В $\mathbb{R}^5$ существует единственный с точностью до проективно-перестановочно унитарной эквивалентности равноугольный фрейм Парсеваля с* 10 *векторами.*

Доказательство. Построим матрицу Зейделя $\mathbf{T}$ размера 9×9. Пусть первые две строки T имеют такой же вид, как в вычислениях выше; здесь $a = 1$:

0	+1	+1	+1	+1	−1	−1	−1	−1
+1	0	+1	−1	−1	+1	+1	−1	−1

Проверяя условие (3.3) для $i = 1, 2$ и $j = 3$, получим, что третья строка матрицы T может иметь единственный возможный вид. Более того, непосредственные вычисления показывают, что в этом случае матрица Зейделя с фиксированными первыми двумя строками будет следующей:

0	+1	+1	+1	+1	−1	−1	−1	−1
+1	0	+1	−1	−1	+1	+1	−1	−1
+1	+1	0	−1	−1	−1	−1	+1	+1
+1	−1	−1	0	+1	+1	−1	+1	−1
+1	−1	−1	+1	0	−1	+1	−1	+1
−1	+1	−1	+1	−1	0	+1	+1	−1
−1	+1	−1	−1	+1	+1	0	−1	+1
−1	−1	+1	+1	−1	+1	−1	0	+1
−1	−1	+1	−1	+1	−1	+1	+1	0

Соответствующая матрица Грама имеет вид

$$\mathbf{G} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 3 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица Грама $\mathbf{G}$ равноугольного фрейма Парсеваля из 10 векторов в $\mathbb{R}^5$ определена однозначно с точностью до проективно-перестановочно унитарной эквивалентности. Это означает в силу теоремы 3 единственность соответствующего класса эквивалентности фреймов.

В работе [2] приводится пример равноугольного жесткого фрейма в случае $(5, 10)$ с матрицей оператора синтеза

$$\mathbf{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказано, что 10 векторов этого фрейма лежат в 5-мерном векторном пространстве [2], [3].

Найдем их представление в $\mathbb{R}^5$. Заметим, что все 10 векторов ортогональны вектору $\mathbf{e} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ и, следовательно, лежат в гиперплоскости α в $\mathbb{R}^6$, ортогональной $\mathbf{e}$. Найдем ортогональный оператор $\mathbf{A}_\varphi$, переводящий вектор $\mathbf{e}$ в вектор $\mathbf{e}' = (0, 0, 0, 0, 0, \sqrt{6}\,)$. Для этого последовательно осуществим цепочку поворотов в 2-мерных плоскостях с помощью операторов с матрицами

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dfrac{1}{\sqrt{i}} & -\sqrt{\dfrac{i-1}{i}} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \sqrt{\dfrac{i-1}{i}} & \dfrac{1}{\sqrt{i}} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad i = 1, \dots, 5,$$

где нетривиальный блок 2×2, отвечающий повороту, стоит на пересечении строк и столбцов с номерами $i-1, i$. Искомый оператор $\mathbf{A}_\varphi$ определяется матрицей

$$\mathbf{A}_\varphi = \mathbf{B}_5\mathbf{B}_4\mathbf{B}_3\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{\dfrac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{3}} & \dfrac{1}{2\sqrt{3}} & \dfrac{1}{2\sqrt{3}} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{5}} & \dfrac{1}{2\sqrt{5}} & \dfrac{1}{2\sqrt{5}} & \dfrac{1}{2\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{30}} & \dfrac{1}{\sqrt{30}} & \dfrac{1}{\sqrt{30}} & \dfrac{1}{\sqrt{30}} & \dfrac{1}{\sqrt{30}} & -\sqrt{\dfrac{5}{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

он переводит фрейм $\mathbf{\Phi}$ в его представление в $\mathbb{R}^5$. Явный вид матрицы синтеза $\mathbf{\Phi}' = A_\varphi \mathbf{\Phi}$ без последней координаты имеет вид

$$\mathbf{\Phi}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{\frac{2}{3}} & 2\sqrt{\frac{2}{3}} & 2\sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ \sqrt{\frac{6}{5}} & \sqrt{\frac{6}{5}} & \sqrt{\frac{6}{5}} & -\sqrt{\frac{6}{5}} & \sqrt{\frac{6}{5}} & \sqrt{\frac{6}{5}} & -\sqrt{\frac{6}{5}} & \sqrt{\frac{6}{5}} & -\sqrt{\frac{6}{5}} & -\sqrt{\frac{6}{5}} \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу Грама:

$$\mathbf{G}' = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрицы Грама $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}'$ связаны следующей цепочкой элементарных преобразований:

1) умножить строки и столбцы с номерами 8, 9, 10 на -1;
2) последовательно менять местами строки и столбцы с номерами 6 и 10, 7 и 9, 8 и 10, 7 и 8.

Замечание 2. В работах [2], [3] вычислен спарк этого фрейма, он равен 4. Из полученных здесь результатов следует, что в пространстве $\mathbb{R}^5$ не существует равноугольного жесткого фрейма с полным спарком.

Аналогичные рассуждения можно провести для равноугольных фреймов Парсеваля в $\mathbb{R}^7$, но, как будет показано, в этом пространстве равноугольный фрейм Парсеваля с полным спарком существует.

Теорема 5. *В $\mathbb{R}^7$ существует единственный с точностью до проективно-перестановочно унитарной эквивалентности равноугольный фрейм Парсеваля с 14 векторами.*

Доказательство. Как было показано выше, для построения равномерного равноугольного фрейма Парсеваля достаточно найти соответствующую (13×13)-матрицу Зейделя. Найдем параметр $a = (d-3)/2 = 2$. Повторяя рассуждения предыдущей теоремы, можно считать, что первые две строки матрицы Зейделя имеют вид

0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	−1	−1	−1	−1	−1	−1
+1	0	+1	+1	−1	−1	−1	+1	+1	+1	−1	−1	−1

Заполним остальные строки. Предположим, что на пересечении 3-й строки и 4-го столбца матрицы Зейделя стоит $+1$, тогда из симметричности матрицы Зейделя и условий (3.2) и (3.3) находится единственное возможное заполнение третьей строки:

$+1$	$+1$	0	$+1$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$

При этом не существует заполнения оставшихся клеток 4-й строки такого, что выполняются условия (3.2) и (3.3) для всех четырех строк.

Пусть на пересечении 3-й строки и 4-го столбца стоит -1. Непосредственные вычисления показывают, что в этом случае с точностью до перестановок в наборах столбцов с номерами (5, 6, 7), а также (8, 9, 10) и (11, 12, 13), третья строка матрицы Зейделя имеет также единственный возможный вид (см. таблицу ниже). Аналогично, строка 4 также определяется однозначно с точностью до перестановок в парах столбцов для наборов (6, 7), (9, 10), (11, 12).

Продолжая вычисления, получаем, что остальные строки матрицы Зейделя заполняются однозначно:

0	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$+1$	0	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	-1	-1	-1
$+1$	$+1$	0	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	-1
$+1$	$+1$	-1	0	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$
$+1$	-1	$+1$	-1	0	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	-1	$+1$
$+1$	-1	-1	$+1$	-1	0	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$
$+1$	-1	-1	-1	$+1$	$+1$	0	-1	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1
-1	$+1$	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	0	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$
-1	$+1$	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	0	$+1$	$+1$	$+1$	-1
-1	$+1$	-1	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	$+1$	0	-1	-1	$+1$
-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	-1	-1	-1	$+1$	-1	0	$+1$	$+1$
-1	-1	$+1$	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	0	-1
-1	-1	-1	$+1$	$+1$	$+1$	-1	$+1$	-1	$+1$	$+1$	-1	0

Таким образом, матрица Грама $\mathbf{G}$ с найденной матрицей Зейделя является единственной с точностью до эквивалентности. Из теоремы 3 следует, что в случае $(7, 14)$ существует единственный проективно унитарно эквивалентный с точностью до перестановки векторов равномерный равноугольный фрейм Парсеваля.

Замечание 3. Как было отмечено ранее, любой равноугольный фрейм Парсеваля в $\mathbb{R}^5$ с 10 векторами не будет фреймом с полным спарком. Для того, чтобы дать ответ на вопрос о наличии полного спарка в равноугольном фрейме Парсеваля с 14 векторами в $\mathbb{R}^7$, рассмотрим ассоциированное с фреймом векторное пространство линейных зависимостей векторов фрейма.

Ниже будет найден критерий, согласно которому можно проверить, является или нет данный фрейм фреймом с полным спарком. Итак, пусть $\mathbf{\Phi} = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ – фрейм

Парсеваля в $\mathbb{F}^d$, не обязательно равноугольный. Рассмотрим линейное пространство

$$\mathbb{V} = \{(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n : \gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2 + \cdots + \gamma_n\varphi_n = 0\}.$$

Наша цель – описать пространство $\mathbb{V}$. Фиксируем некоторый ортонормированный базис в $\mathbb{F}^d$. Запишем в этом базисе матрицу оператора синтеза $\mathbf{\Phi}$, столбцы которой являются векторами фрейма:

$$\mathbf{\Phi} = \big(\varphi_1 \,\big|\, \varphi_2 \,\big|\, \ldots \,\big|\, \varphi_n\big).$$

Множество решений системы d линейных однородных уравнений

$$\mathbf{\Phi}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \tag{3.4}$$

с n переменными γ_i совпадает с линейным пространством $\mathbb{V}$.

Поскольку $\operatorname{rank}(\mathbf{\Phi}) = d$, существуют d линейно независимых векторов φ_i. Рассматривая фрейм с точностью до перестановки векторов, можно считать, что линейно независимы последние d векторов фрейма, т.е. следующая квадратная матрица является невырожденной:

$$\mathbf{A}_2 = \big(\,\varphi_{n-d+1} \,\big|\, \varphi_{n-d+2} \,\big|\, \ldots \,\big|\, \varphi_n\,\big). \tag{3.5}$$

Обозначим

$$\mathbf{A}_1 = \big(\,\varphi_1 \,\big|\, \varphi_2 \,\big|\, \ldots \,\big|\, \varphi_{n-d}\,\big), \tag{3.6}$$

тогда $\mathbf{\Phi} = (\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{A}_2\,)$.

Элементарными преобразованиями со строками можно привести квадратную матрицу $\mathbf{A}_2$ к единичной. Применим те же элементарные преобразования к $\mathbf{\Phi}$, матрица $\mathbf{A}_1$ в результате этих преобразований трансформируется в матрицу $(d \times (n-d))$-матрицу $\mathbf{A} = (a_{i,j})$, а матрица $\mathbf{\Phi}$ – в $(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,)$. При этом существует некоторая невырожденная $(d \times d)$-матрица $\mathbf{L}$, для которой $\mathbf{\Phi} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,)$. Тогда $(\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{A}_2\,) = (\mathbf{LA} \mid \mathbf{L}\,)$, откуда $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1$.

Система (3.4) эквивалентна системе

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,)\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \ldots\\ \gamma_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \ldots\\ 0\end{pmatrix}.$$

В качестве базиса пространства решений, а значит, и базиса $\mathbb{V}$ можно взять следующий набор векторов:

$$\begin{gathered}
\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0, -a_{1,1}, -a_{2,1}, \ldots, -a_{d,1}),\\
\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0, -a_{1,2}, -a_{2,2}, \ldots, -a_{d,2}),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{e}_{n-d} = (0, 0, \ldots, 1, -a_{1,n-d}, -a_{2,n-d}, \ldots, -a_{d,n-d}).
\end{gathered}$$

Напомним, что фрейм $\mathbf{\Phi}$ в $\mathbb{H}^d$ является фреймом с полным спарком, если любые d векторов фрейма линейно независимы.

Лемма 1. *Пусть матрица оператора синтеза фрейма Парсеваля* $\mathbf{\Phi}$ *элементарными преобразованиями строк приведена к виду* $(\mathbf{A} \mid \mathbf{I})$, *как описано выше. Тогда фрейм* $\mathbf{\Phi}$ *является фреймом с полным спарком тогда и только тогда, когда любой минор матрицы* $\mathbf{A}$ *отличен от нуля.*

Доказательство. Пусть дан фрейм с полным спарком, и пусть M – некоторый минор матрицы $\mathbf{A}$ произвольного порядка k, $1 \leqslant k \leqslant d$. Без ограничения общности можно считать, что матрица, определяющая M, лежит в левом верхнем углу $\mathbf{A}$:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k} \end{vmatrix}. \tag{3.7}$$

Покажем, что $M \neq 0$. Действительно, наличие полного спарка означает, что любые d столбцов матрицы оператора синтеза линейно независимы. Поскольку элементарные преобразования строк не влияют на линейную независимость столбцов, в матрице $(\mathbf{A} \mid \mathbf{I})$ любые d столбцов линейно независимы. В частности, линейно независимы столбцы с номерами $1, 2, \dots, k, n-d+k+1, n-d+k+2, \dots, n$. Выпишем их:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k} & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & \dots & a_{d,k} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right), \tag{3.8}$$

отсюда немедленно получаем $M \neq 0$.

Проведенные рассуждения можно выполнить в обратном порядке и, тем самым, завершить доказательство.

Для рассмотренного выше случая равноугольного фрейма Парсеваля с 14 векторами в $\mathbb{R}^7$ была найдена матрица $\mathbf{A}$ с помощью системы компьютерной математики Mathemematica, а также вычислены все миноры $\mathbf{A}$. Оказалось, что все миноры отличны от нуля, следовательно, в силу доказанной выше эквивалентности в $\mathbb{R}^7$ все равноугольные фреймы Парсеваля, содержащие 14 векторов, унитарно перестановочно проективно эквивалентны и являются фреймами с *полным* спарком.

4. Дополнения по Наймарку.

Теорема 6 [3]. *Для любого фрейма Парсеваля* $\mathbf{\Phi} = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ *в* d*-мерном пространстве* $\operatorname{span}(\mathbf{\Phi})$ *существует дополнение по Наймарку, т.е. фрейм Парсеваля* $\mathbf{\Psi} = \{\psi_i\}_{i=1}^n$ *в* $(n-d)$*-мерном пространстве* $\operatorname{span}(\mathbf{\Psi})$, *для которого выполняются следующие свойства*:

а) *если* $\mathbf{\Psi}$ *– оператор синтеза фрейма* $\{\psi_i\}_{i=1}^n$, *то* $\mathbf{\Psi}^*\mathbf{\Psi} = \mathbf{I}_{\mathbb{F}^n} - \mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi}$;

б) $\mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}^* = \mathbf{0}$.

Следствием этой теоремы является утвердительный ответ на вопрос из [6]: является ли любой равномерный фрейм Парсеваля $\{\varphi_i\}_{i=1}^{d+1}$ в $\mathbb{R}^d$ единственным с точностью до перестановочно-проективной унитарной эквивалентности?

Если $\{\varphi_i\}_{i=1}^{d+1}$ – равномерный фрейм Парсеваля в $\mathbb{R}^d$, то его дополнение по Наймарку представляет собой набор вещественных чисел $\{\psi_i\}_{i=1}^{d+1}$ с одинаковыми модулями $|\psi_i| = 1/\sqrt{d+1}$, $i = 1, \ldots, d+1$. Эти числа однозначно определяют матрицу Грама фрейма $\{\varphi_i\}_{i=1}^{d+1}$, который оказывается равноугольным и единственным с точностью до перестановочно-проективной унитарной эквивалентности.

Пусть $\mathbf{\Psi}$ – дополнение по Наймарку к рассматриваемому выше фрейму $\mathbf{\Phi}$. Рассмотрим ассоциированное с фреймом $\mathbf{\Psi}$ векторное пространство линейных зависимостей векторов фрейма:

$$\mathbb{W} = \{(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) \in \mathbb{F}^n : \delta_1\psi_1 + \delta_2\psi_2 + \cdots + \delta_n\psi_n = 0\}.$$

Рассмотрим, как связаны пространства $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$.

Проведем аналогичные рассуждения для фрейма $\mathbf{\Psi}$. Обозначим

$$\mathbf{B}_1 = \big(\, \psi_1 \;\big|\; \psi_2 \;\big|\; \ldots \;\big|\; \psi_{n-d} \,\big), \qquad \mathbf{B}_2 = \big(\, \psi_{n-d+1} \;\big|\; \psi_{n-d+2} \;\big|\; \ldots \;\big|\; \psi_n \,\big),$$
$$\mathbf{\Psi} = (\, \mathbf{B}_1 \mid \mathbf{B}_2 \,).$$

Согласно сделанным выше предположениям матрица $\mathbf{A}_2$ из представления $\mathbf{\Phi} = (\mathbf{A}_1 \mid \mathbf{A}_2\,)$ является невырожденной. Покажем, что и матрица $\mathbf{B}_1$ для дополнения по Наймарку тоже невырожденная.

Поскольку рассматриваются фреймы Парсеваля, в силу свойства б) теоремы 6 получаем, что матрица

$$\mathbf{S} := \left(\frac{\mathbf{\Phi}}{\mathbf{\Psi}}\right)$$

является самосопряженной; действительно,

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}^* = \left(\frac{\mathbf{\Phi}}{\mathbf{\Psi}}\right)\cdot(\mathbf{\Phi}^*|\mathbf{\Psi}^*) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^* & \mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}^* \\ \hline \mathbf{\Phi}\mathbf{\Psi}^* & \mathbf{\Psi}\mathbf{\Psi}^* \end{array}\right) = \mathbf{I}_{\mathbb{F}^n},$$
$$\mathbf{S} = \left(\frac{\mathbf{\Phi}}{\mathbf{\Psi}}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \hline \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{array}\right),$$
$$\mathbf{I}_{\mathbb{F}^n} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{S}^* = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \hline \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1^* & \mathbf{B}_1^* \\ \hline \mathbf{A}_2^* & \mathbf{B}_2^* \end{array}\right)$$
$$= \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^* + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_2^* & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1^* + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2^* \\ \hline \mathbf{B}_1\mathbf{A}_1^* + \mathbf{B}_2\mathbf{A}_2^* & \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^* + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^* \end{array}\right),$$

отсюда

$$\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1^* + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2^* = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^* + \mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^* = \mathbf{I}_{\mathbb{F}^{n-d}}.$$

Из первого равенства получаем

$$\mathbf{B}_2^* = -\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1^* = -\mathbf{A}\mathbf{B}_1^*,$$

откуда имеем

$$\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^* = \mathbf{B}_1\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{B}_1^*$$

и подставляем во второе

$$\mathbf{I}_{\mathbb{F}^{n-d}} = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^* + \mathbf{B}_1\mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{B}_1^* = \mathbf{B}_1(\mathbf{I}_{\mathbb{F}^{n-d}} + \mathbf{A}^*\mathbf{A})\mathbf{B}_1^*.$$

Поскольку определитель произведения равен произведению определителей, имеем $\det(\mathbf{B}_1) \neq \mathbf{0}$.

Следовательно, можно выполнить элементарные преобразования со строками, в результате которых получим

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\Psi}} = (\,\mathbf{B}_1 \mid \mathbf{B}_2\,) \sim (\,\mathbf{I}_{\mathbb{F}^{n-d}} \mid \mathbf{B}\,),\ \mathbf{B} = (b_{i,j}) = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_2,$$

где $\mathbf{B}$ – $((n-d)\times d)$-матрица. Базисом d-мерного пространства $\mathbb{W}$ является

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= (-b_{1,1}, -b_{2,1}, \dots, -b_{n-d,1}, 1, 0, \dots, 0),\\
\mathbf{f}_2 &= (-b_{1,2}, -b_{2,2}, \dots, -b_{n-d,2}, 0, 1, \dots, 0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\mathbf{f}_d &= (-b_{1,d}, -b_{2,d}, \dots, -b_{n-d,d}, 0, 0, \dots, 1).
\end{aligned}$$

Повторяем аналогичные элементарные преобразования со строками матриц $\boldsymbol{\Phi}$ и $\boldsymbol{\Psi}$ и поменяем местами блоки $(\,\mathbf{A} \mid \mathbf{I}\,)$ и $(\,\mathbf{I} \mid \mathbf{B}\,)$, умножая последний на -1:

$$\mathbf{S} \sim \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} -\mathbf{I} & -\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{array}\right) = \big(\,-\mathbf{e}_1 \,\big|\, -\mathbf{e}_2 \,\big|\, \dots \,\big|\, -\mathbf{e}_{n-d} \,\big|\, \mathbf{f}_1 \,\big|\, \mathbf{f}_2 \,\big|\, \dots \,\big|\, \mathbf{f}_d\,\big).$$

Матрица $\mathbf{S}$ невырождена, следовательно, векторы $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-d}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_d\}$ линейно независимы в $\mathbb{F}^n$. Откуда получаем $\mathbb{V} + \mathbb{W} = \mathbb{F}^n$. Более того, докажем, что это прямая сумма подпространств. Для этого возьмем произвольные векторы $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{V}$ и $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{W}$ и покажем, что их скалярное произведение равно нулю. В пространстве $\mathbb{H}^n$ рассмотрим два вектора

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \gamma_1\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \hline \psi_1 \end{pmatrix} + \dots + \gamma_n\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \hline \psi_n \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} \gamma_1\varphi_1 + \dots + \gamma_n\varphi_n \\ \hline \gamma_1\psi_1 + \dots + \gamma_n\psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hline \gamma_1\psi_1 + \dots + \gamma_n\psi_n \end{pmatrix},\\
\mathbf{y} &= \delta_1\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \hline \psi_1 \end{pmatrix} + \dots + \delta_n\begin{pmatrix} \varphi_n \\ \hline \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1\varphi_1 + \dots + \delta_n\varphi_n \\ \hline 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Очевидно, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$. С другой стороны, из самосопряженности $\mathbf{S}$ получаем

$$0 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{\gamma_i}\,\delta_j \left\langle \begin{pmatrix} \varphi_i \\ \hline \psi_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_j \\ \hline \psi_j \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\gamma_i}\,\delta_j.$$

Таким образом, $\mathbb{V} \oplus \mathbb{W} = \mathbb{F}^n$, следовательно, векторы базисов $\mathbb{V}$ и $\mathbb{W}$ ортогональны друг другу: $0 = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j\rangle = -b_{i,j} - \overline{a_{j,i}}$, тогда $b_{i,j} = -\overline{a_{j,i}}$. Получаем $\mathbf{B} = -\mathbf{A}^*$. Таким образом, доказана

Теорема 7. *Пусть $\boldsymbol{\Psi} = \{\psi_i\}_{i=1}^n$ – дополнение по Наймарку в $(n-d)$-мерном пространстве к фрейму Парсеваля $\boldsymbol{\Phi} = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ в d-мерном пространстве. Тогда линейные пространства, описывающие линейные зависимости между векторами фреймов,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{V} &= \{(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{F}^n : \gamma_1\varphi_1 + \dots + \gamma_n\varphi_n = \mathbf{0}\},\\
\mathbb{W} &= \{(\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{F}^n : \delta_1\psi_1 + \dots + \delta_n\psi_n = \mathbf{0}\}
\end{aligned}$$

ортогональны и $\mathbb{V} \oplus \mathbb{W} = \mathbb{F}^n$. *Более того, их базисами являются столбцы соответствующих матриц:*

$$\left(\frac{\mathbf{I}_{\mathbb{R}^{n-d}}}{-\mathbf{A}}\right), \qquad \left(\frac{\mathbf{A}^*}{\mathbf{I}_{\mathbb{R}^d}}\right),$$

где $\mathbf{A} = -\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1$ *для матриц из* (3.5) *и* (3.6).

Приведенное ниже следствие ранее было доказано другим методом в [3].

Следствие 1. *Фрейм Парсеваля* $\mathbf{\Phi}$ *является фреймом с полным спарком тогда и только тогда, когда его дополнение по Наймарку* $\mathbf{\Psi}$ *– фрейм Парсеваля с полным спарком.*

Доказательство. По лемме 1 фрейм $\mathbf{\Phi}$ является фреймом с полным спарком тогда и только тогда, когда любой минор матрицы $\mathbf{A}$ отличен от нуля. Но это означает, что и любой минор матрицы $\mathbf{B} = -\mathbf{A}^*$ отличен от нуля. Последнее эквивалентно тому, что фрейм $\mathbf{\Psi}$ имеет полный спарк.

Следующее утверждение показывает связь между линейными зависимостями фрейма и его дополнения по Наймарку.

Следствие 2. *Векторы фрейма* $\mathbf{\Phi}$ *с номерами* $i_1, i_2, \ldots, i_d$ (d *штук*) *линейно зависимы тогда и только тогда, когда в дополнении по Наймарку* $\mathbf{\Psi}$ *линейно зависимы* $n-d$ *векторов с номерами из множества* $\{1, 2, \ldots, n\} \backslash \{i_1, i_2, \ldots, i_d\}$.

Доказательство. Предположим, что в $\mathbf{\Phi}$, как и ранее, последние d векторов линейно независимы, тогда $\mathbf{\Phi} \sim (\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_{\mathbb{F}^d})$ и $\mathbf{\Psi} \sim (\mathbf{I}_{\mathbb{F}^{n-d}} \mid \mathbf{B})$.

Пусть в $\mathbf{\Phi}$ некоторые d векторов линейно зависимы. Без ограничения общности можно считать, что взяты первые k и последние $d-k$ векторов фрейма для некоторого k, $0 < k \leqslant d$. Тогда первые k столбцов матрицы $\mathbf{A}$ и последние $d-k$ столбцов матрицы $\mathbf{I}_{\mathbb{F}^d}$ линейно зависимы, а значит, минор матрицы (3.8) равен нулю. Следовательно, минор (3.7) матрицы $\mathbf{A}$ равен нулю. Тогда соответствующий минор матрицы $\mathbf{B} = -\mathbf{A}^*$ также равен нулю:

$$M' = \begin{vmatrix} b_{1,1} & \ldots & b_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k,1} & \ldots & b_{k,k} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получаем, что

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \ldots & 0 & b_{1,1} & \ldots & b_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & b_{k,1} & \ldots & b_{k,k} \\ \hline 1 & \ldots & 0 & b_{k+1,1} & \ldots & b_{k+1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & b_{d,1} & \ldots & b_{d,k} \end{array}\right| = 0$$

и, значит, первые k столбцов матрицы $\mathbf{B}$ и последние $d-k$ столбцов матрицы $\mathbf{I}_{\mathbb{F}^{n-d}}$ линейно зависимы. Следовательно, соответствующие векторы $\mathbf{\Psi}$ тоже линейно зависимы, т.е. линейно зависимы векторы ψ_i, где $i \in \{k+1, k+1, \ldots, n-d+k\}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] S. F. D. Waldron, *An Introduction to Finite Tight Frames*, Birkhauser, Boston, 2018.

[2] M. Fickus, J. Jasper, E. J. King, D. G. Mixon, "Equiangular tight frames that contain regular simplices", *Linear Algebra Appl.*, **555** (2018), 98–138.

[3] S. Ya. Novikov, "Equiangular tight frames with simplices and with full spark in $\mathbb{R}^d$", *Lobachevskii J. Math.*, **42**:1 (2021), 155–166.

[4] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhauser, Boston, 2002.

[5] А. И. Мальцев, "Замечание к работе А. Н. Колмогорова, А. А. Петрова и Ю. М. Смирнова "Одна формула Гаусса из теории наименьших квадратов", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **11**:6 (1947), 567–568.

[6] М. Н. Истомина, А. Б. Певный, "О расположении точек на сфере и фрейме Мерседес–Бенц", Матем. просв., сер. 3, **11**, Изд-во МЦНМО, М., 2007, 105–112.

[7] M. Elad, *Sparse and Redundant Representations*, Springer, New York, 2010.

[8] A. Abdollahi, H. Najafi, "Frame graphs", *Linear Multilinear Algebra*, **66**:6 (2018), 1229–1243.

[9] M. Sustik, J. Tropp, I. Dhillon, R. Jr, "On the existence of equiangular tight frames", *Linear Algebra Appl.*, **426**:2-3 (2007), 619–635.

[10] C. Godsil, G. Royle, *Algebraic Graph Theory*, Grad. Texts in Math., **207**, Springer, New York, 2001.

С. Я. Новиков
Самарский национальный исследовательский
университет имени академика С. П. Королева
E-mail: nvks@ssau.ru

Поступило
24.02.2022
Принято к публикации
27.06.2022

В. В. Севостьянова
Самарский национальный исследовательский
университет имени академика С. П. Королева
E-mail: berlua@mail.ru