



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Федотов, Л. Ф. Спевак, В. В. Привалова, Модификация метода граничных элементов для моделирования трехмерных упругих задач, *Матем. моделирование и краев. задачи*, 2006, часть 1, 231–234

<https://www.mathnet.ru/mm kz567>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.174

28 апреля 2025 г., 06:53:32



6. Рогозин В. Д. Уравнение прессования порошков // Порошковая металлургия, 1981. — № 6. — С. 28–31.

Самарский государственный технический университет, г. Самара

УДК 531/534

В. П. Федотов, Л. Ф. Спевак, В. В. Привалова

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЁХМЕРНЫХ УПРУГИХ ЗАДАЧ

В данной работе предложена модификация метода граничных элементов, в которой изначально, на уровне алгоритма, заложена технология распараллеливания.

Согласно методу граничных элементов [1], решение задачи теории упругости можно выразить через поверхностные перемещения $u_i(x)$ и поверхностные напряжения $f_j(x)$. Для вектора перемещений в любой внутренней точке можно записать

$$u_i(\xi) = \int_{S_f} \left[u_{ij}^*(\xi, x) f_j^*(x) - f_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) \right] dS(x) + \\ + \int_{S_u} \left[u_{ij}^*(\xi, x) f_j(x) - f_{ij}^*(\xi, x) u_j^*(x) \right] dS(x). \quad (1)$$

Здесь $x \in S$ — граничная точка области; ξ — внутренняя точка области; $u_j^*(x)$ — известные из граничных условий перемещения для группы поверхностей S_u ; $f_j^*(x)$ — известные из граничных условий поверхностные напряжения для группы поверхностей S_f . Функции влияния $u_{ij}^*(\xi, x)$ и $f_{ij}^*(\xi, x)$ для трёхмерной задачи имеют вид:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu r} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} + \Delta_i r \Delta_j r \right],$$

$$f_{ij}^*(\xi, x) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left(\left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3\Delta_i r \Delta_j r \right] \frac{\partial r}{\partial n} - \right. \\ \left. - (1-2\nu)(\Delta_i r n_j - \Delta_j r n_i) \right),$$

где $r = r(x, \xi)$ — расстояние между точками x и ξ , $\Delta_i r = \partial r / \partial x_i$.

Основное отличие от классического метода заключается в следующем. В МГЭ фиксируется точка влияния, а затем численным интегрированием компонентов тензора Грина (или функций влияния) определяется влияние каждого элемента границы на изменение физических или механических характеристик в этой точке. В предлагаемом подходе фиксируется наиболее удобный базовый элемент, по которому один раз производится аналитическое интегрирование компонентов функций влияния, результатом которого являются функции от координат произвольной точки влияния.

В трёхмерном случае в качестве базового элемента берётся лежащий в координатной плоскости треугольник $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, одна вершина которого находится в начале координат, а вторая лежит на одной из осей. Произвольно расположенный в пространстве треугольник ABC и базовый треугольник связаны между собой с помощью ортогонального преобразования, отображающего произвольную точку пространства $x(x_1, x_2, x_3)$ в точку $\bar{x}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$:

$$x = T\bar{x} + S, \quad \bar{x} = T^{-1}(x - S),$$

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где S — вектор параллельного переноса, T — матрица поворота; векторы трактуются как матрицы-столбцы.

Между интегралами по треугольнику ABC для произвольной точки влияния ξ и интегралами по треугольнику $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ для точки влияния $\bar{\xi} = T^{-1}(\xi - S)$ установлена следующая связь:

$$\begin{pmatrix} I(u_{11}^*) & I(u_{12}^*) & I(u_{13}^*) \\ I(u_{21}^*) & I(u_{22}^*) & I(u_{23}^*) \\ I(u_{31}^*) & I(u_{32}^*) & I(u_{33}^*) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}(u_{11}^*) & \bar{I}(u_{12}^*) & \bar{I}(u_{13}^*) \\ \bar{I}(u_{21}^*) & \bar{I}(u_{22}^*) & \bar{I}(u_{23}^*) \\ \bar{I}(u_{31}^*) & \bar{I}(u_{32}^*) & \bar{I}(u_{33}^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & n_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & n_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & n_3 \end{pmatrix},$$

где $I(u_{ij}^*) = \int_{ABC} u_{ij}^*(\xi, x) dS(x)$, $\bar{I}(u_{ij}^*) = \int_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} u_{ij}^*(\bar{\xi}, x) dS(x)$.

Аналогичное соотношение получено для интегралов от функций f_{ij}^* .

Таким образом, мы получили, что для вычисления интегралов по произвольному треугольнику ABC для точки влияния ξ достаточно построить матрицу T , определить через соотношение (2) точку $\bar{\xi}$ и вычислить интегралы по треугольнику $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, что является более простой задачей. Для вычисления интегралов $\bar{I}(u_{ij}^*)$ и $\bar{I}(f_{ij}^*)$ по треугольнику $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ и произвольной точки влияния $\bar{\xi}$ получены простые аналитические формулы. Одна из них приведена ниже:

$$\bar{I}(u_{13}^*) = c_1 \bar{\xi}_3 \bar{C}_2 \left(\frac{L_2}{\rho[\bar{C}]} - \frac{L_1}{\rho[\bar{B}\bar{C}]} \right).$$

Здесь

$$c_1 = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}, \quad \delta[\bar{B}\bar{C}]_1 = \bar{B}_1 - \bar{C}_1, \quad \delta[\bar{B}\bar{\xi}]_1 = \bar{B}_1 - \bar{\xi}_1,$$

$$L_1 = \ln \left(\frac{\bar{\xi}_2 \bar{C}_2 + \delta[\bar{B}\bar{C}]_1 \delta[\bar{B}\bar{\xi}]_1 - \rho[\bar{B}\bar{C}] \rho[\bar{B}\bar{\xi}]}{\bar{\xi}_2 \bar{C}_2 + \delta[\bar{B}\bar{C}]_1 \delta[\bar{B}\bar{\xi}]_1 - \rho[\bar{B}\bar{C}] \rho[\bar{C}\bar{\xi}] - \rho[\bar{B}\bar{C}]^2} \right),$$

$$L_2 = \ln \left(\frac{\bar{\xi}_2 \bar{C}_2 + \bar{\xi}_1 \bar{C}_1 - \rho[\bar{C}] \rho[\bar{\xi}]}{\bar{\xi}_2 \bar{C}_2 + \bar{\xi}_1 \bar{C}_1 - \rho[\bar{C}] \rho[\bar{C}\bar{\xi}] - \rho[\bar{C}]^2} \right);$$

$\rho[\bar{B}\bar{C}]$ — расстояние между точками \bar{B} и \bar{C} ; $\rho[\bar{B}\bar{\xi}]$ — расстояние между точками \bar{B} и $\bar{\xi}$; $\rho[\bar{C}\bar{\xi}]$ — расстояние между точками \bar{C} и $\bar{\xi}$; $\rho[\bar{C}]$ — радиус вектор точки \bar{C} , равный расстоянию между точками \bar{A} и \bar{C} ; $\rho[\bar{\xi}]$ — радиус вектор точки $\bar{\xi}$.

С помощью полученных формул составляется система уравнений, решение которой дает недостающие значения поверхностных перемещений и напряжений. Через известные граничные значения компоненты тензоров деформации и напряжений, а также перемещения в любой внутренней точке области вычисляется по формулам, соответствующим соотношениям (1) [2, 3].

1. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. Boundary Element Techniques. — Berlin, Neidelberg, New-York, Tokyo: Springer-Verlag, 1984. — 524 p. (Имеется перевод: Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. — М.: Мир, 1987. — 524 с.)

2. Думшева Е.С., Зенкова Е.С., Федотов В.П., Спевак Л.Ф., Привалова В.В. Численно-аналитический алгоритм для решения задач упругости, теплопроводности, диффузии // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. — Екатеринбург: УрО РАН, 2003. — Вып. 7. — С. 70–86.
3. Федотов В.П., Спевак Л.Ф., Привалова В.В., Трухин В.Б., Думшева Т.Д., Зенкова Е.М. Исследование сходимости численно-аналитического метода решения задач упругости, теплопроводности и диффузии // Вестник СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки, 2004. — Вып. 30. — С. 24–32.

Институт машиноведения УрО РАН, г. Екатеринбург

fedotov@imach.uran.ru; Valentina.privalova@usu.ru

УДК 622.28

Е. С. Фирсанов, П. В. Деев

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КОЛЕЦ, ПОДКРЕПЛЯЮЩИХ ОТВЕРСТИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ В ВЕСОМОЙ ПЛОСКОСТИ

Получено новое аналитическое решение плоской задачи теории упругости о напряженном состоянии бесконечной линейно-деформируемой весомой среды S_0 , с деформационными характеристиками E_0 и ν_0 , ослабленной конечным числом N любым образом расположенных отверстий произвольной формы (с одной осью симметрии), подкрепленных упругими кольцами S_m ($m = 1, 2, \dots, N$), из материалов с деформационными характеристиками E_m, ν_m ($m = 1, 2, \dots, N$). Внутренние контуры колец свободны от действия внешних сил. На линиях контакта колец S_m ($m = 1, 2, \dots, N$) и среды S_0 выполняются условия непрерывности векторов напряжений и смещений. Расчётная схема приведена на рисунке.

Действие собственного веса среды моделируется наличием в S_0 начальных напряжений

$$\sigma_x^{(0)(0)} = -\gamma(H-x), \quad \sigma_y^{(0)(0)} = -\lambda\gamma(H-x), \quad \tau_{xy}^{(0)(0)} = 0. \quad (1)$$

Граничные условия задачи имеют следующий вид:

– на контурах $L_{0,m}$, ($m = 1, 2, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1,m)} &= \sigma_\rho^{(0,m)} + \sigma_\rho^{(0,m)(0)}, & \tau_{\rho\theta}^{(1,m)} &= \tau_{\rho\theta}^{(0,m)} + \tau_{\rho\theta}^{(0,m)(0)}, \\ u_x^{(0,m)} &= u_x^{(1,m)}, & u_y^{(0,m)} &= u_y^{(1,m)}, \end{aligned} \quad (2)$$