О. В. Бесов, В. П. Ильин, Проекционные представления функций через разности, *Тр. МИАН СССР*, 1979, том 150, 3–10

Труды Математического института АН СССР
1979, том 150

О. В. БЕСОВ, В. П. ИЛЬИН

ПРОЕКЦИОННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ РАЗНОСТИ

В статье выводятся представления (проекционные разложения) функций многих переменных в виде суммы многочлена и интегралов, содержащих разности функции первого или высших порядков. Эти представления могут быть применены в различных оценках для функционалов через модули непрерывности функций тех или иных порядков (в том числе в интегральных нормах), через нормы функций, содержащих разности и т. п.

В математическом анализе часто используются проекционные разложения функций через производные, наиболее употребительным из которых является формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Предложенное С. Л. Соболевым проекционное разложение функций многих переменных с изотропными свойствами (см., например, [1]) послужило ему основой для получения теорем вложения.

Приводимые ниже проекционные разложения функций через разности в определенном отношении аналогичны упомянутым изотропным разложениям С. Л. Соболева через производные и неизотропным разложениям через производные из работы [2]. В работе [3] установлено проекционное представление функций через разности в одномерном случае, его комбинации использованы для построения многомерного проекционного разложения. Здесь будет получено многомерное изотропное обобщение (5) разложения из [3], содержащее разности порядка m переменного направления. Простое по выводу, оно обладает, однако, тем недостатком, что выполняется (вообще говоря) лишь для подобласти задания функции. Этот недостаток в применениях в определенных случаях устраняется с помощью предварительного распространения функции за пределы области определения с сохранением надлежащих свойств разностей. С помощью этого разложения можно, например, оценить в равномерной или интегральной метрике разность между функцией и проекционным многочленом $P_{m-1}(x)$ через модуль непрерывности порядка m функции в той же метрике. Два других проекционных разложения (19), (20) будут выведены на основе указанного для анизотропного случая способа в работе [2]. Первое из них относится к изотропному случаю и содержит разности порядка m переменного направления. Второе относится к неизотропному случаю и содержит разности (вообще говоря) различных порядков по направлениям различных координатных осей. Эти разложения справедливы во всей области определения функции (соответственно звездной или l-звездной относительно шара). С их помощью можно получить, например, оценки в равномерной или интегральной метриках уклонения функции (или ее производных) от проекционного многочлена через модули непрерывности.

В дальнейшем f — локально суммируемая функция. Без ограничения общности можно считать здесь, что f задана на всем n-мерном евклидовом пространстве E^n. Пусть

$$\Delta^m(y) f(x) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} C_m^j f(x + jy), \qquad \Delta_i^m(t) f(x) = \Delta^m(te^{(i)}) f(x),$$

где t — число, $e^{(i)}$ — единичный вектор i-й координатной оси.

I. Пусть $K \in C_0^\infty(E^n)$, $\int K(x)dx = 1$, $K_k(x) = k^{-n} K\left(\frac{x}{k}\right)$, m — натуральное число. Тогда

$$f(x) = (-1)^m \int K(z) \Delta^m(z) f(x) dz - \sum_{k=1}^{m} (-1)^k C_m^k \int f(x+z) K_k(z) dz =$$

$$= (-1)^m \int K(z) \Delta^m(z) f(x) dz - \sum_{k=1}^{m} (-1)^k C_m^k f_k(x), \tag{1}$$

где

$$f_k(x) = \int f(x+z) K_k(z)\, dz. \tag{2}$$

Применим к $f_k(x)$ проекционное разложение через производные С. Л. Соболева ([1, с. 271]):

$$f_k(x) = \sum_{|\beta|<m} x^\beta \int \mathcal{L}_\beta(y) f_k(y)\, dy + \int \sum_{|\alpha|=m} \mathcal{K}_\alpha(x, y) D^\alpha f_k(y)\, dy. \tag{3}$$

Здесь ядра $\mathcal{L}_\beta$ бесконечно дифференцируемы и отличны от нуля только в произвольном заранее заданном шаре C. Ядра $\mathcal{K}_\alpha(x, y)$ могут быть отличны от нуля только при y, лежащем в шаре C или в той части касающегося шара C конуса с вершиной в x, которая расположена между этим шаром и x. $\mathcal{K}_\alpha(x, y)$ бесконечно дифференцируемы по x и по y при $x \neq y$, и при ограниченных x и y $|\mathcal{K}_\alpha(x, y)| \leqslant A|x-y|^{m-n}$.

Перенесем дифференцирование в (3) $D^\alpha f_k$ на ядро K_k из (2) с помощью интегрирования по частям, причем само ядро будем считать специализированным:

$$K_k(x) = k^{-n} K\left(\frac{x}{k}\right) = k^{-n} \sum_{j=1}^{m} a_j N\left(\frac{x}{kj}\right) = \sum_{j=1}^{m} a_j N_k\left(\frac{x}{j}\right),$$

где

$$\sum_{j=1}^{m} a_j j^n = 1, \qquad a_j = A(-1)^{m-j} C_m^j j^{m-n},$$

$$\frac{1}{A} = \sum_{0}^{m} (-1)^{m-j} C_m^j j^m = (-1)^m \left(x \frac{d}{dx}\right)^m (1-x)^m |_{x=1} \neq 0.$$

Тогда при $|\alpha| = m$

$$D^{\alpha} f_k(x) = (-1)^m \int f(x+z) \sum_{j=1}^{m} a_j j^{-m} N_k^{(\alpha)}\left(\frac{z}{j}\right) dz =$$

$$= (-1)^m \int N_k^{(\alpha)}(z) \sum_{j=1}^{m} a_j j^{n-m} f(x+jz)\, dz =$$

$$= (-1)^m A \int N_k^{(\alpha)}(z) \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} C_m^j f(x+jz)\, dz =$$

$$= (-1)^m A \int N_k^{(\alpha)}(z)\, \Delta^m(z) f(x)\, dz. \tag{4}$$

Подставляя теперь в (1) f_k из (3), $D^{\alpha} f_k$ из (4), получаем

$$f(x) = (-1)^m \int K(y) \Delta^m(y) f(x)\, dy + \sum_{|\beta|<m} x^{\beta} \int L_{\beta}(y) f(y)\, dy +$$
$$+ \iint \mathscr{K}(x, y, z)\, \Delta^m(z) f(y)\, dy\, dz, \tag{5}$$

где L_{β} — бесконечно дифференцируемы, равны нулю вне

$$C + \bigcup_{k=1}^{m} \operatorname{supp} K_k,$$

$$\mathscr{K}(x, y, z) = \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ 1 \leqslant k \leqslant m}} c_{\alpha,k} \mathscr{K}_{\alpha}(x, y)\, N_k^{(\alpha)}(z).$$

Заметим, что при этом K, $K_k N_k(x)$ можно взять такими, чтобы носители их содержались в пересечении наперед заданных шара $\{x : |x| < \varepsilon\}$ и конуса $\left\{x : \left|\frac{x}{|x|} - e\right| < \varepsilon\right\}$.

II. Пусть m, n — натуральные числа, $K \in C_0^{\infty}(E^n)$, $\int K(x)dx = 1$, $b > 0$, $b_j = 1 + jb$,

$$L(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j K\left(\frac{x}{b_j}\right), \tag{6}$$

$$\sum_{j=0}^{m} a_j b_j^n = 1, \qquad a_j = A(-1)^{m-j} C_m^j b_j^{-n-1}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{A} = (-1)^m \sum_{j=0}^{m} \frac{(-1)^j C_m^j}{(1+jb)} = (-1)^m \int_0^1 (1-t^b)^m\, dt \neq 0.$$

Пусть далее $\bar{e}$, $e = (e_1, \ldots, e_n) \in E^n$, $|\bar{e}| = |e| = 1$, $u > 0$,

$$\Omega_x(u, e) = -\frac{\partial^m}{\partial u^m}\left(\frac{u^{m-1}}{(m-1)!} \int_u^{\infty} w^{n-1} L(x + we)\, dw\right),$$

$$M_x(u, e) = \frac{u^{m+n-1}}{(m-1)!} L(x + ue).$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^m}{\partial u^m} M_x(u, e) = \frac{\partial^m}{\partial u^m}\left[\frac{u^{m+n-1}}{(m-1)!} L(x+ue)\right] =$$

$$= -\frac{\partial^m}{\partial u^{m-1}}\left[u \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^{m-1}}{(m-1)!} \int_u^{\infty} w^{n-1} L(x + we)\, dw\right) -\right.$$

$$-\frac{(m-1)\,u^{m-1}}{(m-1)!}\int\limits_u^\infty w^{n-1}L(x+we)\,dw\Bigg] = u\frac{\partial}{\partial u}\Omega_x(u, e) +$$

$$+ m\Omega_x(u, e) - (m-1)\,\Omega_x(u, e) = \frac{\partial}{\partial u}[u\Omega_x(u, e)]. \tag{8}$$

$$\int\limits_{|e|=1}\int\limits_0^\infty f(ue)\,\Omega_x(u, e)\,du\,de =$$

$$= -\int\limits_{|e|=1}\int\limits_0^\infty f(ue)\,\frac{\partial^m}{\partial u^m}\left(\frac{u^{m-1}}{(m-1)!}\int\limits_u^\infty w^{n-1}L(x+we)\,dw\right)du\,de =$$

$$= \int\limits_{|e|=1}\int\limits_0^\infty f(ue)\,u^{n-1}\sum_{k=0}^{m-1} c_k u^k\left(\sum_{i=1}^n e_i D_i\right)^k L(x+ue)\,du\,de =$$

$$= \sum_{|\alpha|<m} c_\alpha\int\limits_{|e|=1}\int\limits_0^\infty f(ue)\,u^{n-1}(ue)^\alpha L^{(\alpha)}(x+ue)\,du\,de = \sum_{|\alpha|<m} c_\alpha\int f(y)\,y^\alpha L^{(\alpha)}(x+y)\,dy, \tag{9}$$

$$\int\limits_{|e|=1}\int\limits_0^\infty \Omega_x(u, e)\,du\,de = \int\limits_{|e|=1}\int\limits_0^\infty w^{n-1}L(x+we)\,dw\,de = \int L(x+y)\,dy = \int L(x)\,dx =$$

$$= \sum_0^m a_j b_j\int K(x)\,dx = 1. \tag{10}$$

Введем для $v > 0$

$$f_v(x) = \frac{1}{v^2}\int\limits_{|\bar e|=1}\int\limits_{|e|=1}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(x+t\bar e+ue)\,\Omega_0\left(\frac{t}{s}, \bar e\right)\Omega_x\left(\frac{u}{v}, e\right)dt\,du\,de\,d\bar e =$$

$$= \int\limits_{|\bar e|=1}\int\limits_{|e|=1}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(x+vt\bar e+vue)\,\Omega_0(t, \bar e)\,\Omega_x(u, e)\,dt\,du\,de\,d\bar e. \tag{11}$$

В силу (9), (10) $f_v(x)$ при фиксированном x является усреднением f в точке x с параметром v. Для $f\in L^{\text{loc}}$ $f_v(x)\to f(x)$ при $v\to 0$ в каждой точке Лебега функции f, т. е. для почти всех x (см., например, [4, с. 91]).

По формуле Лейбница—Ньютона для почти всех x

$$f(x) = f_1(x) + \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial v} f_v(x)\,dv. \tag{12}$$

Слагаемое $f_1(x)$ является многочленом $P_{m-1}(x)$ степени не выше $m-1$. В самом деле, как и при выводе (9), имеем

$$\int\limits_{|e|=1}\int\limits_0^\infty f(x+ue)\frac{\partial^m}{\partial u^m}\left(\frac{u^{m-1}}{(m-1)!}\int\limits_u^\infty w^{n-1}L(x+we)\,dw\right)du\,de =$$

$$= \sum_{|\alpha|<m} c_\alpha\int f(x+y)\,y^\alpha L^{(\alpha)}(x+y)\,dy =$$

$$= \sum_{|\alpha|<m} c_\alpha\int f(y)\,(y-x)^\alpha L^{(\alpha)}(y)\,dy = \mathcal{P}_{m-1}(x),$$

а $f_1(x)$ является усреднением $\mathcal{P}_{m-1}(x)$. Заметим, что многочлен $f_1(x) = P_{m-1}(x)$ построен по значениям f из арифметической суммы $\operatorname{supp} L + \operatorname{supp} L$.

Покажем, что

$$\frac{\partial}{\partial v} f_v(x) = \frac{1}{v} \iint R(x, y, x+z)\, \Delta^m (bvy)\, f(x + vy + vz)\, dy\, dz, \tag{13}$$

где $b > 0$ достаточно мало, $R(x, y, z)$ — многочлен степени m по x с коэффициентами из C_0^∞ по y и по z, сосредоточенными в $\{(y, z): |y - x^{(0)}| < \varepsilon, |z - x^{(0)}| < \varepsilon\}$ с наперед заданными $x^{(0)} \in E^n$, $\varepsilon > 0$.

Установим (13). В силу (8)

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{v}\Omega_0\left(\frac{t}{v}, \bar{e}\right)\frac{1}{v}\Omega_x\left(\frac{u}{v}, \bar{e}\right)\right] = \frac{1}{v}\Omega_0\left(\frac{t}{v}, \bar{e}\right)\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{u}{v}\Omega_x\left(\frac{u}{v}, e\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{t}{v}\Omega_0\left(\frac{t}{v}, \bar{e}\right)\right]\frac{1}{v}\Omega_x\left(\frac{u}{v}, e\right) =$$

$$= \frac{1}{v}\Omega_0\left(\frac{t}{v}, \bar{e}\right)\left(-\frac{1}{v^2}\right) M_x^{(m)}\left(\frac{u}{v}, e\right) - \frac{1}{v^2} M_0^{(m)}\left(\frac{t}{v}, \bar{e}\right)\frac{1}{v}\Omega_x\left(\frac{u}{v}, e\right),$$

где $M_x^{(m)}(u, e) = \frac{\partial^m}{\partial u^m} M_x(u, e)$. Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial v} f_v(x) = -\frac{1}{v}\int\limits_{|\bar{e}|=1}\int\limits_{|e|=1}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(x + vt\bar{e} + vue)\,[\Omega_0(t, \bar{e})\, M_x^{(m)}(u, e) +$$

$$+ \Omega_x(u, e)\, M_0^{(m)}(t, \bar{e})]\, du\, dt\, de\, d\bar{e} = J'(x, v) + J''(x, v). \tag{14}$$

Преобразуем (14), рассмотрев предварительно вспомогательный интеграл с $\varphi \in C_0^\infty(E^n)$

$$J(x, v) = \int\limits_{|e|=1}\int\limits_0^\infty \varphi(vue)\frac{\partial^m}{\partial u^m} M_x(u, e)\, du\, de =$$

$$= \frac{(-1)^m v^m}{(m-1)!}\int\limits_{|e|=1}\int\limits_0^\infty u^m\left(\sum_{i=1}^n e_i D_i\right)^m \varphi(vue)\, u^{n-1} L(x + ue)\, du\, de =$$

$$= v^m \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \int\limits_{|e|=1}\int\limits_0^\infty (ue)^\alpha \varphi^{(\alpha)}(vue)\, u^{n-1} L(x + ue)\, du\, de =$$

$$= v^m \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha \int \varphi^{(\alpha)}(vy)\, y^\alpha L(x + y)\, dy =$$

$$= v^m \sum_{\substack{\beta\leqslant\alpha\\|\alpha|=m}} c_{\alpha\beta} x^{\alpha-\beta}\int \varphi^{(\alpha)}(vy - vx)\, y^\beta L(y)\, dy =$$

$$= \sum_{|\alpha|=m} c'_\alpha x^\alpha \int \varphi(vy - vx)\, L^{(\alpha)}(y)\, dy +$$

$$+ \sum_{\substack{\gamma\leqslant\beta\leqslant\alpha\\|\beta-\gamma|=1\\|\alpha|=m}} c_{\alpha\beta\gamma} v^{|\alpha-\gamma|} x^{\alpha-\beta}\int \varphi^{(\alpha-\gamma)}(vy - vx)\, D^\gamma (y^\beta L(y))\, dy =$$

$$= \sum_{|\alpha|=m} c'_\alpha x^\alpha J_\alpha(x, v) + \sum c_{\alpha\beta\gamma} v^{|\alpha-\gamma|} x^{\alpha-\beta} J_{\alpha\beta\gamma}(x, v). \tag{15}$$

В силу (6), (7)

$$J_{\alpha\beta\gamma}(x, v) = \int \varphi^{(\alpha-\beta)}(vy - vx)\, D^\gamma \sum_{j=0}^m a_j y^\beta K\left(\frac{y}{b_j}\right) dy =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} a_j b_j^{n+1} \int \varphi^{(\alpha-\gamma)}(vy - vx) D^{\gamma}_{\left(\frac{y}{b_j}\right)} \left[\left(\frac{y}{b_j}\right)^{\beta} K\left(\frac{y}{b_j}\right)\right] \frac{dy}{b_j^n} =$$

$$= \int \sum_{j=0}^{m} a_j b_j^{n+1} \varphi^{(\alpha-\gamma)}(vy + bjvy - vx) D^{\gamma} [y^{\beta} K(y)]\, dy =$$

$$= A \int \Delta^m (bvy)\, \varphi^{(\alpha-\gamma)}(vy - vx) D^{\gamma} [y^{\beta} K(y)]\, dy. \tag{16}$$

$$J_{\alpha} = \sum_{j=0}^{m} a_j b_j^{-m} \int \varphi(vy - vx) K^{(\alpha)}\left(\frac{y}{b_j}\right) dy = \sum_{j=0}^{m} a_j b_j^{n-m} \int \varphi(b_j vy - vx) K^{(\alpha)}(y)\, dy =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} a_j b_j^{n-m} J_{\alpha j}(x, v).$$

Специализируя ядро K, положим $K(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i' N\left(\frac{x}{b_i}\right)$, где

$$\sum_{i=0}^{m} a_i' b_i^n = 1, \qquad a_i' = A'(-1)^{m-i} C_m^i b_i^{-n+m},$$

$$\frac{1}{A'} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} C_m^i b_i^m = (-1)^m \left(x \frac{d}{dx}\right)^m [x(1 - x^b)^m]\,|_{x=1} \neq 0.$$

Тогда

$$J_{\alpha j}(x, v) = \int \sum_{i=0}^{m} a_i' b_i^{-m} \varphi(b_j vy - vx) N^{(\alpha)}\left(\frac{y}{b_i}\right) dy =$$

$$= A' \int \sum_{i=0}^{m} (-1)^{(m-i)} C_m^i \varphi(b_i b_j vy - vx) N^{(\alpha)}(y)\, dy =$$

$$= A' \int \Delta^m (bb_j vy)\, \varphi(b_j vy - vx) N^{(\alpha)}(y)\, dy =$$

$$= A' b_j^{-n} \int \Delta^m (bvy)\, \varphi(vy - vx) N^{(\alpha)}\left(\frac{y}{b_j}\right) dy. \tag{17}$$

Преобразуем теперь интегралы из (14). Рассмотрим при этом лишь $J'(x, v)$, так как $J''(x, v)$ преобразуется аналогично. Интеграл $J'(x, v)$ может быть записан в силу (9), (10) в виде

$$J'(x, v) = -\frac{1}{v} \iint_{|e|=10}^{\infty} f_{(v)}(x + vue) \frac{\partial^m}{\partial u^m} M_x(u, e)\, du\, de, \tag{18}$$

где $f_{(v)}$ является усреднением f с параметром v. Преобразуя (18) по формулам (15), (16), (17) и перенося интегрированием по частям возникающие в (16) производные $D^{\alpha-\gamma} f_{(v)}$ с функции на ядро усреднения, приходим к равенству (13). Положение носителей коэффициентов многочлена $R(x, y, z)$ из (13) определяется носителем N и, очевидно, является требуемым, если носитель N содержится в достаточно малой окрестности нуля.

Замечание. Двойное усреднение (11) строилось на основе одинаковых ядер: L, K, N. Можно было бы усреднение с ядром Ω_0 построить и на основе других ядер $\bar{L}$, $\bar{K}$, $\bar{N}$ или даже заменить его усреднением с более простой конструкцией ядра (см. [4, с. 111]).

Равенство (12) можно переписать в силу (13) в виде

$$f(x) = P_{m-1}(x) + \int_0^1 \frac{1}{v} \iint R(x, y, z)\, \Delta^m (bvy) f(x - vx + vy + vz)\, dy\, dz\, dv. \tag{19}$$

Здесь при наперед заданных $x^{(0)} \in E^n$, $\varepsilon > 0$ и достаточно малом $b > 0$ P_{m-1} — многочлен, построенный по значениям f из шара $C_\varepsilon(2x^{(0)}) = \{x: |x-2x^{(0)}| < \varepsilon\}$, $R(x, y, z)$—многочлен степени m по x с коэффициентами из C_0^∞ по y и по z, сосредоточенными в $\{(y, z) : |y - x^{(0)}| < \varepsilon, |z - x^{(0)}| < \varepsilon\}$. Нетрудно усмотреть, что представление (19) для данной точки x строится по значениям функции f в шаре $C_\varepsilon(2x^{(0)})$ и опирающейся на него части конуса с вершиной в точке x. Тем самым проекционное разложение (19) справедливо для функций, заданных в области звездной относительно некоторого шара.

III. Выведем аналог представления (19) для анизотропного случая. Пусть теперь $m = (m_1, \ldots, m_n)$, m_i — натуральные числа,

$$P_{m-1}(x) = \sum_{\substack{\alpha_i < m_i \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} c_\alpha x^\alpha, \qquad K_i \in C_0^\infty(E^1), \qquad \int K_i(t)\, dt = 1,$$

$$L_i(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j^{(i)} K_i\left(\frac{t}{b_j}\right), \qquad \sum_{j=0}^{m_i} a_j^{(i)} b_j = 1,$$

$$a_j^{(i)} = A_i (-1)^{m_i - j} C_{m_i}^j b_j^{-2},$$

$$\frac{1}{A_i} = (-1)^{m_i} \sum_{j=0}^{m_i} \frac{(-1)^j C_{m_i}^j}{1 + jb} = (-1)^{m_i} \int_0^1 (1 - t^b)^{m_i}\, dt \neq 0,$$

$$\Omega_x(y) = \prod_{i=1}^{n} \Omega_{x_i}^{(i)}(y_i),$$

$$\Omega_{x_i}^{(i)}(u) = -\frac{\partial^{m_i}}{\partial u^{m_i}} \left(\frac{u^{m_i - 1}}{(m_i - 1)!} \int_u^\infty L_i(x_i + t)\, dt \right),$$

$$M_x^{(i)}(u) = \frac{u^{m_i}}{(m_i - 1)!} L_i(x_i + u).$$

При $v > 0$, $\lambda_i > 0$, $|\lambda| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, $v^{-\lambda} x = (v^{-\lambda_1} x_1, \ldots, v^{-\lambda_n} x_n)$ положим

$$f_v(x) = \iint f(x + y + z)\, v^{-2|\lambda|} \Omega_x(v^{-\lambda} y)\, \Omega_0(v^{-\lambda} z)\, dy dz.$$

По формуле Лейбница — Ньютона для почти всех

$$f(x) = f_1(x) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} f_v(x)\, dv$$

(см. [2] и [4, с. 91]).

Слагаемое $f_1(x)$ является многочленом $P_{m-1}(x)$ — произведением многочленов от x_i степеней не выше $m_i - 1$ ($i = 1, \ldots, n$), что устанавливается так же, как в п. II при $n = 1$ (или очевидным образом выводится из [2] и [4,с. 90])

$$\frac{\partial}{\partial v} f_v(x) = \sum_{j=1}^{n} \iint f(x + y + z) \frac{\partial}{\partial v} [v^{-\lambda_j} \Omega_{x_j}^{(j)}(y_j v^{-\lambda_j}) v^{-\lambda_j} \Omega_0^{(j)}(z_j v^{-\lambda_j})] \times$$

$$\times \prod_{i \neq j} v^{-2\lambda_i} \Omega_{x_i}^{(i)}(y_i v^{-\lambda_i})\, \Omega_0^{(i)}(z_i v^{-\lambda_i})\, dy\, dz.$$

Преобразуя далее

$$-\lambda_j v^{-1-\lambda_j} \frac{\partial}{\partial (v^{-\lambda_j})} [v^{-\lambda_j} \Omega_{x_j}^{(j)}(y_j v^{-\lambda_j})\, v^{-\lambda_j} \Omega_0^{(j)}(z_j v^{-\lambda_j})]$$

так же, как в п. II при $n = 1$, приходим к представлению

$$f(x) = P_{m-1}(x) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{1}{v} \iint R_i(x, y, z)\, \Delta_i^{m_i} (bv^{\lambda_i} y_i)\, f(x - v^{\lambda} x + v^{\lambda} y + v^{\lambda} z)\, dy\, dz\, dv. \tag{20}$$

Здесь при наперед заданных $x^{(0)} \in E^n$, $\varepsilon > 0$ и достаточно малом $b > 0$ $P_{m-1}(x)$ — многочлен степеней не выше $m_i - 1$ по x_i, построенный по значениям f из шара $C_\varepsilon(2x^{(0)}) = \{x: |x - 2x^{(0)}| < \varepsilon\}$, $R_i(x, y, z)$ — многочлены степеней не выше $m_j - 1 + \delta_{ij}$ по x_j с коэффициентами из $C_0^\infty(E^n)$ по y и по z, сосредоточенными в $\{(y, z) : |y - x^{(0)}| < \varepsilon,\ |z - x^{(0)}| < \varepsilon\}$. Для данной точки x представление (20) строится по значениям функции f из $V\left(\frac{1}{\lambda}; x\right) = \bigcup_{0<v\leqslant 1} [x + (C_\varepsilon(2x^{(0)}) - x)\, v^\lambda]$, так что представление (20) имеет место для почти каждой точки области G, $\frac{1}{\lambda}$-звездной относительно шара $C_\varepsilon(2x^{(0)})$, т. е. такой, что $V\left(\frac{1}{\lambda}; x\right) \subset G$ для любого $x \in G$ (см. [4, с. 93]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
2. *Ильин В. П.* О разложении анизотропного пространства $W_p^{l_1, \ldots, l_n}\Omega$ с помощью специального проекционного оператора.— Сиб. мат. журн., 1969, **10**, № 1, с. 212—216.
3. *Бесов О. В.* О плотности финитных функций в $\mathscr{L}_{p,\theta}^{l}$ и распространении функций.— Труды МИАН СССР, 1967, **89**, с. 18—30.
4. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.