

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

N. S. Ustinov, On the Constancy of the Extremal Function in the Embedding Theorem of Fractional Order,
Funktsional. Anal. i Prilozhen., 2020, Volume 54, Issue 4, 85–97

<https://www.mathnet.ru/eng/faa3828>

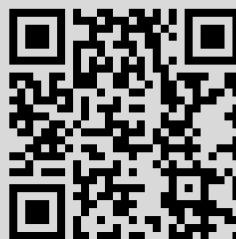
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.89

April 19, 2025, 21:15:34



УДК 517.9

О постоянстве экстремали в теореме вложения дробного порядка¹

© 2020. Н. С. УСТИНОВ

В работе рассматривается вопрос о постоянстве минимайзера в теореме вложения $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ для липшицевой области Ω в зависимости от размера области. Для семейства областей $\varepsilon\Omega$ доказано, что при малых коэффициентах гомотетии ε единственный минимайзер — константа, а при больших ε константа не является даже локальным минимайзером. Также обсуждается вопрос о том, является ли константа — локальный минимайзер глобальным минимайзером.

DOI: <https://doi.org/10.1134/faa3828>

§ 1. Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, — ограниченная область с липшицевой границей. Пусть $s \in (0, 1)$, и пусть

$$q \in \begin{cases} [1, 2_s^*] & \text{при } n \geq 2 \text{ или } n = 1, s < 1/2, \\ [1, \infty) & \text{при } n = 1, s = 1/2, \\ [1, \infty] & \text{при } n = 1, s > 1/2 \end{cases}$$

(здесь и далее $2_s^* := 2n/(n - 2s)$). Рассмотрим теорему вложения пространства Соболева–Слободецкого $\mathcal{H}^s(\Omega)$ (см. [9] и [10, §2.3.3]) в $L_q(\Omega)$:

$$\inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \mathcal{I}_{s,q}^\Omega[u] := \inf_{u \in \mathcal{H}^s(\Omega)} \frac{\|u\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_q(\Omega)}^2} > 0. \quad (1)$$

При $q \in [1, 2_s^*)$ это вложение компактно, поэтому экстремаль (минимайзер функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\Omega[u]$) существует, и точная константа в (1) достигается. Более того, при $n \geq 3$ и $q = 2_s^*$ было показано (см. [11]), что экстремаль в (1) существует, если $2s > 1$ и $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$.

Очевидно, что свойства экстремали в (1) зависят от формы области Ω , от ее размера и выбора нормы в $\mathcal{H}^s(\Omega)$. Положим

$$\|u\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)}^2 := \langle (-\Delta)_{S_p}^s u, u \rangle + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (2)$$

где квадратичная форма $\langle (-\Delta)_{S_p}^s u, u \rangle$ определяется соотношением

$$\langle (-\Delta)_{S_p}^s u, u \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s \cdot (u, \phi_j)_{L_2(\Omega)}^2. \quad (3)$$

¹Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00630А.

Здесь λ_j и ϕ_j — собственные числа и ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи Неймана для оператора Лапласа соответственно (мы считаем, что $\lambda_0 = 0$ для собственной функции $\phi_0 = C$).

Таким образом, оператор $(-\Delta)_{S_p}^s$, порождаемый квадратичной формой (3), является s -й степенью оператора Лапласа с условием Неймана в области Ω в смысле спектральной теории. Он называется *спектральным дробным лапласианом Неймана*.

Область определения формы $\langle (-\Delta)_{S_p}^s u, u \rangle$ совпадает с пространством $\mathcal{H}^s(\Omega)$, а норма (2) эквивалентна стандартной норме в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ (доказательство этих фактов аналогично доказательству леммы 1 в [2]).

В дальнейшем будем считать, что область Ω имеет единичный объем, и рассмотрим вложение (1) в семействе областей $\Omega_\varepsilon := \{\varepsilon x : x \in \Omega\}$. Положим $u_\varepsilon(y) := u(\varepsilon^{-1}y)$; тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u] &:= \frac{\mathcal{I}_{s,q}^{\Omega_\varepsilon}[u_\varepsilon]}{\varepsilon^{n-2s-2n/q}} = \frac{\varepsilon^{n-2s} \langle (-\Delta)_{S_p}^s u, u \rangle + \varepsilon^n \|u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\varepsilon^{n-2s-2n/q} \varepsilon^{2n/q} \|u\|_{L_q(\Omega)}^2} \\ &= \frac{\langle (-\Delta)_{S_p}^s u, u \rangle + \varepsilon^{2s} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_q(\Omega)}^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Функционалы $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$ и $\mathcal{I}_{s,q}^\Omega[u]$ инвариантны относительно домножений u на константу. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что минимайзер удовлетворяет условию нормировки $\|u\|_{L_q(\Omega)}^2 = 1$.

В локальном случае $s = 1$ про минимайзер функционала (4) известно следующее (здесь $\mathcal{H}^1(\Omega)$ — обычное пространство Соболева $W_2^1(\Omega)$, а норма (2) совпадает со стандартной):

1. Если $q \in [1, 2]$, то при любом $\varepsilon > 0$ функция **1** (тождественно равная единице) является единственным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{1,q}^\varepsilon[u]$.

2. Если же $q \in (2, 2_1^*]$, а λ_1 — первое ненулевое собственное число оператора Лапласа с условием Неймана в области Ω , то

- при $\varepsilon > \varepsilon_1(q) := \sqrt{\lambda_1/(q-2)}$ функция **1** не является *локальным* (а значит, и *глобальным*) минимайзером функционала $\mathcal{I}_{1,q}^\varepsilon[u]$ (см. [8, предложение 3.1]);

- при $\varepsilon < \varepsilon_1(q)$ функция **1** дает *локальный* минимум функционала $\mathcal{I}_{1,q}^\varepsilon[u]$ (см. [8, предложение 3.2]);

- существует такое $\mathcal{E}_1(q) > 0$, что при $\varepsilon \leq \mathcal{E}_1(q)$ функция **1** дает *глобальный* минимум функционала $\mathcal{I}_{1,q}^\varepsilon[u]$, а при $\varepsilon > \mathcal{E}_1(q)$ не дает (см. [8, предложения 3.5–3.7]);

- функция $\mathcal{E}_1(q)$ непрерывна и монотонно убывает (см. [8, теорема 3.8]); при $n = 1$ имеем $\mathcal{E}_1(q) = \varepsilon_1(q)$ (см. [7], а также [6]), а при $n \geq 2$ существуют как примеры областей с $\mathcal{E}_1(q) < \varepsilon_1(q)$ (см. [8, следствие 3.4] и [8, (3.6)]), так и примеры областей с $\mathcal{E}_1(q) = \varepsilon_1(q)$ (см. [12, теорема 3.1]).

В данной работе мы будем изучать аналогичные вопросы для функционала (4) в нелокальном случае при условии существования его минимайзера. Отдельно отметим, что при $q < \infty$ минимайзер (если он существует) после

домножения на подходящую константу является обобщенным решением задачи

$$(-\Delta)_{S_p}^s u + u = |u|^{q-2}u, \quad u \in \mathcal{H}^s(\Omega). \quad (5)$$

Замечание 1. Из определения (3) следует, что $(-\Delta)_{S_p}^s \mathbf{1} = 0$ и $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[\mathbf{1}] = \varepsilon^{2s}$. Таким образом, функция $u = \mathbf{1}$ всегда является решением задачи (5).

Замечание 2. При $q \in [1, 2]$ из неравенства Гёльдера следует, что $\|u\|_{L_q(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$; поэтому $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u] \geq \varepsilon^{2s} = \mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[\mathbf{1}]$. Из того факта, что для непостоянной функции u неравенство Гёльдера будет строгим, получаем, что константа является единственным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$ при любом $s \in (0, 1]$.

Замечание 3. Минимайзер функционала (4) можно считать неотрицательным, поскольку для знакопеременной функции u замена $u \rightarrow |u|$ уменьшает значение функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$: от такой замены нормы в L_2 и L_q не меняются, а квадратичная форма уменьшается (см. доказательство теоремы 3 в [3]):

$$\langle (-\Delta)_{S_p}^s u, u \rangle > \langle (-\Delta)_{S_p}^s |u|, |u| \rangle.$$

Далее мы будем считать, что $q > 2$, а все минимайзеры функционалов $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$ неотрицательны.

Через C мы будем обозначать положительные константы, точное значение которых для нас несущественно. Дополнительные параметры, от которых зависит константа, мы будем указывать в скобках; зависимость C от области Ω мы будем опускать.

§ 2. Основной результат

Определим вспомогательный функционал

$$\mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[u] := \|u\|_{L_q(\Omega)}^2 \cdot (\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u] - \mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[\mathbf{1}]) = \langle (-\Delta)_{S_p}^s u, u \rangle + \varepsilon^{2s} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 - \varepsilon^{2s} \|u\|_{L_q(\Omega)}^2;$$

из построения следует, что функция $\mathbf{1}$ является минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$ тогда и только тогда, когда функционал $\mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[u]$ неотрицателен (очевидно, что $\mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[\mathbf{1}] = 0$).

Исследуем неотрицательность функционала $\mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[u]$. Его первый дифференциал равен

$$\mathbf{D}\mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[u; h] = 2 \left(\langle (-\Delta)_{S_p}^s u, h \rangle + \varepsilon^{2s} \int_{\Omega} u h \, dx - \varepsilon^{2s} \|u\|_{L_q(\Omega)}^{2-q} \int_{\Omega} u^{q-1} h \, dx \right).$$

Легко видеть, что $\mathbf{D}\mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[\mathbf{1}; h] \equiv 0$. Подсчитаем второй дифференциал:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2 \mathcal{J}_{s,q}^\varepsilon[u; h, h] &= 2 \langle (-\Delta)_{S_p}^s h, h \rangle + 2\varepsilon^{2s} \|h\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &\quad + 2(q-2)\varepsilon^{2s} \|u\|_{L_q(\Omega)}^{2(1-q)} \left(\int_{\Omega} u^{q-1} h \, dx \right)^2 \\ &\quad - 2(q-1)\varepsilon^{2s} \|u\|_{L_q(\Omega)}^{2-q} \int_{\Omega} u^{q-2} h^2 \, dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Разложим приращение h в сумму ортогональных в $L_2(\Omega)$ слагаемых:

$$h(x) = \int_{\Omega} h \, dx + \widehat{h}, \quad \int_{\Omega} \widehat{h} \, dx = 0; \quad (7)$$

тогда при $u = \mathbf{1}$ формула (6) записывается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2 \mathcal{J}_{s,q}^{\varepsilon}[\mathbf{1}; h, h] &= 2\langle (-\Delta)_{S_p}^s \widehat{h}, \widehat{h} \rangle - 2(q-2)\varepsilon^{2s} \|\widehat{h}\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &= 2 \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j^s - (q-2)\varepsilon^{2s}) (\widehat{h}, \phi_j)_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Положим $\varepsilon_s(q) := (\lambda_1^s / (q-2))^{1/(2s)}$ ($\varepsilon_s(q) = \varepsilon_1(q)$ при $s = 1$).

Теорема 1. 1. Пусть $\varepsilon > \varepsilon_s(q)$. Тогда функция $\mathbf{1}$ не является локальным (а следовательно, и глобальным) минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon}[u]$. Это утверждение выполнено и при $q = \infty$ (в этом случае $\varepsilon_s(q) = 0$).

2. Пусть $\varepsilon < \varepsilon_s(q)$. Тогда функция $\mathbf{1}$ является локальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon}[u]$.

3. Пусть $\varepsilon = \varepsilon_s(q)$ и $\int_{\Omega} \phi_1^3 \, dx \neq 0$. Тогда функция $\mathbf{1}$ не является локальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon}[u]$. Более того, существует $\check{\varepsilon}(q) < \varepsilon_s(q)$, такое, что при $\varepsilon \in (\check{\varepsilon}(q), \varepsilon_s(q)]$ функция $\mathbf{1}$ не является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon}[u]$ (хотя дает локальный минимум).

Доказательство. 1. Это утверждение следует из неравенства $\mathbf{D}^2 \mathcal{J}_{s,q}^{\varepsilon}[\mathbf{1}; \phi_1, \phi_1] < 0$.

2. Пусть $u \in \mathcal{H}^s(\Omega)$, $\|u - \mathbf{1}\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)} < 1/2$. Воспользуемся разложением (7): имеем $u = c + \widehat{u}$ с константой c , $1/2 < c < 3/2$, и выполнено равенство

$$\mathcal{J}_{s,q}^{\varepsilon}[u] = \langle (-\Delta)_{S_p}^s \widehat{u}, \widehat{u} \rangle + \varepsilon^{2s} \|\widehat{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 + c^2 \varepsilon^{2s} - c^2 \varepsilon^{2s} \|\mathbf{1} + \widehat{u}/c\|_{L_q(\Omega)}^2.$$

В [8, (3.5)] было показано, что

$$\|\mathbf{1} + \widehat{u}/c\|_{L_q(\Omega)}^2 \leq 1 + (q-1) \|\widehat{u}/c\|_{L_2(\Omega)}^2 + C(q) \|\widehat{u}\|_{L_q(\Omega)}^{\min(q,3)},$$

откуда получаем неравенство

$$\mathcal{J}_{s,q}^{\varepsilon}[u] \geq \langle (-\Delta)_{S_p}^s \widehat{u}, \widehat{u} \rangle - (q-2)\varepsilon^{2s} \|\widehat{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 - C(q)\varepsilon^{2s} \|\widehat{u}\|_{L_q(\Omega)}^{\min(q,3)}.$$

Поскольку $(\widehat{u}, \phi_0)_{L_2(\Omega)} = 0$, из (3) следует, что $\langle (-\Delta)_{S_p}^s \widehat{u}, \widehat{u} \rangle \geq \lambda_1^s \|\widehat{u}\|_{L_2(\Omega)}^2$; поэтому из ограниченности вложения $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{s,q}^{\varepsilon}[u] &\geq (\lambda_1^s - (q-2)\varepsilon^{2s}) \lambda_1^{-s} \langle (-\Delta)_{S_p}^s \widehat{u}, \widehat{u} \rangle - C(q)\varepsilon^{2s} \|\widehat{u}\|_{L_q(\Omega)}^{\min(q,3)} \\ &\geq [(\lambda_1^s - (q-2)\varepsilon^{2s}) \lambda_1^{-s} - C(s, q)\varepsilon^{2s} \langle (-\Delta)_{S_p}^s \widehat{u}, \widehat{u} \rangle^{\min(q-2,1)/2}] \langle (-\Delta)_{S_p}^s \widehat{u}, \widehat{u} \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение в квадратных скобках можно сделать положительным выбором малой окрестности функции $\mathbf{1}$ (здесь $C(s, q)$ совпадает с константой из (8)):

$$\langle (-\Delta)_{S_p}^s \widehat{u}, \widehat{u} \rangle \leq \|u - \mathbf{1}\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)}^2 \leq \min \left[\frac{1}{2}, \left(\frac{\lambda_1^s - (q-2)\varepsilon^{2s}}{2C(s, q)\lambda_1^s \varepsilon^{2s}} \right)^{2/\min(q-2,1)} \right]. \quad (9)$$

В этой окрестности $\mathcal{J}_{s,q}^{\varepsilon}[u] > 0$, и утверждение п. 2 доказано!

3. При $\varepsilon = \varepsilon_s(q)$ имеет место равенство $\mathbf{D}^2 \mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_s}[\mathbf{1}; \phi_1, \phi_1] = 0$. Подсчитаем третий дифференциал: $(\phi_1, \phi_0)_{L_2(\Omega)} = 0$, поэтому

$$\mathbf{D}^3 \mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_s}[\mathbf{1}; \phi_1, \phi_1, \phi_1] = -2(q-1)(q-2)\varepsilon^{2s} \int_{\Omega} \phi_1^3 dx \neq 0.$$

Отсюда получаем, что функция $\mathbf{1}$ не дает локального минимума, а потому не является и глобальным минимумом. Существование $\check{\varepsilon}(q)$ следует из непрерывной зависимости функционала $\mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon}[u]$ от параметра ε . \square

Замечание 4. В работе [4] было показано, что условие $\int_{\Omega} \phi_1^3 dx \neq 0$ выполнено для асимметричной области общего положения.

Следующее утверждение является дробным аналогом предложения 3.4 из [8]:

Предложение 1. Пусть $s < n/2$ (это ограничение существенно только в случае $n = 1$), $q = 2_s^*$ и $\varepsilon = \varepsilon_s(2_s^*)$. Тогда функция $\mathbf{1}$ не является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,2_s^*}^{\varepsilon_s}[u]$ в кубе $(0, 1)^n$.

Доказательство. Известно, что для куба $(0, 1)^n$ имеет место равенство $\lambda_1 = \pi^2$; поэтому

$$\mathcal{I}_{s,2_s^*}^{\varepsilon_s}[\mathbf{1}] = \varepsilon_s^{2s} (2_s^*) = \frac{\pi^{2s}(n-2s)}{4s}.$$

Построим последовательность, на которой значение функционала $\mathcal{I}_{s,2_s^*}^{\varepsilon_s}[u]$ будет меньше. Напомним, что в \mathbb{R}^n справедливо дробное неравенство Соболева (см. [5, теорема 1.2, (22)]):

$$\mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n} := \min \frac{\langle (-\Delta)^s u, u \rangle}{\|u\|_{L_{2_s^*}(\mathbb{R}^n)}^2} > 0$$

(здесь $(-\Delta)^s$ — это стандартный дробный лапласиан в \mathbb{R}^n , а минимум берется по всем функциям, где числитель и знаменатель конечны) и минимум достигается (см. [1]) на единственной функции (с точностью до гомотетий, домножений на константу и переносов)

$$\Phi_{s,a}(x) := (a^2 + |x|^2)^{(2s-n)/2} \quad \text{с} \quad \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n} = 2^{2s} \pi^s \frac{\Gamma(n/2 + s)}{\Gamma(n/2 - s)} \left[\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \right]^{2s/n}.$$

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 4 из [11], можно получить соотношение

$$\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{I}_{s,2_s^*}^{\varepsilon_s,(0,1)^n}[\Phi_{s,a}] = 2^{-2s} \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{I}_{s,2_s^*}^{\varepsilon_s,(-1,1)^n}[\Phi_{s,a}] = 2^{-2s} \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n},$$

и для завершения доказательства достаточно показать, что выполнено неравенство

$$\frac{\pi^{2s}(n-2s)}{4s} > 2^{-2s} \mathcal{S}_{s,\mathbb{R}^n} = \pi^s \frac{\Gamma((n+2s)/2)}{\Gamma((n-2s)/2)} \left[\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \right]^{2s/n}, \quad (10)$$

справедливость которого доказывается в §3.

Замечание 5. Поскольку функционал $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$ непрерывно зависит от параметров q и ε , при q , близких к 2_s^* снизу, и ε , близких к $\varepsilon_s(q)$ снизу, функция **1** не дает глобального минимума этого функционала в кубе $(0, 1)^n$ (хотя дает локальный минимум).

Изучим теперь условия, при которых функция **1** дает глобальный минимум функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$.

Теорема 2. 1. При любом $q \in (2, 2_s^*]$ существует такое $\check{\varepsilon}(q) > 0$, что для всех $\varepsilon < \check{\varepsilon}(q)$ функция **1** является единственным глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$. Если $n = 1$ и $s \geq 1/2$, то утверждение выполнено для всех $q \in (2, \infty)$.

2. При любом $\varepsilon > 0$ существует такое $\check{q}(\varepsilon) \in (2, 2_s^*]$, что для всех $q < \check{q}(\varepsilon)$ функция **1** является единственным глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$. Если $n = 1$ и $s \geq 1/2$, то $\check{q}(\varepsilon) < \infty$.

3. Пусть для пары (ε_0, q_0) функция **1** не является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_0}[u]$. Тогда при $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ и $q \geq q_0$ функция **1** не является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$.

Доказательство. 1. Предположим обратное: пусть при некотором q существуют последовательность $\check{\varepsilon}_n \downarrow 0$ и последовательность непостоянных функций $\{u_n : \|u_n\|_{L_q(\Omega)} = 1\}$, для которых

$$\mathcal{I}_{s,q}^{\check{\varepsilon}_n}[u_n] \leq \check{\varepsilon}_n^{2s}, \quad \text{а значит, } \langle (-\Delta)_{S_p}^s u_n, u_n \rangle \leq \check{\varepsilon}_n^{2s} \text{ и } \|u_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 1. \quad (11)$$

Из (11) следует, что u_n ограничены в $\mathcal{H}^s(\Omega)$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $u_n \rightharpoonup u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, и в силу компактности вложения $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega)$ имеем $u_n \rightarrow u$ в $L_2(\Omega)$. Поскольку норма в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ слабо полунепрерывна снизу, получаем

$$\langle (-\Delta)_{S_p}^s u, u \rangle + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \|u\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)}^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{\mathcal{H}^s(\Omega)}^2 = \|u\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

поэтому $\langle (-\Delta)_{S_p}^s u, u \rangle = 0$, функция u постоянна и $u_n \rightarrow u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$. Так как $\|u\|_{L_q(\Omega)} = 1$, то $u = 1$.

Таким образом, в сколь угодно малой окрестности функции **1** существует непостоянный минимайзер u_n функционала $\mathcal{I}_{s,q}^{\check{\varepsilon}_n}[u]$. При малых $\check{\varepsilon}_n$ оценка радиуса окрестности (9) равномерна по n и u_n попадают в эту окрестность. Неравенство (8) влечет за собой $\mathcal{J}_{s,q}^{\check{\varepsilon}_n}[u_n] > 0$, что противоречит неравенству (11).

2. Предположим обратное: пусть при $\varepsilon > 0$ существуют последовательность $\check{q}_n \downarrow 2$ и последовательность непостоянных функций $\{u_n : \|u_n\|_{L_{\check{q}_n}(\Omega)} = 1\}$, для которых

$$\mathcal{I}_{s,\check{q}_n}^\varepsilon[u_n] \leq \varepsilon^{2s}, \quad \text{а значит, } \langle (-\Delta)_{S_p}^s u_n, u_n \rangle \leq \varepsilon^{2s} \text{ и } \|u_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 1.$$

Как и в предыдущем пункте, u_n ограничены в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ и можно считать, что $u_n \rightharpoonup u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$. Зафиксируем некоторое $q \in (2, 2_s^*)$; в силу компактности вложения $\mathcal{H}^s(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ имеем $u_n \rightarrow u$ в $L_q(\Omega)$. Поскольку с некоторого места

$\check{q}_n < q$, в силу неравенства Гёльдера $\|u_n\|_{L_q(\Omega)} \geq \|u_n\|_{L_{\check{q}_n}(\Omega)}$, откуда следует, что

$$\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u_n] \leq \mathcal{I}_{s,\check{q}_n}^\varepsilon[u_n] \leq \varepsilon^{2s} = \mathcal{I}_{s,\check{q}_n}^\varepsilon[\mathbf{1}] = \mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[\mathbf{1}]. \quad (12)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (-\Delta)_{Sp}^s u_n, u_n \rangle &\leq \varepsilon^{2s} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_q(\Omega)}^2 - \varepsilon^{2s} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &= \varepsilon^{2s} (\|u\|_{L_q(\Omega)}^2 - \|u\|_{L_2(\Omega)}^2), \end{aligned}$$

и, переходя к пределу по $q \downarrow 2$ в правой части, получаем $\langle (-\Delta)_{Sp}^s u, u \rangle = 0$. Поэтому, как и в предыдущем пункте, $u_n \rightarrow u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, откуда следует, что $u = \mathbf{1}$. Выбирая q близким к 2, имеем $\varepsilon < \varepsilon_s(q)$, и в этом случае неравенство (12) противоречит неравенству (8).

3. Поскольку функция $\mathbf{1}$ не является минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_0}[u]$, существует непостоянная функция u , для которой $\mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_0}[u] < \varepsilon_0^{2s}$. Требуемое утверждение следует из неравенств Гёльдера:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_0}[u] &\leq \mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_0}[u] < \varepsilon_0^{2s} = \mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_0}[\mathbf{1}], \\ \mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u] &= \mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_0}[u] + (\varepsilon^{2s} - \varepsilon_0^{2s}) \frac{\|u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_q(\Omega)}^2} < \varepsilon_0^{2s} + (\varepsilon^{2s} - \varepsilon_0^{2s}) = \mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[\mathbf{1}]. \quad \square \end{aligned}$$

Благодаря теореме 2 для каждого $q \in (2, 2_s^*]$ можно определить показатель $\mathcal{E}_s(q)$: при $\varepsilon \leq \mathcal{E}_s(q)$ функция $\mathbf{1}$ дает глобальный минимум в $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$, а при $\varepsilon > \mathcal{E}_s(q)$ не дает. Очевидно, что $\varepsilon_s(q) \geq \mathcal{E}_s(q)$, а из теоремы 2 также следует, что $\mathcal{E}_s(q) > 0$, $\mathcal{E}_s(q)$ не возрастает и $\mathcal{E}_s(q) \rightarrow \infty$ при $q \downarrow 2$. Наконец, если $n = 1$ и $s \geq 1/2$, то $\mathcal{E}_s(q) \rightarrow 0$ при $q \rightarrow \infty$.

Теорема 3. *Функция $\mathcal{E}_s(q)$ непрерывна на $(2, 2_s^*]$ (на $(2, \infty)$ в случае $n = 1$ и $s \geq 1/2$) и строго убывает.*

Доказательство. Мы докажем утверждение теоремы для $s < n/2$. Для случая $n = 1$ и $s \geq 1/2$ доказательство проходит без изменений.

1. Сначала покажем, что $\mathcal{E}_s(q)$ строго убывает. Действительно, рассмотрим точку (q_0, ε_0) на кривой $\varepsilon = \mathcal{E}_s(q)$, $q_0 \in (2, 2_s^*)$. По построению для любых $\varepsilon_n \downarrow \varepsilon_0$ минимайзеры u_n функционалов $\mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_n}[u]$ непостоянны. Нормируем эти минимайзеры условием $\|u_n\|_{L_{q_0}(\Omega)} = 1$. Для них выполнены неравенства

$$\mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_n}[u_n] < \varepsilon_n^{2s}, \quad \text{а значит, } \langle (-\Delta)_{Sp}^s u_n, u_n \rangle < \varepsilon_n^{2s} \text{ и } \|u_n\|_{L_2(\Omega)} < 1. \quad (13)$$

Как и ранее, u_n ограничены в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, существует слабый предел $u_n \rightharpoonup u_0$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ и $u_n \rightarrow u_0$ в $L_{q_0}(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$. Из слабой полунепрерывности снизу нормы в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ вытекает, что

$$\mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_0}[u_0] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_n}[u_n] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{2s} = \varepsilon_0^{2s}.$$

Возможны два случая: $u_0 \neq \mathbf{1}$ и $u_0 = \mathbf{1}$.

Разберем первый случай: при $q > q_0$ имеем $\|u_0\|_{L_q(\Omega)} > \|u_0\|_{L_{q_0}(\Omega)} = 1$; поэтому

$$\mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_0}[u_0] < \mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_0}[u_0] \leq \varepsilon_0^{2s} = \mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_0}[\mathbf{1}].$$

Отсюда следует, что при $u_0 \neq \mathbf{1}$ и $q > q_0$ функция $\mathbf{1}$ не дает глобального минимума функционала $\mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_0}[u]$, поэтому $\mathcal{E}_s(q) < \varepsilon_0 = \mathcal{E}_s(q_0)$.

Покажем, что во втором случае невозможно неравенство $\varepsilon_0 < \varepsilon_s(q_0)$: при больших n имеем $\varepsilon_0 < \varepsilon_n < \varepsilon_s(q_0)$ и, согласно п. 2 теоремы 1, функция $\mathbf{1}$ является локальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_n}[u]$. Более того,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (-\Delta)_{S_p}^s u_n, u_n \rangle &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{2s} (\|u_n\|_{L_{q_0}(\Omega)}^2 - \|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2) \\ &= \varepsilon_0^{2s} (\|\mathbf{1}\|_{L_{q_0}(\Omega)}^2 - \|\mathbf{1}\|_{L_2(\Omega)}^2) = 0; \end{aligned}$$

поэтому $\langle (-\Delta)_{S_p}^s u, u \rangle = 0$ и $u_n \rightarrow \mathbf{1}$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$. Вместе с (13) это дает противоречие, как и при доказательстве п. 1 теоремы 2.

Поскольку $\varepsilon_0 = \mathcal{E}_s(q_0) \leq \varepsilon_s(q_0)$, остается единственная возможность $\varepsilon_0 = \varepsilon_s(q_0)$, и строгая монотонность следует из цепочки

$$\mathcal{E}_s(q) \leq \varepsilon_s(q) < \varepsilon_s(q_0) = \varepsilon_0 = \mathcal{E}_s(q_0).$$

2. В качестве второго шага покажем, что монотонная функция $\mathcal{E}_s(q)$ непрерывна слева. Для этого опять рассмотрим точку (q_0, ε_0) на кривой $\varepsilon = \mathcal{E}_s(q)$, $q_0 \in (2, 2_s^*]$: при $\varepsilon > \varepsilon_0$ функция $\mathbf{1}$ не является глобальным минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q_0}^\varepsilon[u]$. Поскольку L_q -норма непрерывно зависит от q , получаем, что для достаточно близких снизу к q_0 показателей q функция $\mathbf{1}$ также не является минимайзером функционала $\mathcal{I}_{s,q}^\varepsilon[u]$, что и дает непрерывность слева.

3. Остается показать непрерывность функции $\mathcal{E}_s(q)$ справа. Пусть $q_0 \in (2, 2_s^*)$ и $\varepsilon_0 = \lim_{q \downarrow q_0} \mathcal{E}_s(q)$. Ввиду монотонности функции $\mathcal{E}_s(q)$ для любых $q_n \downarrow q_0$ минимайзеры u_n функционалов $\mathcal{I}_{s,q_n}^{\varepsilon_0}[u]$ непостоянны. Как и ранее, нормируем их условием $\|u_n\|_{L_{q_n}(\Omega)} = 1$, и имеют место неравенства

$$\mathcal{I}_{s,q_n}^{\varepsilon_0}[u_n] < \varepsilon_0^{2s}, \quad \text{а значит, } \langle (-\Delta)_{S_p}^s u_n, u_n \rangle < \varepsilon_0^{2s} \text{ и } \|u_n\|_{L_2(\Omega)} \leq 1.$$

Повторим рассуждение из доказательства п. 2 теоремы 2: u_n ограничены в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ и существует слабый предел $u_n \rightharpoonup u_0$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$. При любом $q < 2_s^*$ имеем $u_n \rightarrow u_0$ в $L_q(\Omega)$, а из неравенства Гёльдера при $q_0 < q_n \leq q$ следует, что $\|u_n\|_{L_q(\Omega)} \geq \|u_n\|_{L_{q_n}(\Omega)} = 1$; поэтому

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta)_{S_p}^s u_0, u_0 \rangle &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (-\Delta)_{S_p}^s u_n, u_n \rangle \\ &\leq \varepsilon_0^{2s} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_q(\Omega)}^2 - \varepsilon_0^{2s} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &= \varepsilon_0^{2s} (\|u_0\|_{L_q(\Omega)}^2 - \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2), \end{aligned}$$

откуда предельным переходом по $q \downarrow q_0$ получаем $\mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_0}[u_0] \leq \varepsilon_0^{2s}$. Более того, поскольку

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{L_q(\Omega)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_q(\Omega)} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_{q_n}(\Omega)} = 1, \\ \|u_0\|_{L_{q_0}(\Omega)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_{q_0}(\Omega)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_{L_{q_n}(\Omega)} = 1, \end{aligned}$$

предельным переходом по $q \downarrow q_0$ получаем $\|u_0\|_{L_{q_0}(\Omega)} = 1$. Здесь, как и в доказательстве строгой монотонности функции $\mathcal{E}_s(q)$, возможны два случая: $u_0 \neq \mathbf{1}$ и $u_0 = \mathbf{1}$.

В первом случае при любом $\varepsilon > \varepsilon_0$ из оценки $\|u_0\|_{L_2(\Omega)} < \|u_0\|_{L_{q_0}(\Omega)} = 1$ получаем

$$\mathcal{I}_{s,q_0}^\varepsilon[u_0] = \mathcal{I}_{s,q_0}^{\varepsilon_0}[u_0] + (\varepsilon^{2s} - \varepsilon_0^{2s}) \frac{\|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u_0\|_{L_{q_0}(\Omega)}^2} < \varepsilon_0^{2s} + (\varepsilon^{2s} - \varepsilon_0^{2s}) = \mathcal{I}_{s,q_0}^\varepsilon[\mathbf{1}],$$

откуда следует, что $\varepsilon_0 \geq \mathcal{E}_s(q_0)$. Так как функция $\mathcal{E}_s(q)$ убывает, то $\varepsilon_0 \leq \mathcal{E}_s(q_0)$, а следовательно, $\varepsilon_0 = \mathcal{E}_s(q_0)$.

Во втором случае $u_n \rightarrow \mathbf{1}$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, а при $q > q_0$ из $\|u_n\|_{L_q(\Omega)} \geq \|u_n\|_{L_{q_n}(\Omega)}$ получаем

$$\mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_0}[u_n] \leq \mathcal{I}_{s,q_n}^{\varepsilon_0}[u_n] < \varepsilon_0^{2s} = \mathcal{I}_{s,q_n}^{\varepsilon_0}[\mathbf{1}] = \mathcal{I}_{s,q}^{\varepsilon_0}[\mathbf{1}],$$

откуда следует, что $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_s(q)$. Переходя к пределу по $q \downarrow q_0$, получаем $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_s(q_0) \geq \mathcal{E}_s(q_0)$, что, как и в первом случае, ввиду убывания функции $\mathcal{E}_s(q)$ дает $\varepsilon_0 = \mathcal{E}_s(q_0)$. \square

Замечание 6. В работе [7] было показано, что в случае $n = 1$ при $s \geq 1$ выполнено равенство $\varepsilon_s(q) = \mathcal{E}_s(q)$ для всех $q > 2$, а также была выдвинута гипотеза, что результат остается верным при $s \geq 1/2$. Эта гипотеза остается открытой, однако предложение 1 показывает, что при $s < 1/2$ равенство $\varepsilon_s(q) = \mathcal{E}_s(q)$ не выполняется при q , близких к 2_s^* снизу.

§ 3. Доказательство неравенства (10)

Доказательство. Напомним, что $n > 2s$, и перепишем неравенство (10) в виде

$$\mathcal{A}_n := \frac{2s\Gamma((n+2s)/2)}{\Gamma((n-2s+2)/2)} \left[\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \right]^{2s/n} < \pi^s. \quad (14)$$

Докажем, что $\mathcal{A}_{n+2} < \mathcal{A}_n$, т. е.

$$\frac{\mathcal{A}_{n+2}}{\mathcal{A}_n} = \frac{n+2s}{n-2s+2} \left[\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n/2)[2(n+1)]^{n/2}} \right]^{4s/(n(n+2))} < 1.$$

Возведением в степень получаем эквивалентное неравенство

$$\left[\frac{n+2s}{n-2s+2} \right]^{n(n+2)/(4s)} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n/2)[2(n+1)]^{n/2}} < 1. \quad (15)$$

Покажем, что функция $f(s) = \left[\frac{n+2s}{n-2s+2} \right]^{n(n+2)/(4s)}$ монотонно возрастает при $s \in [0, 1]$. Ее логарифмическая производная равна

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} \ln \left(\frac{n+2s}{n-2s+2} \right) \right] &= -\frac{1}{s^2} \ln \left(\frac{n+2s}{n-2s+2} \right) + \frac{2(n-2s+2)(2n+2)}{s(n+2s)(n-2s+2)^2} \\ &= \frac{1}{s} \left[\frac{4n+4}{(n+2s)(n-2s+2)} - \frac{1}{s} \ln \left(\frac{n+2s}{n-2s+2} \right) \right] \\ &\geq \frac{1}{s} \left[\frac{4n+4}{(n+2s)(n-2s+2)} - \frac{4s-2}{s(n-2s+2)} \right] \\ &= \frac{2}{s(n-2s+2)} \left[\frac{2n+2}{n+2s} - \frac{2s-1}{s} \right] \\ &= \frac{2n+8s-8s^2}{s^2(n-2s+2)(n+2s)} \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно доказать неравенство (15) при $s = 1$, т. е. неравенство

$$\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \left[2(n+1) \left(\frac{n}{n+2} \right)^{(n+2)/2} \right]^{n/2} > 1.$$

При $n = 1$ это неравенство очевидно. При $n \geq 2$ докажем более сильное неравенство

$$\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \left[2(n+1) \left(\frac{n}{n+2} \right)^{(n+2)/2} \right]^{n/2} \geq 1 + \frac{2}{n+2},$$

которое эквивалентно неравенству

$$\mathcal{B}_n := \frac{(n+2)\Gamma(n/2)}{(n+4)\Gamma(n)} \left[2(n+1) \left(\frac{n}{n+2} \right)^{(n+2)/2} \right]^{n/2} \geq 1. \quad (16)$$

Прямые вычисления показывают, что $\mathcal{B}_2 = 1$ и $\mathcal{B}_3 \geq 1,05$. Подсчитаем отношение $\mathcal{B}_{n+2}/\mathcal{B}_n$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{B}_{n+2}}{\mathcal{B}_n} &= \frac{(n+4)^2}{2(n+1)(n+2)(n+6)} \left[2(n+3) \left(\frac{n+2}{n+4} \right)^{(n+4)/2} \right]^{(n+2)/2} \\ &\quad \times \left[2(n+1) \left(\frac{n}{n+2} \right)^{(n+2)/2} \right]^{-n/2} \\ &= \frac{(n+4)^2}{(n+2)(n+6)} \left[\frac{(n+3)(n+2)^2}{(n+1)(n+4)^2} \left(\frac{(n+2)^2}{n^2+4n} \right)^{n/2} \right]^{(n+2)/2} =: g(n). \end{aligned}$$

Покажем, что функция $g(x)$ монотонно убывает при $x \geq 2$. Ее логарифмическая производная равна

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &:= \frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{(x+4)^2}{(x+2)(x+6)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{x+2}{2} \left[\ln \left(\frac{x+3}{x+1} \right) - 2 \ln \left(\frac{x+4}{x+2} \right) + \frac{x}{2} \ln \left(\frac{(x+2)^2}{x^2+4x} \right) \right] \right] \\ &= -\frac{8}{(x+2)(x+4)(x+6)} + \frac{1}{2} \left[\ln \left(1 + \frac{2}{(x+1)(x+4)} \right) - \ln \left(1 + \frac{2}{x+2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{x+1}{2} \ln \left(1 + \frac{4}{x^2+4x} \right) - \frac{x+2}{(x+1)(x+3)}. \end{aligned}$$

Поскольку при $t \in (0, 1)$ выполнены оценки

$$t > t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} > \ln(1+t) > t - \frac{t^2}{2},$$

при $x \geq 2$ имеем (положим $y := x - 2$)

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\leq -\frac{8}{(x+2)(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+1)(x+4)} - \frac{x+1}{(x+2)^2} \\ &\quad + \frac{x+1}{2} \left(\frac{4}{x^2+4x} - \frac{8}{(x^2+4x)^2} + \frac{64}{3(x^2+4x)^3} \right) - \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} \\ &= -\frac{18x^8 + 219x^7 + 910x^6 + 1236x^5 - 968x^4 - 4080x^3 - 5024x^2 - 4608x - 2304}{3x^3(x+1)(x+2)^2(x+3)(x+4)^3(x+6)} \\ &= -\frac{18y^8 + 507y^7 + 5992y^6 + 38616y^5 + 147472y^4 + 338112y^3 + 443968y^2 + 285504y + 50688}{3(y+5)^3(y+6)(y+7)^2(y+8)(y+9)^3(y+10)} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Бернулли $(1+t)^m \geq 1+mt$ при $t > -1$, получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{(n+2)^2}{n^2+4n} \right)^{n/2} &= \left(1 + \frac{4}{n^2+4n} \right)^{n/2} \geq \frac{n+6}{n+4}, \\ \left[\frac{(n+3)(n+2)^2(n+6)}{(n+1)(n+4)^3} \right]^{(n+2)/2} &= \left[1 - \frac{2(n^2+2n-4)}{(n+1)(n+4)^3} \right]^{(n+2)/2} \\ &\geq 1 - \frac{(n^2+2n-4)(n+2)}{(n+1)(n+4)^3}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^2}{(n+2)(n+6)} \left[\frac{(n+3)(n+2)^2(n+6)}{(n+1)(n+4)^3} \right]^{(n+2)/2} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{(n^2+2n-4)(n+2)}{(n+1)(n+4)^3} \right] = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $g(n)$ монотонно убывает к единице и потому $g(n) > 1$. Это доказывает неравенство (16), из которого следует неравенство (15), а следовательно, $\mathcal{A}_{n+2} < \mathcal{A}_n$.

Для завершения доказательства остается показать, что неравенство (14) справедливо при $n \leq 3$ (в случае $n = 1$ есть дополнительное ограничение $2s < 1$, поэтому его для $n = 3$ и $2s \geq 1$ нужно проверять отдельно). При $n = 1$ неравенство (14) принимает вид (поскольку $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$)

$$\frac{2s\Gamma((1+2s)/2)}{\Gamma((3-2s)/2)} < 1.$$

Справедливость этого неравенства следует из оценки $\Gamma((3+2s)/2) \leq \Gamma(2) \leq \Gamma((5-2s)/2)$:

$$\frac{2s\Gamma((1+2s)/2)}{\Gamma((3-2s)/2)} = \frac{2s(3-2s)\Gamma((3+2s)/2)}{(1+2s)\Gamma((5-2s)/2)} = \left(1 - \frac{(1-2s)^2}{1+2s}\right) \frac{\Gamma((3+2s)/2)}{\Gamma((5-2s)/2)} < 1.$$

При $n = 2$ неравенство (14) записывается в виде

$$\frac{2s\Gamma(1+s)}{\Gamma(2-s)} < \pi^s.$$

Используя формулу дополнения Эйлера $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ при нецелых z , получаем

$$2\Gamma^2(1+s) \sin(\pi s) < \pi^{1+s}(1-s),$$

и это неравенство следует из двух цепочек неравенств (поскольку $\Gamma(1+s) \leq 1$):

$$2\Gamma^2(1+s) \sin(\pi s) < 2 < \pi^{1+s}(1-s) \quad \text{при } s \in (0, 0,7],$$

$$2\Gamma^2(1+s) \sin(\pi s) < 2 \sin(\pi(1-s)) < 2\pi(1-s) < \pi^{1+s}(1-s) \quad \text{при } s \in [0,7, 1).$$

При $n = 3$ неравенство (14) записывается в виде

$$\frac{2s\Gamma((3+2s)/2)}{\Gamma((5-2s)/2)} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{4} \right]^{2s/3} < \pi^s,$$

или, после избавления от знаменателя,

$$2s\Gamma((3+2s)/2) < (4\pi)^{2s/3}\Gamma((5-2s)/2).$$

Справедливость этого неравенства следует из цепочки оценок

$$\begin{aligned} 2s\Gamma((3+2s)/2) &< 2s\Gamma(5/2) = 3s\Gamma(3/2) \\ &< (4\pi)^{2s/3}\Gamma(3/2) < (4\pi)^{2s/3}\Gamma((5-2s)/2). \end{aligned} \quad \square$$

Автор благодарит А. И. Назарова за постановку задачи и ценные обсуждения результатов, а также А. П. Щеглову за полезные замечания, позволившие улучшить текст работы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Cotsiolis, N. K. Tavoularis, *Best constants for Sobolev inequalities for higher order fractional derivatives*, J. Math. Anal. Appl., **295**:1 (2004), 225–236.
- [2] R. Musina, A. I. Nazarov, *On fractional Laplacians*, Comm. Partial Differential Equations, **39**:9 (2014), 1780–1790.
- [3] R. Musina, A. I. Nazarov, *On the Sobolev and Hardy constants for the fractional Navier Laplacian*, Nonlinear Anal.: Theory Methods Appl., **121** (2015), 123–129.
- [4] A. L. Pereira, M. C. Pereira, *A generic property for the eigenfunctions of the Laplacian*, Topol. Methods Nonlinear. Anal., **20**:2 (2002), 283–313.
- [5] В. П. Ильин, *Некоторые интегральные неравенства и их применения в теории дифференцируемых функций многих переменных*, Матем. сб., **54(96)**:3 (1961), 331–380.
- [6] А. И. Назаров, *О точной константе в одномерной теореме вложения*, Проблемы мат. анализа, т. 19, Научн. кн., Новосибирск, 1999, 149–163.
- [7] А. И. Назаров, *О точных константах в одномерных теоремах вложения произвольного порядка*, в кн.: *Вопросы современной теории аппроксимации*, Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2004, 146–158.
- [8] А. И. Назаров, А. П. Щеглова, *О некоторых свойствах экстремали в вариационной задаче, порожденной теоремой вложения Соболева*, Проблемы мат. анализа, т. 27, Т. Рожковская, Новосибирск, 2004, 109–136.
- [9] Л. Н. Слободецкий, *Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных*, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, **197** (1958), 54–112.
- [10] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.
- [11] Н. С. Устинов, *О разрешимости полуминейной задачи со спектральным дробным лапласианом Неймана и критической правой частью*, Алгебра и анализ (в печати).
- [12] А. П. Щеглова, *Задача Неймана для полуминейного эллиптического уравнения в тонком цилиндре. Решения с наименьшей энергией*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **348** (2007), 272–302.

Н. С. Устинов

Санкт-Петербургский государственный университет,

Санкт-Петербург, Россия

E-mail: ustinns@yandex.ru

Поступила в редакцию

12 августа 2020 г.

После доработки

12 августа 2020 г.

Принята к публикации

23 августа 2020 г.