Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга,
УМН, 1979, том 34, выпуск 5, 13–63

https://www.mathnet.ru/rm4115

1979 г. сентябрь—октябрь *т. 34, вып. 5(209)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

КВАНТОВЫЙ МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ И XYZ МОДЕЛЬ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В настоящем обзоре мы рассматриваем задачу о диагонализации гамильтониана Гейзенберга H системы N взаимодействующих частиц со спином 1/2. Этот оператор действует в гильбертовом пространстве состояний $\mathfrak{H}_N$

$$\mathfrak{H}_N = \prod_{n=1}^{N} \otimes \mathfrak{h}_n, \qquad \mathfrak{h}_n = \mathbb{C}^2 \tag{1}$$

и выглядит следующим образом:

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} (J_x\sigma_n^1\sigma_{n+1}^1 + J_y\sigma_n^2\sigma_{n+1}^2 + J_z\sigma_n^3\sigma_{n+1}^3) \tag{2}$$

Здесь J_x, J_y, J_z — вещественные константы; спиновые операторы σ_n^j имеют вид

$$\sigma_n^j = I \otimes \ldots \otimes \underbrace{\sigma^j}_{n} \otimes \ldots \otimes I \qquad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ n=1,\ \ldots,\ N), \tag{3}$$

где σ^j — операторы Паули, которые в ортонормированном базисе пространства $\mathbb{C}^2$

$$e_+ = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad e_- = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{4}$$

выглядят следующим образом:

$$(5)\qquad \sigma^1=\sigma^x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma^2=\sigma^y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \sigma^3=\sigma^z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

а $\sigma^4 = I$ — единичный оператор в пространстве $\mathbb{C}^2$. В формуле (3) подразумевается, что n-м сомножителем в тензорном произведении является оператор σ^j, а остальные сомножители — единичные операторы, так что σ_n^j нетривиально действует только в пространстве $\mathfrak{h}_n$. Мы считаем также, что

$$(6)\qquad \sigma_{N+1}^j=\sigma_1^1 \qquad (j=1,\ 2,\ 3),$$

т. е. имеют место периодические граничные условия. Введенный таким образом оператор энергии H представляет собой матрицу порядка $2^N \times 2^N$.

Описанная квантовомеханическая модель магнетика была предложена Вернером Гейзенбергом в 1928 г. [1] и активно исследовалась многими учеными, начиная с Ганса Бете. В настоящее время в литературе по математической физике она получила жаргонное название XYZ модель, которое используется в ситуации общего положения $J_x \neq J_y \neq J_z$. Частные случаи $J_x = J_y \neq J_z$ и $J_x = J_y = J_z = J$ называются XXZ и XXX моделями соответственно.

Введенная Гейзенбергом модель оказалась весьма плодотворной в теории магнетизма, и ей посвящена обширная физическая литература. В последнее время она привлекла внимание и специалистов по математической физике, так как оказалось, что проблема нахождения собственных значений и собственных векторов оператора H решается в некотором смысле точно и требует красивых математических построений.

Первый шаг на пути к решению этой проблемы был сделан Бете в 1931 г. [2], где он рассмотрел полностью изотропный случай — XXX модель и нашел собственные значения и собственные векторы ее гамильтониана. Точное решение Бете считается одним из основных результатов в теории спиновых моделей, а предложенный им метод — знаменитый анзатц (подстановка) Бете — с успехом применялся к другим многочастичным моделям в одномерной математической физике (термин Э. Либа и Д. Маттиса, см. [3]).

Физический интерес представляет изучение асимптотических свойств модели при $N \to \infty$ и, в особенности, основного состояния — состояния с наименьшей энергией и состояний с энергией, близкой к наименьшей,— возбуждений. Случай $J > 0$ в XXX модели соответствует ферромагнетикам. В этом случае основное состояние устроено очень просто, а возбуждения находятся с помощью анзатца Бете. При $J < 0$ мы имеем дело с антиферромагнетиками. Основное состояние для этого случая построил в 1938 г. Л. Хюльтен [4], который исходил из формул Бете и вычислил асимптотику энергии основного состояния при $N \to \infty$. Спустя 24 года Ж. де Клуазо и Дж. Пирсон в [5] построили возбуждения над антиферромагнитным основным состоянием и нашли асимптотическое выражение для их энергии. Обобщение метода Бете на случай XXZ модели не представляет принципиальных трудностей. Ц. Н. Янг и Ц. П. Янг в [6] — [8] 1966 г. показали, что анзатц Бете в его классической формулировке применим и к этой модели.

Работы [6] — [8] содержали подробное исследование вопросов, возникающих при оправдании предельных переходов при $N \to \infty$ в методе Бете — Хюльтена, и подняли эту проблематику на более высокий математический уровень. В то же время выяснилось, что решение полностью анизотропной XYZ модели требует, по всей видимости, новых технических идей, и вопрос о ее разрешимости оставался открытым вплоть до 1972 г.

В 1972 г. Родни Бакстер в своих знаменитых работах [9] — [10] (результаты были анонсированы им в 1971 г. в [11] — [12]) дал решение XYZ модели.

Он обнаружил связь квантовой XYZ модели с одной задачей двумерной классической статистической физики — так называемой восьмивершинной моделью (точное ее определение будет дано в основном тексте), исследование которой на самом деле и было его основной целью. В своей работе Бакстер использовал идеи Крамерса — Ванье [13] и в особенности Онзагера [14] о трансфер-матрице и решение Либа [15] — [18] частного случая восьмивершинной модели — так называемой шестивершинной модели, связанной с с квантовой XXZ моделью. В [9] — [10] он получил систему трансцендентных уравнений, обобщающую такую систему из метода Бете, и с ее помощью вычислил энергию основного состояния XYZ модели. В последующей серии работ [19] — [21] Бакстер с помощью очень сложного и нетривиального обобщения анзатца Бете сумел построить собственные векторы и найти собственные значения трансфер-матрицы и тем самым полностью решить XYZ модель Гейзенберга. В 1973 г. Д. Джонсон, С. Крински и Б. Маккой [22], используя результаты Бакстера, вычислили энергию возбуждений XYZ модели.

Хотя работы Бакстера по праву считаются одним из важнейших достижений статистической физики со времени знаменитой работы Ларса Онзагера [14], считанное число специалистов понимает его метод. Многие использовали только полученные им ответы, в то время как сам метод оставался совершенно без внимания. Это обстоятельство отчасти объясняется необычайной сложностью его работ, массой остроумных искусственных приемов, основанных на глубокой технической интуиции.

Наше знакомство с работами Бакстера произошло следующим образом. При разборе работы А. Лютера [23], в которой результаты Бакстера и работы [22] применялись для исследования спектра квантовой модели Sine — Gordon, мы увидели, что ряд формул Бакстера напоминает хорошо знакомые нам формулы из метода обратной задачи. Это, так же как и многие другие соображения, привели нас вместе с Е. К. Скляниным к созданию квантового варианта метода обратной задачи (см. обзор [24]), который был применен нами к полному решению квантовой теоретико-полевой модели Sine—Gordon [25]. Как будет ясно из основного текста, одна из формул Бакстера играла в этом большую роль, поэтому для нас было только естественно вернуться к XYZ модели и исследовать ее с помощью метода обратной задачи. Полученные на этом пути результаты и составили содержание настоящего обзора. Нам кажется, что метод обратной задачи позволяет упростить и алгебраизовать формулы Бакстера и дать их полное доказательство.

Мы пришли к выводу, что метод обратной задачи естественно объединяет основные достижения одномерной математической физики — идеи Крамерса — Ванье, Онзагера и Бакстера и анзатц Бете — и приводит к естественному понятию квантовых вполне интегрируемых систем.

Метод обратной задачи решения классических нелинейных уравнений, начатый в 1967 г. пионерской работой М. Крускала и других [26], получил дальнейшее развитие в работах [27] — [37] и в настоящее время привлекает внимание большого числа специалистов по математической физике (см. обзоры [38] — [41] и [42], а также подробную библиографию там). Очень кратко его основные положения состоят в следующем.

С нелинейным эволюционным уравнением связывается вспомогательная спектральная задача, данные Коши входят в нее как коэффициенты. Спектральные характеристики задачи (элементы матрицы монодромии) являются сложными функциями данных Коши. Однако, и в этом состоит удача метода, гамильтониан системы и скобки Пуассона можно явно выразить через спектральные характеристики. При этом уравнения движения в терминах спектральных характеристик становятся линейными. Таким образом, переход от данных Коши к новым переменным — спектральным характеристикам — является преобразованием к переменным действие-угол [29]. В квантовом варианте метода обратной задачи ([24] — [25], [43] — [44]) коэффициенты вспомогательной спектральной задачи строятся по принципу соответствия и выражаются через шрёдингеровские канонические операторы. Элементами матрицы монодромии являются теперь операторы в гильбертовом пространстве состояний квантовой системы, и через них выражается квантовый гамильтониан. В пространстве состояний существует специальный вектор, такой, что все собственные векторы гамильтониана порождаются из него при помощи элементов матрицы монодромии. Существование порождающего вектора и простые коммутационные соотношения для элементов матрицы монодромии показывают, что последние являются квантовыми аналогами переменных типа действие-угол. В основном тексте эти общие положения будут подробно проиллюстрированы на примерах XXZ и общей XYZ моделей.

Скажем теперь несколько слов о содержании работы. В первом параграфе мы приведем классические результаты о трансфер-матрицах двумерных решетчатых моделей, восходящие к Крамерсу — Ванье — Онзагеру. Там же мы получим параметризацию Бакстера для больцмановских весов и прокомментируем возникающие при этом формулы. В § 2 мы покажем, как построения предыдущего параграфа естественным образом вкладываются в квантовый метод обратной задачи, и выведем формулу, связывающую гамильтониан XYZ модели с трансфер-матрицей восьмивершинной модели. Третий параграф будет посвящен решению частного случая восьмивершинной модели — шестивершинной модели и связанной с ней квантовой XXZ модели. На этом относительно простом примере мы объясним появление порождающего вектора и алгебраизацию анзатца Бете. В § 4 мы построим семейство состояний, обобщающих порождающий вектор из § 3 на случай восьмивершинной модели. Там же мы получим серию перестановочных соотношений для операторных элементов матрицы монодромии. В пятом параграфе, используя семейство порождающих векторов и перестановочные соотношения, мы построим алгебраическое обобщение анзатца Бете для нахождения собственных значений и собственных векторов трансфер-матрицы восьмивершинной модели. В § 6 мы вычислим энергию основного состояния XYZ модели. Этот параграф также может служить введением в метод интегральных уравнений в теории спиновых систем, впервые предложенный Хюльтеном в [4]. В заключении мы кратко подведем итоги и сформулируем интересные математические задачи, возникшие в связи с нашим изложением. В приложении I мы дадим сводку определений и формул из теории эллиптических функций и тэта-функций Якоби. Приложение II будет посвящено геометрической интерпретации соотношений Бакстера — Янга из § 1. Эта интерпретация недавно была дана И. В. Чередником [45].

В нашем изложении мы следуем традиции в современной математической физике и обращаем основное внимание на алгебраические аспекты рассматриваемой проблемы, поэтому наши рассуждения зачастую носят формальный характер, особенно в вопросах сходимости рядов, асимптотических оценок и тому подобных. Полное освещение этих вопросов увело бы нас слишком далеко от основной задачи — донести до читателя-математика красивые структуры, возникшие в теоретической физике.

Мы выражаем благодарность П. П. Кулишу и Е. К. Склянину за полезные обсуждения и замечания и А. Г. Рейману за обсуждение результатов работы [45]. Нам также хотелось бы выразить свое уважение и признательность Родни Дж. Бакстеру, чтение работ которого поистине доставило нам эстетическое наслаждение.

Настоящую статью авторы посвящают академику Н. Н. Боголюбову в связи с его семидесятилетием.

§ 1. Классическая статистическая физика на двумерной решетке и квантовая механика на цепочке

Рассмотрим квадратную решетку порядка $M \times N$ на двумерном торе, т. е. плоскую решетку с $M+1$ строками и $N+1$ столбцами, в которой крайние строки и столбцы отождествлены. Придадим каждому ребру решетки, т. е. вертикальному или горизонтальному отрезку, соединяющему соседние узлы, определенное направление — стрелку.

В каждом узле решетки сходятся четыре ребра, и мы тем самым имеем в узле шестнадцать различных типов комбинаций стрелок. Припишем каждой возможной комбинации положительное число ε_j ($j = 1, \ldots, 16$), не зависящее от номера узла (энергия комбинации). Данному расположению стрелок на решетке-конфигурации сопоставим полную энергию, определяемую как сумму энергий узлов

$$E = \sum_{j=1}^{16} N_j \varepsilon_j, \tag{1.1}$$

где N_j — число узлов с комбинацией стрелок типа j в данной конфигурации. В результате мы получили модель взаимодействующих стрелок, расположенных на ребрах решетки.

При альтернативном определении вместо стрелок используют спиновую переменную σ, принимающую два значения ± 1. Стрелкам, направленным вправо или вверх, соответствует $+1$, а стрелкам, направленным влево или вниз, -1. Тем самым каждой комбинации стрелок в узле соответствуют четыре величины α, α', γ, γ', принимающие значения ± 1 (рис. 1). Переменные α, α' отвечают вертикальным ребрам, а γ, γ' — горизонтальным.

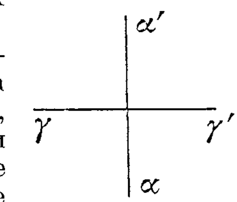


Рис. 1.

Описанная модель называется общей *шестнадцативершинной моделью* и играет большую роль в классической статистической физике. С ней также связаны интересные комбинаторные задачи (см. [46]).

Статистической суммой называется величина

$$Z = \sum \exp\{-\beta E\}, \tag{1.2}$$

где суммирование производится по всем конфигурациям стрелок на решетке, а E — полная энергия конфигурации, определяемая формулой (1.1). Статистическая сумма, как функция параметров β, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{16}$, определяет все термодинамические свойства модели. Параметр β есть величина, обратно пропорциональная температуре, а числа $v_j = \exp\{-\beta\varepsilon_j\}$ ($j = 1, \ldots, 16$) называются *больцмановскими весами*.

Задача о нахождении точного выражения для статистической суммы модели на конечной решетке является очень сложной. К счастью, физический интерес представляет более простая задача о нахождении асимптотики величины Z при больших M и N, а точнее — вычисление так называемого термодинамического предела

$$-\beta f = \lim_{M,\, N\to\infty} \frac{1}{MN} \ln Z. \tag{1.3}$$

Величина f называется *удельной свободной энергией.*

Для дальнейшего изучения статистической суммы Z оказывается полезным переписать формулу (1.2) в более удобном виде. Обозначим через $R_{\alpha}^{\alpha'}(\gamma, \gamma')$ больцмановский вес для комбинации стрелок на рис. 1. Посредством $\{\alpha^j\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$ обозначим произвольную конфигурацию вертикальных стрелок между соседними строками решетки с номерами j и $j+1$. Отметим, что в силу периодических условий $\{\alpha^{M+1}\} = \{\alpha^1\}$.

Преобразуем теперь сумму (1.2), сделав внешним суммирование по вертикальным конфигурациям, а внутренним — суммирование по горизонтальным конфигурациям. В результате мы получим выражение

$$(1.4)\qquad Z=\sum_{\{\alpha^1\}}\cdots\sum_{\{\alpha^M\}} T_{\{\alpha^1\},\{\alpha^2\}}\cdots T_{\{\alpha^M\},\{\alpha^1\}}=\operatorname{Sp} T^M,$$

где T — оператор в пространстве $\mathfrak{H}_N=\mathbb{C}^{2^N}$. В ортонормированном базисе

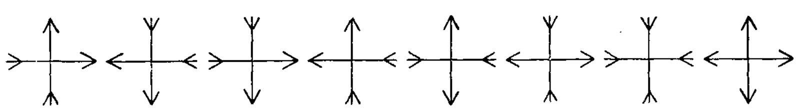
$$(1.5)\qquad f_{\{\alpha\}}=e_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes e_{\alpha_N},$$

его матричные элементы нумеруются мультииндексами $\{\alpha\}$, $\{\alpha'\}$ и имеют вид

$$(1.6)\qquad T_{\{\alpha\},\{\alpha'\}}=\sum_{\gamma_1}\cdots\sum_{\gamma_N}\prod_{n=1}^{N} R_{\alpha_n}^{\alpha_n'}(\gamma_n,\gamma_{n+1}),$$

причем подразумевается, что $\gamma_{N+1}=\gamma_1$; Sp в формуле (1.4) означает след в $\mathfrak{H}_N$.

Оператор T называется трансфер-матрицей нашей модели. Таким образом, трансфер-матрица является оператором в пространстве $\mathfrak{H}_N$ — пространстве состояний квантовой системы N спинов. В выражении $R_\alpha^{\alpha'}(\gamma,\gamma')$ индексы α, α' и γ, γ' играют разную роль. Первые естественно называть



1 2 3 4 5 6 7 8

Рис. 2.

«квантовыми» индексами, а вторые — «вспомогательными». Рассматривая последние как матричные индексы матрицы $R_\alpha^{\alpha'}$ порядка 2×2, нумерующие ее строки и столбцы, перепишем (1.6) в виде

$$(1.7)\qquad T_{\{\alpha\},\{\alpha'\}}=\operatorname{tr}(R_{\alpha_1}^{\alpha_1'}\cdots R_{\alpha_N}^{\alpha_N'})=\operatorname{tr}(R_{\alpha_N}^{\alpha_N'}\cdots R_{\alpha_1}^{\alpha_1'}),$$

где tr означает след во вспомогательном пространстве $\mathbb{C}^2$.

Соотношения (1.4) — (1.7) и устанавливают связь задач квантовой механики на одномерных цепочках и задач классической статистической физики на двумерных решетках. Действительно, с их помощью мы свели задачу о вычислении статистической суммы (1.2) к задаче квантовой механики — нахождению собственных значений трансфер-матрицы T — оператора в пространстве $\mathfrak{H}_N$. Для более простой задачи — вычисления свободной энергии — достаточно знать асимптотику при $N\to\infty$ наибольшего по абсолютной величине собственного значения $\Lambda_{\max}(N)$ трансфер-матрицы T. Очевидно, что если предел (1.3) существует и не зависит от порядка предельных переходов по M и N, то

$$(1.8)\qquad -\beta f=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\ln|\Lambda_{\max}(N)|.$$

Основной результат Бакстера [9], который мы воспроизведем в § 6, состоит в вычислении величины f для важного частного случая рассматриваемой системы — так называемой восьмивершинной модели, к описанию которой мы и переходим.

Будем рассматривать лишь те конфигурации стрелок, для которых число входящих стрелок в каждый узел решетки является четным. Восемь допустимых комбинаций приведены на рис. 2. Возникающая модель взаимодействующих стрелок и называется восьмивершинной. В выражении (1.2) для статистической суммы суммирование теперь ведется только по таким конфигурациям стрелок.

Другими словами, для восьмивершинной модели больцмановские веса v_j при $j = 9, \ldots, 16$ равны нулю, т. е. $\varepsilon_j = \infty$ ($j = 9, \ldots, 16$) (считаем, что $\beta > 0$).

Мы предположим еще, что взаимодействие инвариантно по отношению к одновременному обращению направлений всех стрелок на решетке. Это означает, что

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2, \ \varepsilon_3 = \varepsilon_4, \ \varepsilon_5 = \varepsilon_6, \ \varepsilon_7 = \varepsilon_8,$$

т. е.

$$v_1 = v_2, \ v_3 = v_4, \ v_5 = v_6, \ v_7 = v_8.$$

Именно для такой модели Бакстер вычислил свободную энергию и построил обобщение анзатца Бете для нахождения собственных значений и собственных векторов ее трансфер-матрицы. В настоящем обзоре мы будем рассматривать только эту модель.

Введем коэффициенты

$$(1.9) \qquad \begin{cases} w_1 = \frac{1}{2}(v_5 + v_7), & w_2 = \frac{1}{2}(v_5 - v_7), \\ w_3 = \frac{1}{2}(v_1 - v_3), & w_4 = \frac{1}{2}(v_1 + v_3), \end{cases}$$

через которые больцмановский вес $R_\alpha^{\alpha'}(\gamma, \gamma')$, соответствующий комбинации на рис. 1, записывается следующим образом:

$$(1.10) \qquad R_\alpha^{\alpha'}(\gamma, \gamma') = \sum_{j=1}^{4} w_j \sigma_{\gamma\gamma'}^{j} \sigma_{\alpha\alpha'}^{j}.$$

Здесь мы используем операторы Паули σ^j ($j = 1, 2, 3, 4$), определенные во введении, причем $\sigma_{\gamma\gamma'}^{j}$ и $\sigma_{\alpha\alpha'}^{j}$ означают их матричные элементы в базисе (4).

Для записи формулы (1.7) в инвариантном виде удобно ввести операторные матрицы $\mathscr{L}_n$ порядка 2×2, определяемые соотношением

$$(1.11) \qquad \mathscr{L}_n = \sum_{j=1}^{4} w_j \sigma^j \otimes \sigma_n^j = \begin{pmatrix} w_4\sigma_n^4 + w_3\sigma_n^3 & w_1\sigma_n^1 - iw_2\sigma_n^2 \\ w_1\sigma_n^1 + iw_2\sigma_n^2 & w_4\sigma_n^4 - w_3\sigma_n^3 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\mathscr{L}_n$ являются матрицами порядка 2×2 над кольцом $\mathfrak{B}_N$ операторов в пространстве $\mathfrak{H}_N$. Произведение матриц $\mathscr{L}_n$ и след tr понимаются как операции в алгебре матриц над кольцом $\mathfrak{B}_N$.

Сравнивая формулы (1.7), (1.10) и (1.11), убеждаемся, что трансфер-матрицу T можно записать в виде

$$(1.12) \qquad T_N = \mathrm{tr}(\mathscr{L}_N \ldots \mathscr{L}_1).$$

Наряду с трансфер-матрицей T_N естественно рассматривать матрицу монодромии $\mathscr{T}_N$

$$(1.13) \qquad \mathscr{T}_N = \mathscr{L}_N \ldots \mathscr{L}_1 = \prod_{n=1}^{\overleftarrow{N}} \mathscr{L}_n,$$

которая является матрицей порядка 2×2 над кольцом $\mathfrak{B}_N$. Формула (1.12) принимает вид

$$(1.14) \qquad T_N = \mathrm{tr}\, \mathscr{T}_N.$$

Индекс N, подчеркивающий, что введенные объекты действуют в пространстве $\mathfrak{H}_N = \mathbb{C}^{2^N}$, мы часто будем опускать.

Больцмановские веса v_j, участвующие в определении статистической суммы (1.2), являются положительными вещественными числами. Их можно считать определенными с точностью до общего множителя, так как такой множитель тривиальным образом изменяет статистическую сумму. Поскольку в дальнейшем наши рассуждения будут носить алгебраический характер, будем считать веса v_j комплексными числами. Таким образом, мы рассматриваем набор коэффициентов w_j как точку в трехмерном проективном пространстве над полем комплексных чисел.

Опыт точно решаемых двумерных решетчатых моделей, таких как модель Изинга, решенная Онзагером, и шестивершинная модель, решенная Либом, подсказывает, что весьма плодотворным является нахождение условий, при которых трансфер-матрицы с разными значениями коэффициентов w_j будут коммутировать. Исследуем, при каких условиях на коэффициенты w_j это возможно.

Рассмотрим два набора коэффициентов w_j и w_j', и пусть $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ — соответствующие матрицы монодромии. Отвечающие им трансфер-матрицы T и T' будут коммутировать, если найдется невырожденная числовая матрица $\mathcal{R}$ порядка 4×4 такая, что

$$\mathcal{R}(\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}') = (\mathcal{T}' \otimes \mathcal{T})\mathcal{R}. \tag{1.15}$$

Тензорное (кронекеровское) произведение в (1.15) понимается как тензорное произведение в матричной алгебре над кольцом $\mathfrak{B}_N$. Для двух матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ порядка 2×2 над произвольным кольцом их тензорное произведение $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ есть матрица порядка 4×4 с блоками

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \begin{pmatrix} A_{11}\mathcal{B} & A_{12}\mathcal{B} \\ A_{21}\mathcal{B} & A_{22}\mathcal{B} \end{pmatrix},$$

где A_{ik} — матричные элементы матрицы $\mathcal{A}$ $(i, k = 1, 2)$. Это определение уже неявно использовалось в формуле (1.11).

Из соотношения (1.15) следует, что

$$[T, T'] = 0. \tag{1.16}$$

Для этого нужно умножить обе части равенства (1.15) слева на $\mathcal{R}^{-1}$ и от получившихся матриц порядка 4×4 над кольцом $\mathfrak{B}_N$ взять след tr.

Формула (1.15) справедлива, если аналогичное соотношение выполняется для матриц $\mathcal{L}_n$

$$\mathcal{R}(\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_n') = (\mathcal{L}_n' \otimes \mathcal{L}_n)\mathcal{R}. \tag{1.17}$$

Действительно, для матриц $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$ над коммутативным кольцом имеет место формула

$$\prod_{n=1}^{\overset{\curvearrowleft}{N}} (\mathcal{A}_n \otimes \mathcal{B}_n) = \prod_{n=1}^{\overset{\curvearrowleft}{N}} \mathcal{A}_n \otimes \prod_{n=1}^{\overset{\curvearrowleft}{N}} \mathcal{B}_n. \tag{1.18}$$

Она же верна и для матриц $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{L}_n'$, поскольку из определения (1.11) следует, что матричные элементы матриц $\mathcal{L}_n$ коммутируют друг с другом при различных значениях индекса n.

Найдем теперь условия, при которых имеет место локальная формула (1.17). Не умаляя общности, будем искать числовую матрицу $\mathcal{R}$ порядка 4×4 в виде

$$\mathcal{R} = \Big(\sum_{j=1}^{4} w_j''\sigma^j \otimes \sigma^j\Big) J, \quad J = \sum_{j=1}^{4} \sigma^j \otimes \sigma^j. \tag{1.19}$$

Подставим (1.19) в равенство (1.17) и используем формулу умножения для операторов Паули

$$\sigma^j\sigma^k = i\varepsilon_{jkl}\sigma^l + \delta_{jk}\sigma^4, \tag{1.20}$$

где ε_{jkl} — полностью антисимметрический тензор, $\varepsilon_{123} = 1$. Мы получим, что для справедливости соотношения (1.17) необходимо и достаточно, чтобы при всех перестановках (j, k, l, n) чисел (1, 2, 3, 4) имело место соотношение

$$w_n w'_l w''_j - w_l w'_n w''_k + w_k w'_j w''_l - w_j w'_k w''_n = 0. \tag{1.21}$$

В формулах (1.21) содержатся шесть независимых уравнений. Рассматривая их как систему линейных однородных уравнений для определения четырех неизвестных w''_1, w''_2, w''_3, w''_4, получим, что эта система разрешима, если при всех допустимых значениях чисел j, k, l, n выполняются соотношения

$$\frac{w_j^2 - w_k^2}{w_l^2 - w_n^2} = \frac{w_j'^2 - w_k'^2}{w_l'^2 - w_n'^2}. \tag{1.22}$$

Естественная параметризация условий (1.22) имеет вид

$$\begin{cases} w_j^2 = p(u - u_j), \\ w_j'^2 = p'(u' - u_j) \end{cases} \quad (j = 1, 2, 3, 4). \tag{1.23}$$

При условиях (1.23) из (1.21) следует, что

$$\frac{w_j''^2 - w_k''^2}{w_l''^2 - w_n''^2} = \frac{w_j^2 - w_k^2}{w_l^2 - w_n^2}, \tag{1.24}$$

откуда

$$w_j''^2 = p''(u'' - u_j). \tag{1.25}$$

Таким образом, мы показали, что равенство (1.17) справедливо, если коэффициенты w_j и w'_j имеют вид (1.23). При этом коэффициенты $\mathcal{R}$-матрицы определяются из формул (1.25), где при фиксированных u_1, u_2, u_3, u_4 параметр u'' является функцией от u и u'. Выбор нормирующих множителей p, p', p'' несущественен в силу однородности уравнений (1.21). Для определения u'' как функции от u и u' подставим выражения (1.23) и (1.25) в любое из уравнений (1.21) и продифференцируем его по u и u'. В результате получим, что

$$\frac{1}{g(u)}\frac{\partial u''}{\partial u} + \frac{1}{g(u')}\frac{\partial u''}{\partial u'} = 0, \tag{1.26}$$

где

$$g^2(u) = \mathrm{const}\cdot\prod_{j=1}^{4}(u - u_j)^{-1}. \tag{1.27}$$

Введем вместо u и u' новые переменные v и v'

$$\frac{dv}{du} = g(u), \qquad \frac{dv'}{du'} = g(u'). \tag{1.28}$$

Тогда из уравнения (1.26) следует, что u'' является функцией только от $v - v'$. Дифференциальные уравнения (1.28) интегрируются явным образом в эллиптических функциях (см. приложение I). После подходящего выбора константы в (1.27) получим, что

$$u = \frac{u_4(u_3 - u_1) - u_3(u_4 - u_1)\,\mathrm{sn}^2(v, l)}{u_3 - u_1 - (u_4 - u_1)\,\mathrm{sn}^2(v, l)}, \tag{1.29}$$

где $\operatorname{sn}(v, l)$ — эллиптический синус Якоби модуля l,

$$l^2 = \frac{(u_1-u_4)(u_2-u_3)}{(u_1-u_3)(u_2-u_4)}. \tag{1.30}$$

Определим параметр ζ из соотношения

$$\operatorname{sn}^2(\zeta, l) = \frac{u_1-u_3}{u_1-u_4}. \tag{1.31}$$

Подставив найденное выражение для u — формулу (1.29) — в (1.23) и используя формулы для эллиптических функций Якоби (см. приложение I), получим следующую параметризацию для коэффициентов w_j:

$$w_1 : w_2 : w_3 : w_4 = \frac{\operatorname{cn}(v, l)}{\operatorname{cn}(\zeta, l)} : \frac{\operatorname{dn}(v, l)}{\operatorname{dn}(\zeta, l)} : 1 : \frac{\operatorname{sn}(v, l)}{\operatorname{sn}(\zeta, l)}. \tag{1.32}$$

Удобство параметризации (1.32) состоит в том, что для матриц $\mathscr{L}_n$ и $\mathscr{L}'_n$, построенных по коэффициентам w_j и w'_j с одинаковыми значениями параметров ζ и l и разными значениями v и v', найдется матрица $\mathscr{R}$, удовлетворяющая соотношению (1.17), причем ее матричные элементы зависят только от $v - v'$. Тем самым две трансфер-матрицы с различными значениями параметра v коммутируют при фиксированных ζ и l.

Параметризация (1.32) была найдена Бакстером в его знаменитой работе [9]. Приведенные выше рассуждения взяты нами оттуда.

Обратим внимание читателя на то, что формулы (1.32) фактически совпадают с выражениями для моментов полностью асимметрического волчка (см., например, [47]).

Подчеркнем, что соотношения (1.32) не являются ограничением на коэффициенты w_j. При заданных w_j параметры l, ζ и v определяются из формул

$$\left\{\begin{aligned} l^2 &= \frac{(w_1^2-w_4^2)(w_2^2-w_3^2)}{(w_1^2-w_3^2)(w_2^2-w_4^2)}, \\ \operatorname{sn}^2(\zeta, l) &= \frac{w_1^2-w_3^2}{w_1^2-w_4^2}, \\ \operatorname{sn}(v, l) &= \frac{w_4}{w_3}\operatorname{sn}(\zeta, l). \end{aligned}\right. \tag{1.33}$$

Для нахождения коэффициентов w''_j подставим найденные выражения (1.32) для w_j и w'_j в уравнения (1.21). Используя теоремы сложения для эллиптических функций Якоби (см. приложение I), мы получим следующее выражение для решения системы (1.21) — коэффициентов w''_j:

$$w''_1 : w''_2 : w''_3 : w''_4 = \frac{\operatorname{cn}(v-v'+\zeta, l)}{\operatorname{cn}(\zeta, l)} : \frac{\operatorname{dn}(v-v'+\zeta, l)}{\operatorname{dn}(\zeta, l)} : 1 : \frac{\operatorname{sn}(v-v'+\zeta, l)}{\operatorname{sn}(\zeta, l)}. \tag{1.34}$$

В дальнейшем более удобной будет другая параметризация коэффициентов w_j, которая получается из (1.32) преобразованием Ландена (см. приложение I). Положим

$$k = \frac{1-l}{1+l}, \quad \eta = \frac{i\zeta}{1+k}, \quad \lambda = \frac{iv}{1+k}. \tag{1.35}$$

Тогда мы получим (см. приложение I), что

$$(w_4 + w_3) : (w_4 - w_3) : (w_1 + w_2) : (w_1 - w_2) = \tag{1.36}$$

$$= \operatorname{sn}(\lambda + \eta, k) : \operatorname{sn}(\lambda - \eta, k) : \operatorname{sn}(2\eta, k) : k \operatorname{sn}(2\eta, k)\operatorname{sn}(\lambda - \eta, k)\operatorname{sn}(\lambda+\eta, k).$$

Для коэффициентов w_j'' соответственно получаем

$$(1.37)\quad (w_4''+w_3''):(w_4''-w_3''):(w_1''+w_2''):(w_1''-w_2'')=$$
$$=\operatorname{sn}(\lambda-\mu+2\eta,\ k):\operatorname{sn}(\lambda-\mu,\ k):\operatorname{sn}(2\eta,\ k):k\operatorname{sn}(2\eta,\ k)\operatorname{sn}(\lambda-\mu,\ k)\times$$
$$\times\operatorname{sn}(\lambda-\mu+2\eta,\ k),$$

где $\mu=iv'/(1+k)$.

В дальнейшем, когда нет необходимости указывать модуль k, мы будем вместо $\operatorname{sn}(\lambda,\ k)$ писать просто $\operatorname{sn}\lambda$.

Таким образом, в выражении (1.11) коэффициенты w_j определяются из формул (1.36) при каком-либо значении общего нормирующего множителя. При фиксированных k и η обозначим через $\mathscr{L}_n(\lambda)$ соответствующую матрицу $\mathscr{L}_n$. Тогда равенство (1.17) примет вид

$$(1.38)\quad \mathscr{R}(\lambda,\ \mu)(\mathscr{L}_n(\lambda)\otimes\mathscr{L}_n(\mu))=(\mathscr{L}_n(\mu)\otimes\mathscr{L}_n(\lambda))\mathscr{R}(\lambda,\ \mu),$$

где $\mathscr{R}$-матрица есть

$$(1.39)\quad \mathscr{R}=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d\\ 0 & b & c & 0\\ 0 & c & b & 0\\ d & 0 & 0 & a\end{pmatrix},$$

а коэффициенты $a,\ b,\ c,\ d$ суть

$$(1.40)\quad \begin{cases} a(\lambda,\ \mu)=\operatorname{sn}(\lambda-\mu+2\eta), & b(\lambda,\ \mu)=\operatorname{sn}2\eta,\\ c(\lambda,\ \mu)=\operatorname{sn}(\lambda-\mu), & d(\lambda,\ \mu)=k\operatorname{sn}2\eta\operatorname{sn}(\lambda-\mu)\operatorname{sn}(\lambda-\mu+2\eta).\end{cases}$$

В силу однородности соотношения (1.38) оно справедливо при любом выборе общих нормирующих множителей в (1.36) и (1.37). Отметим, что из (1.39) — (1.40) следует, что $\mathscr{R}$-матрица сингулярна лишь при дискретном множестве значений $\lambda-\mu$, поэтому справедливость равенства

$$(1.41)\quad [T(\lambda),\ T(\mu)]=0$$

при всех значениях λ и μ следует из принципа аналитического продолжения.

Имея в распоряжении формулы (1.11), (1.36), (1.39) и (1.40), равенство (1.38) можно непосредственно проверить при помощи теорем сложения для тэта-функций Якоби (см. приложение I). Ясно, однако, что самым нетривиальным местом в приведенных выше рассуждениях является нахождение удобной параметризации (1.36) коэффициентов w_j. Поэтому вместо того, чтобы сразу привести формулы (1.36) — (1.40) и дать их доказательство, мы вначале воспроизвели рассуждения Бакстера, приводящие к параметризации (1.36).

Полученное нами соотношение

$$(1.42)\quad \mathscr{R}(\lambda,\ \mu)(\mathscr{T}(\lambda)\otimes\mathscr{T}(\mu))=(\mathscr{T}(\mu)\otimes\mathscr{T}(\lambda))\mathscr{R}(\lambda,\ \mu)$$

играет в дальнейшем основную роль. Отметим, что сам Бакстер в [9] использовал его лишь для доказательства формулы (1.41). Там же он дал и другое доказательство этой формулы, не опирающееся на равенство (1.42). Формула (1.42) осталась у Бакстера в тени и не привлекла внимание других исследователей.

Мы же положили (1.42) в основу нашего рассмотрения. Она является для нас важной составной частью квантового варианта метода обратной задачи. Этот метод был сформулирован нами вместе с Е. К. Скляниным [25], [48] и отработан на теоретико-полевых примерах нелинейного уравнения Шрёдингера [43] и уравнения Sine — Gordon [25]. Здесь мы показываем, как этот метод работает на примере XYZ модели.

Рассмотрим теперь вырожденный случай, когда модуль k эллиптических функций стремится к нулю. При этом эллиптические функции Якоби превращаются в обычные тригонометрические функции (см. приложение I), и параметризация (1.36) принимает вид

$$(1.43)\qquad (w_4+w_3):(w_4-w_3):(w_1+w_2):(w_1-w_2) = \\ = \sin(\lambda+\eta):\sin(\lambda-\eta):\sin 2\eta:0.$$

Из формул (1.9) получаем, что при параметризации (1.43) $v_7=v_8=0$, т. е. комбинации 7 и 8 на рис. 2 оказываются запрещенными. Эта модель, по понятным причинам называемая шестивершинной решетчатой моделью, была решена Либом в 1967 г. при помощи классического анзатца Бете. В § 3 мы объясним метод обратной задачи на более простом примере этой модели.

Для упрощения возникающих в §§ 4 и 5 формул удобно выбрать конкретную реализацию проективной параметризации (1.36). Взяв в качестве общего нормирующего множителя в (1.36) величину $\sqrt{k}\,\Theta(2\eta)\Theta(\lambda-\eta)\Theta(\lambda+\eta)$ и используя формулу (см. приложение I)

$$(1.44)\qquad \operatorname{sn}(u,k)=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\mathrm{H}(u)}{\Theta(u)},$$

где $\mathrm{H}(u)$ и $\Theta(u)$ — тэта-функции Якоби (см. приложение I), получим следующие выражения:

$$(1.45)\qquad \begin{cases} w_4+w_3=\Theta(2\eta)\,\Theta(\lambda-\eta)\,\mathrm{H}(\lambda+\eta),\\ w_4-w_3=\Theta(2\eta)\,\mathrm{H}(\lambda-\eta)\,\Theta(\lambda+\eta),\\ w_1+w_2=\mathrm{H}(2\eta)\,\Theta(\lambda-\eta)\,\Theta(\lambda+\eta),\\ w_1-w_2=\mathrm{H}(2\eta)\,\mathrm{H}(\lambda-\eta)\,\mathrm{H}(\lambda+\eta). \end{cases}$$

Аналогичным образом для матричных элементов $\mathscr{R}$-матрицы получаем представление

$$(1.46)\qquad \begin{cases} a(\lambda,\mu)=\Theta(2\eta)\,\Theta(\lambda-\mu)\,\mathrm{H}(\lambda-\mu+2\eta),\\ b(\lambda,\mu)=\mathrm{H}(2\eta)\,\Theta(\lambda-\mu)\,\Theta(\lambda-\mu+2\eta),\\ c(\lambda,\mu)=\Theta(2\eta)\,\mathrm{H}(\lambda-\mu)\,\Theta(\lambda-\mu+2\eta),\\ d(\lambda,\mu)=\mathrm{H}(2\eta)\,\mathrm{H}(\lambda-\mu)\,\mathrm{H}(\lambda-\mu+2\eta). \end{cases}$$

Используя формулы (1.45) и (1.46), равенство (1.38) без труда проверяется с помощью теорем сложения для тэта-функций Якоби.

В заключение этого параграфа укажем, что соотношение (1.38), в несколько иной форме, уже встречалось в литературе по одномерной математической физике. Для такой записи формулы (1.38) введем следующие обозначения. Поскольку спиновые операторы σ_n^j нетривиально действуют лишь в квантовом пространстве спинов в n-м узле, то мы, допуская известную вольность, забудем номер n и отождествим σ_n^j с операторами Паули σ^j. При этом матрица $\mathscr{L}_n(\lambda)$ превратится в матрицу порядка 4×4, которая в базисе

$$(1.47)\qquad f_1=f_{++},\quad f_2=f_{+-},\quad f_3=f_{-+},\quad f_4=f_{--}$$

имеет матричные элементы

$$(1.48)\qquad \mathscr{L}_{i\alpha,\,j\beta}(\lambda)=w_l\sigma_{ij}^l\sigma_{\alpha\beta}^l,$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование. Базисные векторы $f_{\alpha_1\alpha_2}$ определяются формулой (1.5). Положим

$$(1.49)\qquad S_{ij}^{\alpha\beta}(\lambda)=\mathscr{L}_{i\alpha,\,j\beta}(\lambda+\eta).$$

Тогда матричные элементы $\mathscr{R}$-матрицы принимают вид

$$\mathscr{R}_{ij,\,kn}(\lambda-\mu)=S_{jk}^{in}(\lambda-\mu). \tag{1.50}$$

В обозначениях (1.48) — (1.50) равенство (1.38) записывается следующим образом:

$$S_{jp}^{iq}(\lambda-\mu)\,S_{pm}^{\alpha\gamma}(\lambda)\,S_{qn}^{\gamma\beta}(\mu)=S_{ip}^{\alpha\gamma}(\mu)S_{jq}^{\gamma\beta}(\lambda)\,S_{qm}^{pn}(\lambda-\mu). \tag{1.51}$$

Соотношение (1.51) впервые было предложено Ц. Н. Янгом в 1967 г. [49] при обсуждении многочастичных факторизующихся S-матриц, поэтому естественно называть формулу (1.38) соотношением Бакстера — Янга. В дальнейшем оно использовалось в работах М. Каровского и других [50], А. Б. и Ал. Б. Замолодчиковых [51] — [52], в которых исследовались условия факторизуемости S-матриц в различных моделях квантовой теории поля в двумерном пространстве-времени.

На приведенную запись соотношения (1.38) наше внимание обратил А. Б. Замолодчиков после того, как мы познакомили его с ним.

А. Б. Замолодчиков [51] показал, что равенство (1.51) интерпретируется как условие ассоциативности алгебры с формальными образующими $A_i(\lambda)$, удовлетворяющими соотношениям

$$A_\alpha(\lambda)\,A_i(\mu)=S_{ik}^{\alpha\beta}(\lambda-\mu)\,A_k(\mu)\,A_\beta(\lambda). \tag{1.52}$$

Образующие $A_i(\lambda)$ в работе [51] играли роль операторов рождения in и out состояний многочастичной системы.

В недавней работе [45] И. В. Чередник предложил реализацию соотношений типа (1.52) в терминах расслоений над абелевыми многообразиями над полем комплексных чисел. В приложении II мы приведем изложение результатов И. В. Чередника для рассматриваемого нами случая, которому соответствуют абелевы многообразия размерности 1, т. е. эллиптические кривые.

Переходим теперь к следующему параграфу, в котором, как мы надеемся, кажущаяся искусственность наших построений станет более понятной или, по крайней мере, более привычной.

§ 2. Связь с методом обратной задачи

Внимательный читатель, видимо, догадался, что название «матрица монодромии» для матрицы $\mathscr{T}(\lambda)$ выбрано нами не случайно.

Формулы (1.11) — (1.13) показывают, что с нашей моделью естественным образом связана линейная задача

$$\Psi_{n+1}=\mathscr{L}_n(\lambda)\Psi_n. \tag{2.1}$$

Здесь $\mathscr{L}_n(\lambda)$ дается выражением (1.11) и (1.36), а Ψ_n — двумерный столбец с коэффициентами из кольца $\mathfrak{B}_N$.

Рассмотрим матричное решение $\Psi_n(\lambda)$ задачи (2.1) с граничным условием

$$\Psi_1(\lambda)=\begin{pmatrix} I_N & 0\\ 0 & I_N\end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где I_N — единичный оператор в $\mathfrak{H}_N$. Как известно, матрицей монодромии $\mathscr{T}_N(\lambda)$ задачи (2.1) на цепочке длины N называется значение решения $\Psi_n(\lambda)$ при $n=N+1$, т. е.

$$\mathscr{T}_N(\lambda)=\Psi_{N+1}(\lambda)=\prod_{n=1}^{\overleftarrow{N}}\mathscr{L}_n(\lambda). \tag{2.3}$$

Сама матрица $\mathcal{L}_n(\lambda)$ называется локальной матрицей перехода из узла с номером n в узел с номером $n+1$.

Системы вида (2.1) составляют основу метода обратной задачи решения нелинейных классических уравнений на цепочке. Коэффициенты локальной матрицы перехода $\mathcal{L}_n(\lambda)$ в этом случае являются, вообще говоря, комплекснозначными функциями от характерных канонических переменных и спектрального параметра λ. Система (2.1) называется вспомогательной спектральной задачей. В качестве примера рассмотрим конечную периодическую цепочку Тода [53], уравнения движения которой имеют вид

$$\ddot{x}_n = e^{x_{n+1}-x_n} - e^{x_n - x_{n-1}} \qquad (n=1, \ldots, N;\ x_{N+1}=x_1). \tag{2.4}$$

Локальная матрица перехода $\mathcal{L}_n(\lambda)$ в случае цепочки Тода выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} p_n+\lambda & -e^{x_n} \\ e^{-x_n} & 0 \end{pmatrix} \qquad (n=1, \ldots, N), \tag{2.5}$$

где p_n — импульсы, канонически сопряженные с координатами x_n.

Матрица монодромии $\mathcal{T}_N(\lambda)$ есть матрица порядка 2×2 и ее матричные элементы являются функциями на фазовом пространстве $\mathcal{M}$ нашей системы. Скобки Пуассона на $\mathcal{M}$ имеют вид

$$\{p_n, x_m\} = \delta_{nm}. \tag{2.6}$$

Оказывается, что скобки Пуассона для матричных элементов матрицы монодромии можно вычислить явно. В частности,

$$\{\operatorname{tr}\mathcal{T}_N(\lambda), \operatorname{tr}\mathcal{T}_N(\mu)\} = 0. \tag{2.7}$$

Таким образом, с помощью матриц $\mathcal{L}_n(\lambda)$ мы построили на $\mathcal{M}$ семейство коммутирующих потоков. Замечательным является тот факт, что среди них находится и поток, порождаемый системой (2.4). Действительно, гамильтониан h цепочки Тода имеет вид

$$h = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{2} p_n^2 + e^{x_{n+1}-x_n}\right) \tag{2.8}$$

и выражается через след матрицы монодромии характерным для метода обратной задачи образом:

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(N-1)!}\frac{d^{N-1}}{d\lambda^{N-1}}\operatorname{tr}\mathcal{T}_N(\lambda)|_{\lambda=0}\right)^2 - \frac{1}{(N-2)!}\frac{d^{N-2}}{d\lambda^{N-2}}\operatorname{tr}\mathcal{T}_N(\lambda)|_{\lambda=0}. \tag{2.9}$$

След матрицы монодромии для цепочки Тода длины N как функция λ является многочленом степени N со старшим коэффициентом 1. Соотношение (2.7) показывает, что коэффициенты многочлена $\operatorname{tr}\mathcal{T}_N(\lambda)$ являются инволютивными интегралами движения. Тем самым след матрицы монодромии является производящей функцией для коммутирующих интегралов движения конечной периодической цепочки Тода. Можно доказать, что эти коэффициенты являются функционально независимыми как функции на фазовом пространстве $\mathcal{M}$. Их число равно половине размерности фазового пространства $\mathcal{M}$. Отсюда, по известной теореме Лиувилля (см., например, [54]), следует полная интегрируемость гамильтоновой системы цепочки Тода, равно как и любой другой системы, в которой в качестве гамильтониана взят один из этих интегралов движения. Таким образом, соотношение (2.7) означает полную интегрируемость конечной периодической цепочки Тода.

Метод обратной задачи для цепочки Тода был применен С. В. Манаковым в 1973 г. [55] и независимо Г. Флашкой в 1974 г. [56]. Матрицу $\mathcal{L}_n(\lambda)$ вида (2.5) можно извлечь из работы [55], в которой для доказательства полной интегрируемости использовалась спектральная задача в несколько иной записи.

В заключение этого краткого экскурса в классический метод обратной задачи отметим, что переменные типа действие-угол для конечной периодической цепочки Тода, существование которых обеспечивается теоремой Лиувилля, находятся с использованием методов алгебраической геометрии (см. обзоры [40] — [41]).

Возвращаясь к основной теме нашего исследования, мы видим, что **изучение восьмивершинной модели естественно приводит к вспомогательной** спектральной задаче (2.1). Однако в отличие от только что рассмотренного примера эта задача является квантовой, так как матричные элементы локальной матрицы перехода $\mathcal{L}_n(\lambda)$ представляют собой линейные операторы в пространстве $\mathfrak{H}_N$. Трансфер-матрица $T(\lambda)$ обладает свойством

$$[T(\lambda),\ T(\mu)] = 0 \tag{2.10}$$

и является производящей функцией для семейства коммутирующих операторов. Каждый из них можно рассматривать в качестве гамильтониана квантовой системы, имеющей много интегралов движения. Замечательным обстоятельством является тот факт, что гамильтониан XYZ модели содержится среди этого семейства.

Действительно, как показал Бакстер в [10],

$$H = -\operatorname{sn} 2\eta \frac{d}{d\lambda} \ln T(\lambda)|_{\lambda=\eta} + CNI_N, \tag{2.11}$$

где H — гамильтониан XYZ модели с коэффициентами

$$J_x = 1 + k \operatorname{sn}^2 2\eta, \quad J_y = 1 - k \operatorname{sn}^2 2\eta, \quad J_z = \operatorname{cn} 2\eta \operatorname{dn} 2\eta \tag{2.12}$$

и

$$C = \frac{1}{2} J_z. \tag{2.13}$$

Связь XYZ модели Гейзенберга и восьмивершинной модели была замечена Б. Сазерлэндом в 1970 г. [57]. Он показал, что при определенных соотношениях между больцмановскими весами v_j и параметрами J_x, J_y, J_z гамильтониан XYZ модели будет коммутировать с трансфер-матрицей восьмивершинной модели.

Подчеркнем здесь, что формулы (2.12) не являются ограничением на коэффициенты J_x, J_y, J_z, а дают их параметризацию с точностью до несущественного общего множителя.

Докажем формулы (2.11) — (2.13). В процессе доказательства будет видна особая роль значения $\lambda = \eta$. В (2.11) — (2.13) естественно подразумевается, что для весов w_j выбрана параметризация (1.36) с общим нормирующим множителем, равным 1.

При $\lambda = \eta$ из (1.36) получаем, что

$$w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = \frac{1}{2} \operatorname{sn} 2\eta,$$

откуда

$$R_\alpha^\beta(i,\ j) = \frac{1}{2} \operatorname{sn} 2\eta \sum_{l=1}^{4} \sigma_{ij}^l \sigma_{\alpha\beta}^l = \operatorname{sn} 2\eta\, \delta_{\alpha j} \delta_{\beta i}. \tag{2.14}$$

Используя формулу (1.7), получаем, что

$$T_{\{\alpha\},\{\alpha'\}}(\eta) = \operatorname{sn}^N 2\eta\, \delta_{\alpha_1\alpha_2'} \delta_{\alpha_2\alpha_3'} \ldots \delta_{\alpha_N\alpha_1'}. \tag{2.15}$$

Тем самым оператор $\operatorname{sn}^{-N}2\eta T(\eta)$ является оператором циклического сдвига в пространстве $\mathfrak{H}_N$. Продифференцируем теперь (1.7) по λ и положим $\lambda = \eta$. Мы получим с учетом (2.14) следующее выражение:

$$(2.16)\quad \frac{d}{d\lambda} T_{\{\alpha\},\{\alpha'\}}(\lambda)\Big|_{\lambda=\eta} =$$

$$= \operatorname{sn}^{N-1}2\eta \sum_{n=1}^{N} \delta_{\alpha_1\alpha_2'} \ldots \delta_{\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}'} \frac{d}{d\lambda} R_{\alpha_n}^{\alpha_n'}(\lambda \mid \alpha_{n-1}, \alpha_{n+1}')\big|_{\lambda=\eta}\, \delta_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}'} \ldots \delta_{\alpha_N\alpha_1'}.$$

Здесь мы использовали формулу (1.10), т. е.

$$R_{\alpha}^{\alpha'}(\lambda \mid \gamma, \gamma') = \sum_{l=1}^{4} w_l(\lambda)\, \sigma_{\gamma\gamma'}^{l} \sigma_{\alpha\alpha'}^{l}.$$

Таким образом, матричные элементы логарифмической производной $T(\lambda)$ при $\lambda = \eta$ имеют вид

$$(2.17)\quad \frac{1}{\operatorname{sn} 2\eta} \sum_{n=1}^{N} \delta_{\alpha_1\alpha_1'} \ldots \delta_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-1}'} \times$$

$$\times \frac{d}{d\lambda} R_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n'}(\lambda \mid \alpha_n, \alpha_{n+1}')\big|_{\lambda=\eta}\, \delta_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+1}'} \ldots \delta_{\alpha_N\alpha_N'}.$$

Преобразовав формулу (1.10)

$$R_{\alpha}^{\alpha'}(\lambda \mid \gamma, \gamma') = \sum_{j=1}^{4} p_j(\lambda)\, \sigma_{\alpha\gamma'}^{j} \sigma_{\gamma\alpha'}^{j},$$

где

$$(2.18)\quad \begin{cases} p_1 = \frac{1}{2}(w_1 - w_2 - w_3 + w_4), & p_2 = \frac{1}{2}(-w_1 + w_2 - w_3 + w_4), \\ p_3 = \frac{1}{2}(-w_1 - w_2 + w_3 + w_4), & p_4 = \frac{1}{2}(w_1 + w_2 + w_3 + w_4), \end{cases}$$

перепишем (2.17) следующим образом:

$$(2.19)\quad \frac{d}{d\lambda} \ln T(\lambda)\Big|_{\lambda=\eta} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sn} 2\eta} \sum_{n=1}^{N} (p_1'\sigma_n^1\sigma_{n+1}^1 + p_2'\sigma_n^2\sigma_{n+1}^2 + p_3'\sigma_n^3\sigma_{n+1}^3) + \frac{N}{\operatorname{sn} 2\eta} p_4' I_N,$$

где штрих означает производную по λ.

Коэффициенты p_j' легко вычисляются при помощи формул дифференцирования эллиптических функций Якоби (см. приложение I). В результате получаем

$$(2.20)\quad p_1' = \frac{1 + k \operatorname{sn}^2 2\eta}{2}, \quad p_2' = \frac{1 - k \operatorname{sn}^2 2\eta}{2}, \quad p_3' = p_4' = \frac{1}{2} \operatorname{cn} 2\eta \operatorname{dn} 2\eta.$$

Другие коммутирующие квантовые интегралы движения даются старшими производными $\ln T(\lambda)$ при $\lambda = \eta$. В явном виде их вычислил М. Люшер [58]. В дальнейшем они нам не понадобятся, поэтому не будем их здесь приводить.

При $k = 0$ формулы (2.11) — (2.13) устанавливают связь между трансфер-матрицей шестивершинной модели и гамильтонианом XXZ модели Гейзенберга. Параметры J_x, J_y и J_z имеют вид

$$(2.21)\quad J_x = J_y = 1, \quad J_z = \cos 2\eta,$$

где η — произвольное комплексное число.

В заключение подведем предварительные итоги. Мы, следуя Бакстеру, нашли для оператора H — гамильтониана XYZ модели Гейзенберга — вспомогательную спектральную задачу (2.1). По самой своей постановке она является квантовой. Мы ввели матрицу монодромии $\mathcal{T}(\lambda)$ и установили связь между оператором H и следом матрицы монодромии — трансфер-матрицей $T(\lambda)$ по формуле (2.11). Выбор удачной параметризации (1.36) коэффициентов w_j позволил записать перестановочные соотношения между всеми матричными элементами матриц $\mathcal{L}_n(\lambda)$ и $\mathcal{L}_n(\mu)$ в компактной форме (1.38). Вследствие коммутативности матричных элементов локальных матриц перехода $\mathcal{L}_n(\lambda)$ и $\mathcal{L}_m(\mu)$ при $n \neq m$ аналогичное соотношение справедливо для матриц монодромии и дается формулой (1.42).

В следующем параграфе мы покажем, как квантовой метод обратной задачи работает на сравнительно простом примере XXZ модели. При этом мы постоянно будем пользоваться существенными упрощениями, возникающими из-за того, что $w_1 = w_2$ и коэффициент d в $\mathcal{R}$-матрице равен нулю. Общий случай $w_1 \neq w_2$ будет рассмотрен в §§ 4—5.

§ 3. Шестивершинная модель

В предыдущем параграфе мы, в частности, установили связь между гамильтонианом XXZ модели Гейзенберга и трансфер-матрицей шестивершинной решетчатой модели. Здесь мы рассмотрим задачу о нахождении собственных значений и собственных векторов трансфер-матрицы шестивершинной модели. Мы дадим ее решение с помощью квантового метода обратной задачи. В заключение этого параграфа мы применим полученные результаты к аналогичной задаче для XXZ модели.

Напомним, что для шестивершинной модели $v_7 = v_8 = 0$, т. е. $w_1 = w_2$. Этому случаю соответствует $k = 0$ в формулах (1.36). Тем самым общая параметризация коэффициентов w_j (1.36) превращается в (1.43). Выберем конкретную реализацию параметризации (1.43), положив общий нормирующий множитель в (1.43) равным 1:

$$(3.1)\quad w_4 + w_3 = \sin(\lambda + \eta), \quad w_4 - w_3 = \sin(\lambda - \eta), \quad w_1 = w_2 = \frac{1}{2} \sin 2\eta.$$

Локальная матрица перехода $\mathcal{L}_n(\lambda)$ имеет вид

$$(3.2)\qquad \mathcal{L}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} w_4\sigma_n^4 + w_3\sigma_n^3 & w_1(\sigma_n^1 - i\sigma_n^2) \\ w_1(\sigma_n^1 + i\sigma_n^2) & w_4\sigma_n^4 - w_3\sigma_n^3 \end{pmatrix}$$

и удовлетворяет равенству (1.38), в котором $\mathcal{R}$-матрица задается выражением

$$(3.3)\qquad \mathcal{R}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$(3.4)\qquad b(\lambda, \mu) = \frac{\sin 2\eta}{\sin(\lambda - \mu + 2\eta)}, \quad c(\lambda, \mu) = \frac{\sin(\lambda - \mu)}{\sin(\lambda - \mu + 2\eta)}.$$

Произвольный общий множитель в формулах (1.40) выбран так, чтобы при $\lambda = \mu$ $\mathcal{R}$-матрица превращалась в единичную матрицу.

Матрица монодромии $\mathcal{T}_N(\lambda)$ определяется формулой (1.13), т. е.

$$(3.5)\qquad \mathcal{T}_N(\lambda) = \prod_{n=1}^{\overleftarrow{N}} \mathcal{L}_n(\lambda)$$

и как матрица порядка 2×2 имеет вид

$$\mathcal{T}_N(\lambda) = \begin{pmatrix} A_N(\lambda) & B_N(\lambda) \\ C_N(\lambda) & D_N(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

В этих обозначениях трансфер-матрица $T_N(\lambda)$ есть

$$T_N(\lambda) = \operatorname{tr} \mathcal{T}_N(\lambda) = A_N(\lambda) + D_N(\lambda). \tag{3.7}$$

В дальнейшем мы снова будем опускать индекс N у введенных объектов. Для матрицы монодромии $\mathcal{T}(\lambda)$ справедливо равенство (1.42), т. е.

$$\mathcal{R}(\lambda, \mu)(\mathcal{T}(\lambda) \otimes \mathcal{T}(\mu)) = (\mathcal{T}(\mu) \otimes \mathcal{T}(\lambda))\mathcal{R}(\lambda, \mu). \tag{3.8}$$

Мы уже отмечали выше, что в этом равенстве содержатся перестановочные соотношения между всеми операторными матричными элементами $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ матрицы монодромии $\mathcal{T}(\lambda)$. Выпишем явно основные из них:

$$\left\{\begin{aligned} &[A(\lambda), A(\mu)] = 0, \quad [B(\lambda), B(\mu)] = 0, \\ &[C(\lambda), C(\mu)] = 0, \quad [D(\lambda), D(\mu)] = 0, \\ &B(\lambda)A(\mu) = b(\lambda, \mu)B(\mu)A(\lambda) + c(\lambda, \mu)A(\mu)B(\lambda), \\ &B(\mu)D(\lambda) = b(\lambda, \mu)B(\lambda)D(\mu) + c(\lambda, \mu)D(\lambda)B(\mu), \\ &c(\lambda, \mu)[C(\lambda), B(\mu)] = b(\lambda, \mu)(A(\mu)D(\lambda) - A(\lambda)D(\mu)), \\ &c(\lambda, \mu)[D(\lambda), A(\mu)] = b(\lambda, \mu)(B(\mu)C(\lambda) - B(\lambda)C(\mu)). \end{aligned}\right. \tag{3.9}$$

Перейдем теперь к построению специального состояния — порождающего вектора в пространстве $\mathfrak{H}_N$. Перепишем локальную матрицу перехода $\mathcal{L}_n(\lambda)$ в виде

$$\mathcal{L}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha_n(\lambda) & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

(Отметим, что из (3.1) — (3.2) следует, что в нашем случае операторы β_n и γ_n не зависят от λ.) Операторы α_n, β_n, γ_n, δ_n нетривиально действуют только в локальном пространстве $\mathfrak{h}_n$, и поэтому мы, не меняя обозначений, ограничим их на $\mathfrak{h}_n$. Пусть e_n^+ — вектор в локальном пространстве $\mathfrak{h}_n$, в базисе 4) имеющий вид

$$e_n^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Из формул (3.1), (3.2) и (3.10) следует, что

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha_n(\lambda)e_n^+ = \alpha(\lambda)e_n^+, \quad \delta_n(\lambda)e_n^+ = \delta(\lambda)e_n^+, \\ &\gamma_n e_n^+ = 0, \end{aligned}\right. \tag{3.12}$$

где

$$\alpha(\lambda) = \sin(\lambda + \eta), \quad \delta(\lambda) = \sin(\lambda - \eta). \tag{3.13}$$

Назовем вектор e_n^+ локальным вакуумом. Он аннулирует левый нижний элемент матрицы $\mathcal{L}_n(\lambda)$ и при всех λ является собственным вектором для ее диагональных элементов.

Из локальных формул (3.12) следуют аналогичные формулы для операторных матричных элементов матрицы монодромии $\mathcal{T}(\lambda)$ по отношению к состоянию Ω

$$\Omega = e_1^+ \otimes \ldots \otimes e_N^+. \tag{3.14}$$

Именно,

$$\left\{\begin{aligned} &A(\lambda)\Omega = \alpha^N(\lambda)\Omega, \quad D(\lambda)\Omega = \delta^N(\lambda)\Omega, \\ &C(\lambda)\Omega = 0. \end{aligned}\right. \tag{3.15}$$

Действительно, формулы (3.12) показывают, что матрица $\mathscr{L}_n(\lambda)$, примененная к e_n^+, является треугольной и (3.15) следует из правила умножения треугольных матриц. Построенное состояние Ω будем называть порождающим вектором. Полученные соотношения (3.9) и (3.15) мы используем для нахождения собственных значений и собственных векторов оператора $A(\lambda) + D(\lambda)$, т. е. трансфер-матрицы $T(\lambda)$.

Мы покажем, что собственные векторы трансфер-матрицы $T(\lambda)$ можно представить в виде

$$\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \prod_{l=1}^{n} B(\lambda_l)\,\Omega, \tag{3.16}$$

где числа λ_l удовлетворяют системе трансцендентных уравнений

$$\frac{\alpha^N(\lambda_j)}{\delta^N(\lambda_j)} = \prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} \frac{c(\lambda_l, \lambda_j)}{c(\lambda_j, \lambda_l)} \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{3.17}$$

а соответствующие собственные значения $\Lambda(\lambda;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ суть

$$\Lambda(\lambda;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \alpha^N(\lambda) \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{c(\lambda_l, \lambda)} + \delta^N(\lambda) \prod_{l=1}^{n} \frac{1}{c(\lambda, \lambda_l)}. \tag{3.18}$$

Читатель, знакомый с задачами, решаемыми при помощи анзатца Бете (см. обзоры [3], [46] и оригинальные работы [2], [6] — [8]), узнает здесь основные формулы этого метода. Новыми являются компактная формула (3.16) для собственных векторов и простой алгебраический вывод формул (3.17) — (3.18), опирающийся только на перестановочные соотношения (3.9) и на существование порождающего вектора Ω. Операторы $B(\lambda_l)$ при этом естественно называть операторами рождения элементарных возбуждений над порождающим состоянием Ω. Эта алгебраизация анзатца Бете была предложена нами вместе с Е. К. Скляниным в работе [25], где с ее помощью было получено точное решение квантовой модели Sine — Gordon.

Отметим, что в формулах (3.16) — (3.18) допустимыми значениями параметра n являются $0, 1, \ldots, N$, так как при $n > N$ выражение (3.16) тождественно обращается в 0. Действительно, используя коммутативность операторов α_j, β_j, γ_j, δ_j при разных j и равенство $\beta_j^2 = 0$, без труда убеждаемся, что произведение (3.16) исчезает при $n > N$. Также укажем, что поскольку матрица монодромии $\mathscr{T}(\lambda)$ периодична по λ с периодом 2π, то в системе уравнений (3.17) подразумевается, что $|\operatorname{Re}\lambda_l| \leqslant \pi$, т. е. решения λ_l рассматриваются только в фундаментальной области.

Перейдем к доказательству формул (3.16) — (3.18). Перепишем нужные нам перестановочные соотношения из (3.9) в удобном для нас виде

$$A(\lambda)B(\mu) = \frac{1}{c(\mu, \lambda)} B(\mu)A(\lambda) - \frac{b(\mu, \lambda)}{c(\mu, \lambda)} B(\lambda)A(\mu), \tag{3.19}$$

$$D(\lambda)B(\mu) = \frac{1}{c(\lambda, \mu)} B(\mu)D(\lambda) - \frac{b(\lambda, \mu)}{c(\lambda, \mu)} B(\lambda)D(\mu). \tag{3.20}$$

Заметим, что из явного вида коэффициентов b и c — формулы (3.4) следует, что

$$\frac{b(\mu, \lambda)}{c(\mu, \lambda)} = -\frac{b(\lambda, \mu)}{c(\lambda, \mu)}. \tag{3.21}$$

С помощью соотношений (3.19) — (3.20) мы можем преобразовать выражение

$$(A(\lambda) + D(\lambda)) \prod_{l=1}^{n} B(\lambda_l)\,\Omega, \tag{3.22}$$

пронося $A(\lambda)$ и $D(\lambda)$ через $B(\lambda_l)$ к Ω и используя формулы (3.15) и (3.21). При этом возникает 2^n слагаемых, которые естественно собираются в $n+1$ выражение вида

$$\Lambda(\lambda;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)\prod_{l=1}^{n} B(\lambda_l)\Omega \tag{3.23}$$

и

$$\Lambda_j(\lambda;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)\,B(\lambda)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} B(\lambda_l)\Omega \qquad (j=1,\ \ldots,\ n), \tag{3.24}$$

где Λ, Λ_j — числовые коэффициенты. Структура операторных множителей в (3.23) получается, если при коммутации мы учитываем только первые слагаемые в правых частях формул (3.19) и (3.20). В результате немедленно заключаем, что коэффициент $\Lambda(\lambda;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)$ дается выражением (3.18).

Структура операторных множителей в выражении (3.24) при $j=1$ получается, если при коммутации $A(\lambda)$ и $D(\lambda)$ с $B(\lambda_1)$ мы используем вторые слагаемые в (3.19) и (3.20), а при дальнейшей коммутации возникших $A(\lambda_1)$ и $D(\lambda_1)$ с $B(\lambda_l)$, $l\geqslant 2$, опять будем учитывать только первые слагаемые в формулах (3.19) и (3.20). Коэффициент $\Lambda_1(\lambda;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)$ при этом получит вид (с использованием (3.21))

$$\frac{b(\lambda,\ \lambda_1)}{c(\lambda,\ \lambda_1)}\left(\alpha^N(\lambda_1)\prod_{l=2}^{n}\frac{1}{c(\lambda_l,\ \lambda_1)}-\delta^N(\lambda_1)\prod_{l=2}^{n}\frac{1}{c(\lambda_1,\ \lambda_l)}\right).$$

При вычислении коэффициентов Λ_j $(j=2,\ \ldots,\ n)$ нам пришлось бы комбинировать большее число слагаемых. Однако эти вычисления не надо проводить, так как в силу коммутативности операторов $B(\lambda_l)$ выражение (3.22) является симметрической функцией от $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$ и, следовательно, коэффициенты Λ_j получаются из Λ_1 надлежащей перестановкой переменных λ_l. Тем самым коэффициенты Λ_j имеют вид

$$\Lambda_j(\lambda;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)= \tag{3.25}$$
$$=\frac{b(\lambda,\ \lambda_j)}{c(\lambda,\ \lambda_j)}\left(\alpha^N(\lambda_j)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}\frac{1}{c(\lambda_l,\ \lambda_j)}-\delta^N(\lambda_j)\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}\frac{1}{c(\lambda_j,\ \lambda_l)}\right).$$

Для того, чтобы вектор $\Phi(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)$, определяемый формулой (3.16), был собственным для трансфер-матрицы $T(\lambda)$ при всех λ, сумма слагаемых вида (3.24) должна исчезнуть. Система уравнений (3.17) на величины λ_l получается, если мы будем считать, что исчезает в отдельности каждое слагаемое, т. е.

$$\Lambda_j(\lambda;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)=0 \qquad (j=1,\ \ldots,\ n). \tag{3.26}$$

Тем самым формулы (3.16) — (3.18) доказаны.

Заметим, что прямое доказательство равенства (3.25) должно опираться на формулы сложения для коэффициентов b и c. Эти теоремы сложения уже были использованы нами при доказательстве формулы (1.38). Также следует отметить, что при выводе соотношения (3.25) мы использовали то обстоятельство, что все λ_l различны. Мы не будем подробно обсуждать здесь случай совпадающих λ_l в формуле (3.16), который требует специального исследования, так как это увело бы слишком далеко от основной темы нашего обзора.

Весьма полезным является сравнение формулы (3.16) — операторного представления для собственных векторов трансфер-матрицы $T(\lambda)$ — с координатным представлением в работах [6] — [8]. Выражение (3.16), если его расписать в координатном виде, т. е. через локальные операторы α_n, β_n, γ_n, δ_n, отличается лишь зависящим от λ_l постоянным множителем от координатного представления в [6] — [8] и, в отличие от последнего, не исчезает при $\lambda_j = \lambda_k$. Тем самым представление (3.16) можно использовать и при совпадающих λ_l. Также следует указать, что, как и в случае классического анзатца Бете, не всем решениям λ_l системы трансцендентных уравнений (3.17) при $0 < n \leqslant N$ отвечают собственные векторы вида (3.16) с собственными значениями (3.18), так как для некоторых решений λ_l соответствующий собственный вектор $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ может исчезнуть. Можно показать, что собственный вектор (3.16), построенный по решению системы (3.17) при $n = N$, обращается в 0 при почти всех η. Однако в ситуации общего положения по отношению к λ_l вектор вида (3.16) не исчезает при $n = N$, а пропорционален вектору

$$\tilde{\Omega} = e_1^- \otimes \ldots \otimes e_N^-, \qquad e_n^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т. е. является собственным вектором оператора $T(\lambda)$ с тем же собственным значением, что и порождающий вектор Ω. Для доказательства последнего утверждения достаточно заметить, что вектор e_n^- аннулирует оператор β_n и является собственным вектором для операторов $\alpha_n(\lambda)$ и $\delta_n(\lambda)$ при всех λ, и далее повторить вывод формул (3.15). Таким образом, рассмотрение этого простого примера показывает, что исчезновение собственных векторов $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ при некоторых решениях λ_l системы (3.17) связано с вырождением спектра трансфер-матрицы $T(\lambda)$.

Перейдем теперь к рассмотрению XXZ модели Гейзенберга. Гамильтониан H этой модели имеет вид

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (\sigma_n^1 \sigma_{n+1}^1 + \sigma_n^2 \sigma_{n+1}^2 + \Delta \sigma_n^3 \sigma_{n+1}^3), \tag{3.27}$$

где предполагается, что имеют место периодические граничные условия (6), и связан с трансфер-матрицей $T(\lambda)$ шестивершинной модели формулами (2.11) — (2.13), т. е.

$$H = -\sin 2\eta \frac{d}{d\lambda} \ln T(\lambda)|_{\lambda=\eta} + \frac{N\Delta}{2} I_N, \tag{3.28}$$
$$\Delta = \cos 2\eta.$$

Формула (3.28) показывает, что собственные векторы $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ коммутативного семейства операторов $T(\lambda)$ будут собственными векторами и для оператора энергии H. Собственные значения оператора H находятся по собственным значениям (3.18) с помощью формулы (3.28). Приведем соответствующие выражения.

Для согласования возникающих формул с аналогичными формулами в [2], [6] — [8] введем вместо переменной λ переменную k (не путать k с модулем эллиптических функций в §§ 1—2)

$$e^{ik} = \frac{\sin(\lambda + \eta)}{\sin(\lambda - \eta)} \tag{3.29}$$

и обозначим

$$\Psi(k_1, \ldots, k_n) = \prod_{l=1}^{n} B(\lambda_l)\, \Omega. \tag{3.30}$$

Тогда после элементарных преобразований формул (3.17) — (3.18) мы приходим к следующим результатам.

Решение Ψ задачи на собственные значения для гамильтониана H

$$H\Psi = E\Psi \tag{3.31}$$

можно представить в виде (3.30), где числа k_l удовлетворяют системе трансцендентных уравнений

$$e^{iNk_j} = \prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} \frac{c(k_l, k_j)}{c(k_j, k_l)} \qquad (j=1, \ldots, n), \tag{3.32}$$

$$\frac{c(p, q)}{c(q, p)} = -\frac{e^{i(p+q)}-2\Delta e^{iq}+1}{e^{i(p+q)}-2\Delta e^{ip}+1}, \tag{3.33}$$

а собственные значения $E(k_1, \ldots, k_n)$ имеют вид

$$E(k_1, \ldots, k_n) = -\frac{N\Delta}{2} + 2\sum_{l=1}^{n} (\Delta - \cos k_l). \tag{3.34}$$

Формулы (3.32) — (3.34) были получены Ц. Н. Янгом и Ц. П. Янгом в [6] — [8] при помощи классического анзатца Бете. Мы показали, как квантовый метод обратной задачи естественным образом приводит к классическим результатам (3.32) — (3.34) для XXZ модели.

При исследовании XXZ модели оказывается полезным использовать как переменную λ и систему (3.17), так и введенную переменную k и систему (3.32) — (3.33). В системе уравнений (3.17) функция $c(\lambda, \mu)$ зависит только от $\lambda - \mu$ и, как будет объяснено в § 6, эта система превращается при $N \to \infty$ в интегральное уравнение с ядром, зависящим от разности аргументов. Последнее обстоятельство оказывается весьма удобным. С другой стороны, в терминах k_l выражение для энергии $E(k_1, \ldots, k_n)$ приобретает физически наглядный вид (3.34) — сумма энергий элементарных возбуждений над состоянием Ω. Также следует отметить, что в отличие от системы уравнений (3.17), которая в естественной области изменения параметра η, $|\operatorname{Re}\eta| \leqslant \pi$, осмысленна при $\eta \neq 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi$, система (3.33) имеет смысл при всех значениях Δ. В частности, положив в соотношениях (3.27), (3.32) — (3.34) $\Delta = 1$, мы получим классические формулы Бете для XXX модели [2].

До сих пор мы рассматривали случай произвольных комплексных значений параметра Δ. Физический интерес представляют лишь вещественные Δ, так как только при таких Δ оператор H является эрмитовым. Формула (3.28) показывает, что естественно рассматривать следующие области изменения вещественного параметра Δ: I. $-1 < \Delta < 1$, II. $\Delta \geqslant 1$, III. $\Delta \leqslant -1$. В области I параметр η принимает вещественные значения, $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$; в области II $\eta = i\eta'$, $0 \leqslant \eta' < \infty$; в области III $\eta = \frac{\pi}{2} + i\eta'$, $0 \leqslant \eta' < \infty$.

Для η из области I положим

$$\widetilde{\mathscr{L}}_n(\lambda) = i\mathscr{L}_n(i\lambda), \tag{3.35}$$

для η из области II

$$\widetilde{\mathscr{L}}_n(\lambda) = \mathscr{L}_n(\lambda) \tag{3.36}$$

и для η из области III

$$\widetilde{\mathscr{L}}_n(\lambda) = i\mathscr{L}_n(\lambda). \tag{3.37}$$

Тогда для операторных матричных элементов так определенных локальных матриц перехода $\widetilde{\mathscr{L}}_n(\lambda)$ из (3.1) получаем, что

$$\widetilde{\mathscr{L}}^{*}_{n,11}(\lambda) = \widetilde{\mathscr{L}}_{n,22}(\bar{\lambda}), \qquad \widetilde{\mathscr{L}}^{*}_{n,12}(\lambda) = \pm\widetilde{\mathscr{L}}_{n,21}(\bar{\lambda}), \tag{3.38}$$

где знак «—» соответствует значениям η в областях I и II, знак «+» — области III, а черта и $*$ означают комплексное и эрмитово сопряжение, соответственно. Для матрицы $\mathcal{L}$ над кольцом $\mathfrak{B}_N$ обозначим через $\bar{\mathcal{L}}$ матрицу с матричными элементами $\bar{\mathcal{L}}_{jk} = \mathcal{L}^*_{jk}$. Формулы (3.38) переписываются в виде

$$\bar{\tilde{\mathcal{L}}}_n(\lambda) = \sigma^2 \tilde{\mathcal{L}}_n(\bar{\lambda})\,\sigma^2 \tag{3.39}$$

для η из областей I и II и

$$\bar{\tilde{\mathcal{L}}}_n(\lambda) = \sigma^1 \tilde{\mathcal{L}}_n(\bar{\lambda})\,\sigma^1 \tag{3.40}$$

для η из области III.

Пусть $\tilde{\mathcal{T}}(\lambda)$ — матрица монодромии, построенная по локальным матрицам перехода $\tilde{\mathcal{L}}_n(\lambda)$ (3.35) — (3.37). Поскольку операторные матричные элементы матриц $\tilde{\mathcal{L}}_n(\lambda)$ коммутируют при разных n, то

$$\overline{\tilde{\mathcal{L}}_m \tilde{\mathcal{L}}_n} = \bar{\tilde{\mathcal{L}}}_m \bar{\tilde{\mathcal{L}}}_n, \qquad m \neq n. \tag{3.41}$$

Тем самым из локального свойства (3.39) — (3.40) следует аналогичное свойство для матрицы монодромии $\tilde{\mathcal{T}}(\lambda)$, т. е.

$$\bar{\tilde{\mathcal{T}}}(\lambda) = \sigma^2 \tilde{\mathcal{T}}(\bar{\lambda})\,\sigma^2 \tag{3.42}$$

и соответственно

$$\bar{\tilde{\mathcal{T}}}(\lambda) = \sigma^1 \tilde{\mathcal{T}}(\bar{\lambda})\,\sigma^1. \tag{3.43}$$

Таким образом, в случае вещественных Δ матрица монодромии удовлетворяет дополнительным соотношениям (3.42) — (3.43), т. е.

$$\tilde{A}^*(\lambda) = \tilde{D}(\bar{\lambda}), \qquad \tilde{C}^*(\lambda) = \pm \tilde{B}(\bar{\lambda}), \tag{3.44}$$

где знак «—» соответствует значениям η в областях I и II, а «+» — области III.

Поскольку оператор H в рассматриваемом случае является эрмитовым, то собственные векторы вида (3.16) ортогональны для различных собственных значений (3.18). Однако эти состояния являются ненормированными. В случае вещественных Δ для вычисления скалярных произведений векторов вида (3.16) оказывается полезным использовать формулы (3.44) и перестановочное соотношение для операторов $\tilde{B}(\lambda)$ и $\tilde{C}(\mu)$, содержащееся в (3.9), т. е.

$$[\tilde{C}(\lambda), \tilde{B}(\mu)] = \frac{\tilde{b}(\lambda, \mu)}{\tilde{c}(\lambda, \mu)} (\tilde{A}(\mu)\tilde{D}(\lambda) - \tilde{A}(\lambda)\tilde{D}(\mu)). \tag{3.45}$$

Отправляясь от соотношения (3.45), из оператора $\tilde{B}(\lambda)$ — оператора рождения ненормированных элементарных возбуждений над состоянием Ω, можно построить оператор рождения нормированных собственных состояний гамильтониана H. Не вдаваясь в дальнейшие подробности, ограничимся сказанным.

В заключение подведем итоги этого параграфа. Используя соотношение (3.8) и существование и свойства порождающего вектора Ω — формулы (3.14) — (3.15),— мы получили алгебраизацию анзатца Бете для нахождения собственных значений и собственных векторов трансфер-матрицы $T(\lambda)$ шестивершинной модели — следа матрицы монодромии $\mathcal{T}(\lambda)$. Собственные векторы оператора $T(\lambda)$ получаются применением к состоянию Ω операторов рождения $B(\lambda_l)$ — матричных элементов матрицы монодромии $\mathcal{T}(\lambda)$ при значениях λ_l, удовлетворяющих системе трансцендентных уравнений (3.17). Собственные значения при этом даются формулами (3.18). Мы показали, как полученные результаты для шестивершинной модели приводят к классическим результатам (3.32) — (3.34) для XXZ модели Гейзенберга. Мы рассмотрели физически интересный случай вещественных Δ. Матрица монодромии $\mathcal{T}(\lambda)$ при этом допускает инволюцию (3.42) — (3.43) и оператор рождения $B(\lambda)$ оказывается сопряженным к оператору $C(\lambda)$ — оператору уничтожения элементарных возбуждений над состоянием Ω. Мы предложили в этом случае схему построения нормированных собственных векторов оператора H, использующую соотношения (3.44) и (3.45).

§ 4. Порождающие векторы и перестановочные соотношения

Этот параграф мы посвятим рассмотрению общего случая — восьмивершинной решетчатой модели. Соответствующая ей локальная матрица перехода $\mathcal{L}_n(\lambda)$ имеет вид (1.11), т. е.

$$\mathcal{L}_n(\lambda)=\begin{pmatrix} w_4\sigma_n^4+w_3\sigma_n^3 & w_1\sigma_n^1-iw_2\sigma_n^2 \\ w_1\sigma_n^1+iw_2\sigma_n^2 & w_4\sigma_n^4-w_3\sigma_n^3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha_n(\lambda) & \beta_n(\lambda) \\ \gamma_n(\lambda) & \delta_n(\lambda)\end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

где коэффициенты w_j определяются формулами (1.45):

$$\begin{cases} w_4+w_3=\Theta(2\eta)\,\Theta(\lambda-\eta)\,\mathrm{H}(\lambda+\eta), \\ w_4-w_3=\Theta(2\eta)\,\mathrm{H}(\lambda-\eta)\,\Theta(\lambda+\eta), \\ w_1+w_2=\mathrm{H}(2\eta)\,\Theta(\lambda-\eta)\,\Theta(\lambda+\eta), \\ w_1-w_2=\mathrm{H}(2\eta)\,\mathrm{H}(\lambda-\eta)\,\mathrm{H}(\lambda+\eta). \end{cases} \tag{4.2}$$

Матрицы $\mathcal{L}_n(\lambda)$ удовлетворяют соотношению Бакстера — Янга, в котором $\mathcal{R}$-матрица имеет вид (1.39), (1.46), а именно

$$\mathcal{R}(\lambda,\mu)=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

где

$$\begin{cases} a(\lambda,\mu)=\Theta(2\eta)\,\Theta(\lambda-\mu)\,\mathrm{H}(\lambda-\mu+2\eta), \\ b(\lambda,\mu)=\mathrm{H}(2\eta)\,\Theta(\lambda-\mu)\,\Theta(\lambda-\mu+2\eta), \\ c(\lambda,\mu)=\Theta(2\eta)\,\mathrm{H}(\lambda-\mu)\,\Theta(\lambda-\mu+2\eta), \\ d(\lambda,\mu)=\mathrm{H}(2\eta)\,\mathrm{H}(\lambda-\mu)\,\mathrm{H}(\lambda-\mu+2\eta). \end{cases} \tag{4.4}$$

Матрица монодромии $\mathcal{T}(\lambda)$ определяется формулой (1.13) и как матрица порядка 2×2 над кольцом $\mathfrak{B}_N$ имеет вид

$$\mathcal{T}(\lambda)=\begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda)\end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Она удовлетворяет равенству (1.42)

$$\mathcal{R}(\lambda,\mu)\,(\mathcal{T}(\lambda)\otimes\mathcal{T}(\mu))=(\mathcal{T}(\mu)\otimes\mathcal{T}(\lambda))\,\mathcal{R}(\lambda,\mu), \tag{4.6}$$

в котором содержатся все перестановочные соотношения между операторами $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$.

Формулы (4.1) — (4.2) показывают, что в отличие от случая шестивершинной модели, оператор $\gamma_n(\lambda)$ является невырожденным при почти всех λ. Тем самым у нас нет возможности получить локальный вакуум ни для матрицы $\mathcal{L}_n(\lambda)$, ни для конечного произведения таких матриц. Кроме того, в рассматриваемом случае коэффициент $d(\lambda,\mu)$ отличен от 0, так что и перестановочные соотношения для операторов $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ и $D(\lambda)$ уже не имеют простого вида (3.9). Таким образом, развитый в § 3 метод непосредственно неприменим к случаю восьмивершинной модели. Однако мы сможем дать надлежащее обобщение рассуждений § 3, приводящее к решению восьмивершинной модели. При этом вместо порождающего вектора (1.14) мы будем использовать семейство порождающих векторов, а вместо соотношений (3.9) — серию перестановочных соотношений для различных линейных комбинаций операторов $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ и $D(\lambda)$.

Перейдем к построению семейства порождающих векторов. Мы будем использовать следующее соображение: матрица монодромии $\mathcal{T}(\lambda)$ вычисляется, если мы заменим локальные матрицы перехода $\mathcal{L}_n(\lambda)$ на матрицы $\mathcal{L}'_n(\lambda)$, калибровочно эквивалентные матрицам $\mathcal{L}_n(\lambda)$:

$$\mathcal{L}'_n(\lambda) = M_{n+1}^{-1}(\lambda)\,\mathcal{L}_n(\lambda)\,M_n(\lambda), \tag{4.7}$$

где $M_n(\lambda)$ — произвольные невырожденные числовые матрицы порядка 2×2. Действительно, новая матрица монодромии

$$\mathcal{T}'(\lambda) = \overleftarrow{\prod_{n=1}^{N}}\,\mathcal{L}'_n(\lambda) \tag{4.8}$$

отличается от матрицы $\mathcal{T}(\lambda)$ лишь простым линейным преобразованием

$$\mathcal{T}'(\lambda) = M_{N+1}^{-1}(\lambda)\,\mathcal{T}(\lambda)\,M_1(\lambda). \tag{4.9}$$

Оказывается, что калибровочные преобразования $M_n(\lambda)$ можно подобрать таким образом, чтобы каждая матрица $\mathcal{L}'_n(\lambda)$ имела независящий от λ локальный вакуум, аннулируемый при всех λ ее левым нижним элементом. Этим условием определяется первый столбец матрицы $M_n(\lambda)$. Второй столбец определяется, если потребовать, чтобы диагональные матричные элементы матрицы $\mathcal{L}'_n(\lambda)$ действовали на локальный вакуум по возможности более простым образом. Соответствующие формулы можно извлечь из работ Бакстера [19] — [20]. Выясняется, что существует целое семейство калибровочных преобразований $M_n^l(\lambda;\ s,\ t)$, зависящих от целого числа l и произвольных комплексных параметров s и t. Мы будем обозначать

$$M_{n+l-1}(\lambda; s,\ t) = M_n^l(\lambda;\ s,\ t), \qquad M_k = \begin{pmatrix} x_k^1 & y_k^1 \\ x_k^2 & y_k^2 \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

где

$$\left\{\begin{array}{ll} x_k^1 = \mathrm{H}(s+2k\eta-\lambda), & x_k^2 = \Theta(s+2k\eta-\lambda), \\ y_k^1 = \dfrac{1}{g(\tau_k)}\,\mathrm{H}(t+2k\eta+\lambda), & y_k^2 = \dfrac{1}{g(\tau_k)}\,\Theta(t+2k\eta+\lambda) \end{array}\right. \tag{4.11}$$

и $g(u) = \mathrm{H}(u)\,\Theta(u)$, а $\tau_k = \dfrac{s+t}{2} + 2k\eta - K$. Здесь K — полупериод функции $\Theta(u)$ (см. приложение I).

Соответствующие локальные матрицы перехода $\mathcal{L}'_n(\lambda)$ обозначим через

$$\mathcal{L}_n^l(\lambda;\ s,\ t) = \tag{4.12}$$

$$= M_{n+l}^{-1}(\lambda;\ s,\ t)\,\mathcal{L}_n(\lambda)\,M_{n+l-1}(\lambda;\ s,\ t) = \begin{pmatrix} \alpha_n^l(\lambda) & \beta_n^l(\lambda) \\ \gamma_n^l(\lambda) & \delta_n^l(\lambda) \end{pmatrix}.$$

В дальнейших формулах мы не будем, там где нет такой необходимости, указывать явно зависимость введенных объектов от s и t, так как эти параметры предполагаются фиксированными.

Посредством $\mathcal{T}_N^l(\lambda)$ обозначим матрицу монодромии $\mathcal{T}'(\lambda)$

$$\mathcal{T}_N^l(\lambda) = M_{N+l}^{-1}(\lambda)\,\mathcal{T}(\lambda)\,M_l(\lambda), \tag{4.13}$$

с матричными элементами $A_N^l(\lambda)$, $B_N^l(\lambda)$, $C_N^l(\lambda)$, $D_N^l(\lambda)$.

Локальный вакуум $\omega_n^l \in \mathfrak{h}_n$, удовлетворяющий уравнению

$$\gamma_n^l(\lambda)\,\omega_n^l = 0, \tag{4.14}$$

существует и дается формулой

$$\omega_n^l = \mathrm{H}(s+2(n+l)\eta-\eta)\,e_n^+ + \Theta(s+2(n+l)\eta-\eta)\,e_n^- . \tag{4.15}$$

В отличие от случая шестивершинной модели, локальный вакуум ω_n^l не является собственным вектором для операторов $\alpha_n^l(\lambda)$ и $\delta_n^l(\lambda)$. Однако он просто преобразуется под действием этих операторов:

$$\begin{cases} \alpha_n^l(\lambda)\,\omega_n^l = h(\lambda+\eta)\,\omega_n^{l-1}, \\ \delta_n^l(\lambda)\,\omega_n^l = h(\lambda-\eta)\,\omega_n^{l+1}, \end{cases} \tag{4.16}$$

где

$$h(u) = \Theta(0)\,g(u) = \Theta(0)\,\mathrm{H}(u)\,\Theta(u). \tag{4.17}$$

Формулы (4.11) — (4.12) и (4.14) — (4.17) легко проверяются на основании теорем сложения для тэта-функций Якоби.

Из локальных формул (4.12) — (4.17) получаем, что векторы

$$\Omega_N^l = \omega_1^l \otimes \ldots \otimes \omega_N^l \tag{4.18}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} A_N^l(\lambda)\,\Omega_N^l = h^N(\lambda+\eta)\,\Omega_N^{l-1}, \\ D_N^l(\lambda)\,\Omega_N^l = h^N(\lambda-\eta)\,\Omega_N^{l+1}, \\ C_N^l(\lambda)\,\Omega_N^l = 0. \end{cases} \tag{4.19}$$

Построенное семейство $\{\Omega_N^l\}_{l=-\infty}^{l=\infty}$ мы будем называть семейством порождающих векторов для трансфер-матрицы восьмивершинной модели.

Формулы (4.19) показывают, что наряду с трансфер-матрицей $\mathcal{T}(\lambda)$ оказывается полезным рассматривать и матрицы вида (4.13). Введем набор матриц

$$\mathcal{T}_{k,l}(\lambda) = M_k^{-1}(\lambda)\,\mathcal{T}(\lambda)\,M_l(\lambda) \qquad (k,\ l = -\infty, \ldots, \infty), \tag{4.20}$$

с операторными матричными элементами $A_{k,l}(\lambda)$, $B_{k,l}(\lambda)$, $C_{k,l}(\lambda)$ и $D_{k,l}(\lambda)$. Очевидно, что при всех значениях l

$$T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda) = A_{l,l}(\lambda) + D_{l,l}(\lambda). \tag{4.21}$$

Введенная выше матрица монодромии $\mathcal{T}_N^l(\lambda)$ в новых обозначениях записывается как $\mathcal{T}_{N+l,l}(\lambda)$.

Оказывается, что перестановочные соотношения (4.6) для операторов $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ и $D(\lambda)$ приводят к более простым соотношениям для операторов $A_{k,l}(\lambda)$, $B_{k,l}(\lambda)$, $C_{k,l}(\lambda)$ и $D_{k,l}(\lambda)$, которые по своей структуре немного напоминают формулы (3.9).

Перейдем к выводу этих перестановочных соотношений. Введем ковариантные векторы $X_l(\lambda)$, $Y_l(\lambda)$

$$X_l(\lambda) = \begin{pmatrix} x_l^1 \\ x_l^2 \end{pmatrix}, \qquad Y_l(\lambda) = \begin{pmatrix} y_l^1 \\ y_l^2 \end{pmatrix}, \tag{4.22}$$

где компоненты x_l^1, x_l^2, y_l^1, y_l^2 определяются из формул (4.11), и контравариантные векторы $\widetilde{X}_l(\lambda)$, $\widetilde{Y}_l(\lambda)$

$$\widetilde{X}_l(\lambda) = (-x_l^2,\ x_l^1), \qquad \widetilde{Y}_l(\lambda) = (y_l^2,\ -y_l^1). \tag{4.23}$$

Из теорем сложения для тэта-функций Якоби следует, что

$$\det M_l(\lambda)=\frac{2g\left(\lambda+\frac{t-s}{2}\right)}{g(K)}, \tag{4.24}$$

т. е. $\det M_l(\lambda)$ не зависит от l; обозначим его через $m(\lambda)$. Из формул (4.11), (4.20), (4.22) и (4.23) мы получаем, что

$$\begin{cases} A_{k,l}(\lambda)=\dfrac{1}{m(\lambda)}\tilde{Y}_k(\lambda)\mathcal{T}(\lambda)X_l(\lambda), \\ B_{k,l}(\lambda)=\dfrac{1}{m(\lambda)}\tilde{Y}_k(\lambda)\mathcal{T}(\lambda)Y_l(\lambda), \\ C_{k,l}(\lambda)=-\dfrac{1}{m(\lambda)}\tilde{X}_k(\lambda)\mathcal{T}(\lambda)X_l(\lambda), \\ D_{k,l}(\lambda)=-\dfrac{1}{m(\lambda)}\tilde{X}_k(\lambda)\mathcal{T}(\lambda)Y_l(\lambda). \end{cases} \tag{4.25}$$

Формулы (4.25) показывают, что для того, чтобы из равенства (4.6) получить перестановочные соотношения для операторов $A_{k,l}(\lambda)$, $B_{k,l}(\lambda)$ $C_{k,l}(\lambda)$, $D_{k,l}(\lambda)$, мы должны применять матрицу $\mathcal{R}(\lambda,\mu)$ к тензорным произведениям ковариантных векторов вида (4.22) и к тензорным произведениям контравариантных векторов вида (4.23). Оказывается, что в результате такого действия мы получим векторы того же вида.

Положим

$$X(u)=\mathrm{H}(u)e_{+}+\Theta(u)e_{-},\qquad \tau=\frac{u+v}{2}-K. \tag{4.26}$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\mathcal{R}(\lambda,\mu)(X(u-2\eta)\otimes X(u+\lambda-\mu))= \\ =h(\lambda-\mu+2\eta)X(u+\lambda-\mu-2\eta)\otimes X(u), \tag{4.27}$$

$$\mathcal{R}(\lambda,\mu)(X(u+2\eta)\otimes X(u-\lambda+\mu))= \\ =h(\lambda-\mu+2\eta)X(u-\lambda+\mu+2\eta)\otimes X(u), \tag{4.28}$$

$$\mathcal{R}(\lambda,\mu)(X(u-2\eta)\otimes X(v+\lambda-\mu))= \\ =\frac{h(2\eta)g(\tau+\lambda-\mu)}{g(\tau)}X(u-\lambda+\mu-2\eta)\otimes X(v)+ \\ +\frac{h(\lambda-\mu)g(\tau-2\eta)}{g(\tau)}X(v+\lambda-\mu+2\eta)\otimes X(u), \tag{4.29}$$

$$\mathcal{R}(\lambda,\mu)(X(u+2\eta)\otimes X(v-\lambda+\mu))= \\ =\frac{h(2\eta)g(\tau-\lambda+\mu)}{g(\tau)}X(u+\lambda-\mu+2\eta)\otimes X(v)+ \\ +\frac{h(\lambda-\mu)g(\tau+2\eta)}{g(\tau)}X(v-\lambda+\mu-2\eta)\otimes X(u). \tag{4.30}$$

Формулы (4.27) — (4.30) проверяются на основании теорем сложения для тэта-функций Якоби. Отметим, что соотношения (4.14) — (4.16) содержатся в равенствах (4.27) — (4.30). Для этого нужно лишь вспомнить формулы (1.48) — (1.50), которые показывают, что $\mathcal{L}_n(\lambda)$, как матрица порядка 4×4 в локальном пространстве, имеет такую же матричную структуру, как и $\mathcal{R}$-матрица.

Заменим теперь в формуле (4.27) переменную u на $s+2(l+1)\eta-\lambda$. Мы получим, что

$$\mathcal{R}(\lambda,\mu)(X_l(\lambda)\otimes X_{l+1}(\mu))=h(\lambda-\mu+2\eta)X_l(\mu)\otimes X_{l+1}(\lambda). \tag{4.31}$$

Заменив в (4.28) u на $t+2l\eta+\lambda$, получим

$$(4.32)\qquad \mathcal{R}(\lambda,\ \mu)(Y_{l+1}(\lambda)\otimes Y_l(\mu))=h(\lambda-\mu+2\eta)Y_{l+1}(\mu)\otimes Y_l(\lambda).$$

И наконец, заменив в (4.29) u на $t+2(k+1)\eta+\lambda$, v на $s+2l\eta-\lambda$, τ на $\tau_{(k+l+1)/2}$, а в (4.30) u на $s+2(k-1)\eta-\lambda$, v на $t+2l\eta+\lambda$, τ на $\tau_{k+l-1)/2}$, мы получим соответственно следующие формулы:

$$(4.33)\qquad \mathcal{R}(\lambda,\ \mu)(Y_k(\lambda)\otimes X_l(\mu))=$$
$$=\frac{h(2\eta)\,g(\tau_{(k+l+1)/2}+\lambda-\mu)}{g(\tau_{(k+l+1)/2})}Y_k(\mu)\otimes X_l(\lambda)+$$
$$+\frac{h(\lambda-\mu)\,g(\tau_{(k+l-1)/2})}{g(\tau_{(k+l+1)/2})}\frac{g(\tau_{k+1})}{g(\tau_k)}X_{l+1}(\mu)\otimes Y_{k+1}(\lambda)$$

и

$$(4.34)\qquad \mathcal{R}(\lambda,\ \mu)(X_k(\lambda)\otimes Y_l(\mu))=$$
$$=\frac{h(2\eta)\,g(\tau_{(k+l-1)/2}+\mu-\lambda)}{g(\tau_{(k+l-1)/2})}X_k(\mu)\otimes Y_l(\lambda)+$$
$$+\frac{h(\lambda-\mu)\,g(\tau_{(k+l+1)/2})\,g(\tau_{l-1})}{g(\tau_{(k+l-1)/2})\,g(\tau_l)}Y_{l-1}(\mu)\otimes X_{k-1}(\lambda).$$

Аналогичные формулы имеют место и для контравариантных векторов $\widetilde{X}_k(\lambda)$, $\widetilde{Y}_l(\lambda)$:

$$(4.35)\qquad (\widetilde{Y}_l(\mu)\otimes\widetilde{Y}_{l+1}(\lambda))\,\mathcal{R}(\lambda,\ \mu)=h(\lambda-\mu+2\eta)\,\widetilde{Y}_l(\lambda)\otimes\widetilde{Y}_{l+1}(\mu),$$

$$(4.36)\qquad (\widetilde{X}_{l+1}(\mu)\otimes\widetilde{X}_l(\lambda))\,\mathcal{R}(\lambda,\ \mu)=h(\lambda-\mu+2\eta)\,\widetilde{X}_{l+1}(\lambda)\otimes\widetilde{X}_l(\mu),$$

$$(4.37)\qquad (\widetilde{X}_k(\mu)\otimes\widetilde{Y}_l(\lambda))\,\mathcal{R}(\lambda,\ \mu)=$$
$$=\frac{h(2\eta)\,g(\tau_{(k+l+1)/2}+\lambda-\mu)}{g(\tau_{(k+l+1)/2})}\widetilde{X}_k(\lambda)\otimes\widetilde{Y}_l(\mu)+$$
$$+\frac{h(\lambda-\mu)\,g(\tau_{(k+l-1)/2})\,g(\tau_{l+1})}{g(\tau_{(k+l+1)/2})\,g(\tau_l)}\widetilde{Y}_{l+1}(\lambda)\otimes\widetilde{X}_{k+1}(\mu),$$

$$(4.38)\qquad (\widetilde{Y}_k(\mu)\otimes\widetilde{X}_l(\lambda))\,\mathcal{R}(\lambda,\ \mu)=$$
$$=\frac{h(2\eta)\,g(\tau_{(k+l-1)/2}+\mu-\lambda)}{g(\tau_{(k+l-1)/2})}\widetilde{Y}_k(\lambda)\otimes\widetilde{X}_l(\mu)+$$
$$+\frac{h(\lambda-\mu)\,g(\tau_{(k+l+1)/2})\,g(\tau_{k-1})}{g(\tau_{(k+l-1)/2})\,g(\tau_k)}\widetilde{X}_{l-1}(\lambda)\otimes\widetilde{Y}_{k-1}(\mu).$$

С помощью формул (4.31) — (4.38) мы, используя соотношение (4.6), можем получить все перестановочные соотношения между операторами (4.25). Опираясь на эти перестановочные соотношения и формулы (4.19), в следующем параграфе мы построим алгебраическое обобщение анзатца Бете для нахождения собственных значений и собственных векторов трансфер-матрицы восьмивершинной модели.

Выведем необходимые для этого перестановочные соотношения. Умножим соотношение (4.6) слева на вектор

$$\frac{1}{m(\lambda)\,m(\mu)}\widetilde{Y}_k(\mu)\otimes\widetilde{Y}_{k+1}(\lambda)$$

и справа на

$$Y_{l+1}(\lambda)\otimes Y_l(\mu).$$

Используя формулы (4.25) и равенства (4.32), (4.35), мы получим, что при всех значениях k и l имеет место соотношение

$$(4.39)\qquad B_{k,l+1}(\lambda)B_{k+1,l}(\mu) = B_{k,l+1}(\mu)B_{k+1,l}(\lambda).$$

Умножим теперь (4.6) слева на вектор

$$\frac{1}{m(\lambda)m(\mu)}\tilde{Y}_k(\mu)\otimes\tilde{Y}_{k+1}(\lambda)$$

и справа на

$$Y_{l-2}(\lambda)\otimes X_{l-1}(\mu).$$

Мы получим, используя формулы (4.25), (4.33) и (4.35), что при всех значениях k и l справедливо следующее соотношение:

$$(4.40)\qquad h(\lambda-\mu+2\eta)B_{k,l-2}(\lambda)A_{k+1,l-1}(\mu)= \\ = h(\lambda-\mu)A_{k,l}(\mu)B_{k+1,l-1}(\lambda)+ \\ +\frac{h(2\eta)g(\tau_{l-1}+\lambda-\mu)}{g(\tau_{l-1})}B_{k,l-2}(\mu)A_{k+1,l-1}(\lambda).$$

И наконец, умножим (4.6) слева на

$$\frac{1}{m(\lambda)m(\mu)}\tilde{Y}_{k+2}(\mu)\otimes\tilde{X}_{k+1}(\lambda)$$

и справа на

$$Y_l(\lambda)\otimes Y_{l-1}(\mu).$$

Формулы (4.25), (4.32) и (4.38) показывают, что при всех значениях k и имеет место следующее соотношение:

$$(4.41)\qquad h(\lambda-\mu+2\eta)B_{k+2,l}(\mu)D_{k+1,l-1}(\lambda)= \\ = h(\lambda-\mu)D_{k,l}(\lambda)B_{k+1,l-1}(\mu)+ \\ +\frac{h(2\eta)g(\tau_{k+1}+\mu-\lambda)}{g(\tau_{k+1})}B_{k+2,l}(\lambda)D_{k+1,l-1}(\mu).$$

Аналогичным образом выводятся остальные перестановочные соотношения для операторов $A_{k,l}(\lambda)$, $B_{k,l}(\lambda)$, $C_{k,l}(\lambda)$ и $D_{k,l}(\lambda)$. В дальнейшем они нам не понадобятся, поэтому не будем их здесь приводить.

Подведем итоги. Мы установили, что в случае восьмивершинной модели оказывается полезным наряду с матрицей монодромии $\mathcal{T}(\lambda)$ рассматривать также и матрицы $\mathcal{T}_{k,l}(\lambda)$. Мы построили семейство порождающих векторов $\{\Omega_N^l\}_{l=-\infty}^{l=\infty}$, на элементы которого операторные коэффициенты матриц $\mathcal{T}_{k,l}(\lambda)$ действуют по формулам (4.19), и получили серию перестановочных соотношений для операторов $A_{k,l}(\lambda)$, $B_{k,l}(\lambda)$ и $D_{k,l}(\lambda)$.

§ 5. Обобщенный анзатц Бете

В этом параграфе мы, используя формулы (4.19) и (4.39) — (4.41), построим алгебраическое обобщение анзатца Бете для нахождения собственных значений и собственных векторов трансфер-матрицы $T(\lambda)$ — следа матрицы $\mathcal{T}_{l,l}(\lambda)$.

Перепишем перестановочные соотношения (4.39) — (4.41) в удобном для нас виде:

$$(5.1)\qquad B_{k,l+1}(\lambda)B_{k+1,l}(\mu)=B_{k,l+1}(\mu)B_{k+1,l}(\lambda),$$

$$(5.2)\qquad A_{k,l}(\lambda)B_{k+1,l-1}(\mu)=\alpha(\lambda,\mu)B_{k,l-2}(\mu)A_{k+1,l-1}(\lambda)- \\ -\beta_{l-1}(\lambda,\mu)B_{k,l-2}(\lambda)A_{k+1,l-1}(\mu),$$

$$(5.3)\qquad D_{k,l}(\lambda)B_{k+1,l-1}(\mu)=\alpha(\mu,\lambda)B_{k+2,l}(\mu)D_{k+1,l-1}(\lambda)+ \\ +\beta_{k+1}(\lambda,\mu)B_{k+2,l}(\lambda)D_{k+1,l-1}(\mu),$$

где

$$(5.4)\qquad \alpha(\lambda,\ \mu)=\frac{h(\lambda-\mu-2\eta)}{h(\lambda-\mu)},\qquad \beta_k(\lambda,\ \mu)=\frac{h(2\eta)\,h(\tau_k+\mu-\lambda)}{h(\mu-\lambda)\,h(\tau_k)}.$$

Рассмотрим вектор

$$(5.5)\qquad \Psi_l(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)=B_{l+1,\,l-1}(\lambda_1)\ \ldots\ B_{l+n,\,l-n}(\lambda_n)\Omega_N^{l-n},$$

где $n=N/2$ (мы считаем, что N четно). В силу формулы (5.1) вектор $\Psi_l(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)$ является симметрической функцией переменных $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$. Применим к вектору $\Psi_l(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)$ оператор $A_{l,l}(\lambda)$. Используя перестановочное соотношение (5.2) при $k=l$, прокоммутируем $A_{l,l}(\lambda)$ с $B_{l+1,\,l-1}(\lambda_1)$ и, снова используя (5.2) при $k=l+j$, $l=l-j$, пронесем возникшие операторы $A_{l+j,l-j}$ через $B_{l+j+1,\,l-j-1}(\lambda_{j+1})$ к вектору Ω_N^{l-n}. С помощью (4.19) мы получим, что

$$(5.6)\qquad A_{l,\,l}(\lambda)\,\Psi_l(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)={}_1\Lambda(\lambda;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)\,\Psi_{l-1}(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}{}_1\Lambda_j^l(\lambda;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)\,\Psi_{l-1}(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{j-1},\ \lambda,\ \lambda_{j+1},\ \ldots,\ \lambda_n).$$

Подчеркнем, что в отличие от формулы (3.16) число операторов $B_{l+j,\,l-j}(\lambda_j)$ в выражении (5.5) не произвольно, а равно в точности $N/2$. Это связано с тем, что после коммутации оператора $A_{l,\,l}$ со всеми операторами $B_{l+j,\,l-j}$ в (5.5) мы получим оператор $A_{l+n,\,l-n}$, который, как это следует из (4.19), мы можем применить к вектору Ω_N^{l-n} лишь при условии $n=N/2$.

Коэффициенты ${}_1\Lambda$, ${}_1\Lambda_j^l$ $(j=1,\ \ldots,\ n)$ легко вычисляются с помощью уже использованного нами в § 3 приема, который основан на симметричности левой части равенства (5.6) по отношению к перестановкам чисел $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$. В результате мы приходим к выражениям

$$(5.7)\qquad {}_1\Lambda(\lambda;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)=h^N(\lambda+\eta)\prod_{k=1}^{n}\alpha(\lambda,\ \lambda_k),$$

и

$$(5.8)\qquad {}_1\Lambda_j^l(\lambda;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)=-\beta_{l-1}(\lambda,\ \lambda_j)\,h^N(\lambda_j+\eta)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\alpha(\lambda_j,\ \lambda_k)$$
$$(j=1,\ \ldots,\ n).$$

Аналогичным образом получаем, что

$$(5.9)\qquad D_{l,\,l}(\lambda)\,\Psi_l(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)={}_2\Lambda(\lambda;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)\,\Psi_{l+1}(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}{}_2\Lambda_j^l(\lambda;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)\,\Psi_{l+1}(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{j-1},\ \lambda,\ \lambda_{j+1},\ \ldots,\ \lambda_n),$$

где

$$(5.10)\qquad {}_2\Lambda(\lambda;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)=h^N(\lambda-\eta)\prod_{k=1}^{n}\alpha(\lambda_k,\ \lambda),$$

и

$$(5.11)\qquad {}_2\Lambda_j^l(\lambda;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)=\beta_{l+1}(\lambda,\ \lambda_j)\,h^N(\lambda_j-\eta)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\alpha(\lambda_k,\ \lambda_j)$$
$$(j=1,\ \ldots,\ n).$$

Умножим соотношения (5.6) и (5.9) на $\exp\{2\pi il\theta\}$, где $0\leqslant\theta<1$, сложим их и просуммируем получившиеся выражения по всем целым l от $-\infty$

до ∞. Мы получим, что

$$(5.12)\qquad T(\lambda)\Psi_\theta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \\ = \{e^{2\pi i\theta_1}\Lambda(\lambda;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n) + e^{-2\pi i\theta_2}\Lambda(\lambda;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n)\}\Psi_\theta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + \\ + \sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi il\theta}\{e^{2\pi i\theta_1}\Lambda_j^{l+1}(\lambda;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n) + \\ + e^{-2\pi i\theta_2}\Lambda_j^{l-1}(\lambda;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n)\}\Psi_l(\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n),$$

где

$$(5.13)\qquad \Psi_\theta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{2\pi il\theta}\Psi_l(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Формулы (5.8), (5.11) и (5.12) показывают, что $\Psi_\theta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ является собственным вектором трансфер-матрицы $T(\lambda)$ с собственным значением

$$(5.14)\qquad e^{2\pi i\theta_1}\Lambda(\lambda;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n) + e^{-2\pi i\theta_2}\Lambda(\lambda;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

если числа λ_j удовлетворяют системе трансцендентных уравнений

$$(5.15)\qquad \frac{h^N(\lambda_j+\eta)}{h^N(\lambda_j-\eta)} = e^{-4\pi i\theta}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{\alpha(\lambda_k, \lambda_j)}{\alpha(\lambda_j, \lambda_k)}\qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Сходимость ряда (5.13), конечно, требует особого исследования. Аналогия с формулой суммирования Пуассона и теорией автоморфных функций наводит на предположение, что этот ряд суммируется к нулю для всех θ, за исключением конечного числа значений θ_j. Для таких θ_j числа (5.14) будут собственными значениями трансфер-матрицы $T(\lambda)$.

Система (5.15) при специальных значениях θ была получена Бакстером в работе [9]. Результаты Бакстера показывают, что среди чисел θ_j находится и значение $\theta = 0$. Мы убедимся в этом в § 6.

Ситуация упрощается, если мы наложим ограничения на область изменения параметра η. Пусть Γ — решетка периодов функции $\mathrm{sn}(u, k)$, т. е. решетка с образующими $4K$ и $2iK'$ (см. приложение I). Предположим, что 2η является точкой конечного порядка на эллиптической кривой $\mathscr{E} = \mathbb{C}^1/\Gamma$, т. е. существует целое число Q такое, что $2Q\eta$ принадлежит решетке Γ. Другими словами, имеет место равенство

$$(5.16)\qquad Q\eta = 2m_1K + im_2K'$$

с целыми m_1 и m_2. Поскольку тэта-функции Якоби являются квазидвоякопериодическими функциями с квазипериодами $2K$ и $2iK'$ (см. приложение I), то введенные объекты $M_{k,l}(\lambda)$, $\mathscr{T}_{k,l}(\lambda)$, $\Psi_l(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ будут квазипериодическими функциями индексов k и l с квазипериодом Q. Выбором общего нормирующего множителя в (1.36) можно добиться, чтобы они стали периодическими функциями k и l с периодом Q.

Положим $A = \pi im_2/4QK\eta$ и определим

$$(5.17)\qquad \tilde{\mathrm{H}}(u) = \exp\{A(u-K)^2\}\mathrm{H}(u),\quad \tilde{\Theta}(u) = \exp\{A(u-K)^2\}\Theta(u).$$

Из квазипериодических соотношений для тэта-функций Якоби следует, что

$$(5.18)\qquad \tilde{\mathrm{H}}(u+2Q\eta) = \tilde{\mathrm{H}}(u),\quad \tilde{\Theta}(u+2Q\eta) = \tilde{\Theta}(u).$$

Выберем теперь конкретную реализацию проективной параметризации (1.36), взяв в качестве общего нормирующего множителя

$$\sqrt{k}\,\tilde{\Theta}(-2\eta)\,\tilde{\Theta}(\eta-\lambda)\,\tilde{\Theta}(\eta+\lambda).$$

Мы получим

$$(5.19)\qquad \begin{cases} w_4+w_3=\widetilde{\Theta}(-2\eta)\,\widetilde{\Theta}(\eta-\lambda)\,\widetilde{\mathrm{H}}(\eta+\lambda),\\ w_4-w_3=-\widetilde{\Theta}(-2\eta)\,\widetilde{\mathrm{H}}(\eta-\lambda)\,\widetilde{\Theta}(\eta+\lambda),\\ w_1+w_2=-\widetilde{\mathrm{H}}(-2\eta)\,\widetilde{\Theta}(\eta-\lambda)\,\widetilde{\Theta}(\eta+\lambda),\\ w_1-w_2=\widetilde{\mathrm{H}}(-2\eta)\,\widetilde{\mathrm{H}}(\eta-\lambda)\,\widetilde{\mathrm{H}}(\eta+\lambda)\end{cases}$$

и аналогичные формулы для матричных элементов $\mathcal{R}$-матрицы. Коэффициенты w_j в (5.19) отличаются от соответствующих коэффициентов (4.2) лишь общим множителем

$$\exp\{A(2\lambda^2+3K^2+6\eta^2)\}.$$

Построенные по коэффициентам (5.19) и модифицированным тэта-функциям $\widetilde{\mathrm{H}}(u)$ и $\widetilde{\Theta}(u)$ матрицы $\widetilde{M}_{k,l}(\lambda)$, $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,l}(\lambda)$ и векторы $\widetilde{\Omega}_N^l$ будут уже периодическими функциями индексов k и l с периодом Q. Простой проверкой можно убедиться, что приведенные в приложении I теоремы сложения для тэта-функций Якоби остаются справедливыми и для модифицированных тэта-функций, если только мы заменим функцию $g(u)$ на $\widetilde{g}(u)=\widetilde{\Theta}(-u)\widetilde{\mathrm{H}}(u)$. Тем самым после замены $h(u)$ на $\widetilde{h}(u)=\widetilde{\Theta}(0)\widetilde{\Theta}(-u)\widetilde{\mathrm{H}}(u)$ соотношение (4.19) и все последующие, в частности (4.39) — (4.41), остаются в силе. Таким образом, для операторов $\widetilde{A}_{k,l}(\lambda)$, $\widetilde{B}_{k,l}(\lambda)$, $\widetilde{D}_{k,l}(\lambda)$ и векторов $\widetilde{\Omega}_N^l$ имеют место соотношения, аналогичные (4.19), (5.1) — (5.4), и мы можем, следовательно, повторить вывод формул (5.6) — (5.8) и (5.9) — (5.11). В силу периодичности по индексам k и l в выражении

$$(5.20)\qquad \widetilde{\Psi}_l(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)=\widetilde{B}_{l+1,\,l-1}(\lambda_1)\ \ldots\ \widetilde{B}_{l+n,\,l-n}(\lambda_n)\,\widetilde{\Omega}_N^{l-n}$$

допустимые значения n находятся теперь из условия

$$(5.21)\qquad 2n\equiv N(\mathrm{mod}\ Q).$$

Далее, в суммах типа (5.13) достаточно суммировать по периоду Q, причем в качестве чисел θ можно теперь брать лишь числа вида

$$(5.22)\qquad \theta=\frac{m}{Q}\qquad (m=0,\ 1,\ \ldots,\ Q-1).$$

Тем самым мы показали, что в случае (5.16) собственные векторы трансфер-матрицы $\widetilde{T}(\lambda)$ можно представить в виде

$$(5.23)\qquad \widetilde{\Phi}_m(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)=\sum_{l=0}^{Q-1}e^{2\pi ilm/Q}\widetilde{\Psi}_l(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n),$$

где $\widetilde{\Psi}_l(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)$ определяется из формулы (5.20), число n — из сравнения (5.21), а числа λ_j удовлетворяют системе трансцендентных уравнений

$$(5.24)\qquad \frac{\widetilde{h}^N(\lambda_j+\eta)}{\widetilde{h}^N(\lambda_j-\eta)}=e^{-4\pi im/Q}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{\widetilde{h}(\lambda_j-\lambda_k+2\eta)}{\widetilde{h}(\lambda_j-\lambda_k-2\eta)}\qquad (j=1,\ \ldots,\ n);$$

при этом

$$(5.25)\qquad \widetilde{T}(\lambda)\,\widetilde{\Phi}_m(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\widetilde{\Lambda}_m(\lambda;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)\,\widetilde{\Phi}_m(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n),$$

где

$$(5.26)\qquad \widetilde{\Lambda}_m(\lambda;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)=$$
$$=e^{2\pi im/Q}\widetilde{h}^N(\lambda+\eta)\prod_{j=1}^{n}\frac{\widetilde{h}(\lambda_j-\lambda+2\eta)}{\widetilde{h}(\lambda_j-\lambda)}+e^{-2\pi im/Q}\widetilde{h}^N(\lambda-\eta)\prod_{j=1}^{n}\frac{\widetilde{h}(\lambda-\lambda_j+2\eta)}{\widetilde{h}(\lambda-\lambda_j)}.$$

Отметим, что при $Q = 2$ система уравнений (5.24) распадается на n независимых уравнений для неизвестных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Этот случай отвечает модели димеров, модели Изинга и модели свободных фермионов (см. [9], [46]).

Подчеркнем, что при наличии дополнительного условия (5.16) бесконечный ряд (5.13) превращается в конечную сумму (5.23) и допустимыми значениями n в выражении (5.20) являются теперь решения сравнения (5.21), а не только значение $N/2$, как это было в общем случае.

Если еще предположить, что Q делит N, то допустимые значения n имеют вид $0, Q, \ldots, N$ для нечетных Q и $0, Q/2, \ldots, N$ для четных Q.

Система трансцендентных уравнений (5.24) и формула (5.26) при $m = 0$ были получены Бакстером в [21] с помощью весьма сложного и нетривиального обобщения классического анзатца Бете. Мы показали здесь, как квантовый метод обратной задачи вполне естественным образом приводит к алгебраическому обобщению анзатца Бете.

Отметим, что при выводе формул (5.8) и (5.11) и, тем самым, соотношений (5.14)—(5.15), (5.24)—(5.26) мы использовали то обстоятельство, что все λ_j различны. Мы не будем обсуждать здесь случай совпадающих значений λ_j, а укажем лишь, что в отличие от координатного представления для собственных векторов в [21], операторное представление (5.23) не исчезает при совпадающих λ_j. Отметим, что как и в случае шестивершинной модели, не всем решениям системы (5.26), вообще говоря, отвечают ненулевые векторы вида (5.23). Это обстоятельство связано с возможным вырождением спектра оператора $\widetilde{T}(\lambda)$. Напомним, что, как показывают формулы (4.11)—(4.12), (4.25), векторы (5.23) зависят от дополнительных параметров s и t, которые не входят в выражения (5.24) и (5.26). Можно надеяться, что исследование зависимости векторов вида (5.23) от параметров s и t окажется полезным при изучении вырождений в спектре трансфер-матрицы $\widetilde{T}(\lambda)$.

Рассмотрим теперь специальный случай, когда в формуле (5.16) $m_2 = 0$, т. е.

$$Q\eta = 2m_1 K, \tag{5.27}$$

при этом $A = 0$, так что отпадает необходимость модифицировать тэта-функции Якоби. Положим в (5.24) $n = N/2$ и по заданному целому числу ν определим целое m из сравнения

$$m \equiv m_1 \nu \pmod{Q}. \tag{5.28}$$

Система уравнений (5.24) и формула для собственных значений (5.26) примут тогда следующий вид:

$$\frac{h^N(\lambda_j+\eta)}{h^N(\lambda_j-\eta)} = e^{-2\pi i\nu\eta/K} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{h(\lambda_j-\lambda_k+2\eta)}{h(\lambda_j-\lambda_k-2\eta)} \qquad (j=1, \ldots, n), \tag{5.29}$$

$$\Lambda_\nu(\lambda;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \tag{5.30}$$

$$= e^{\pi i\nu\eta/K} h^N(\lambda+\eta) \prod_{j=1}^{n} \frac{h(\lambda_j-\lambda+2\eta)}{h(\lambda_j-\lambda)} + e^{-\pi i\nu\eta/K} h^N(\lambda-\eta) \prod_{j=1}^{n} \frac{h(\lambda-\lambda_j+2\eta)}{h(\lambda-\lambda_j)}.$$

С помощью простых соображений, основанных на непрерывной зависимости оператора $T(\lambda)$ от параметра η, легко убедиться, что формулы (5.29)—(5.30) отстаются справедливыми для всех η, удовлетворяющих условию, что отношение η/K является вещественным.

Вернемся теперь к случаю (5.16) и формулам (5.24) — (5.26). Запишем их в терминах обычных (т. е. не модифицированных) тэта-функций Якоби.

Мы получим, что числа λ_j удовлетворяют системе уравнений

$$(5.31)\quad \frac{h^N(\lambda_j+\eta)}{h^N(\lambda_j-\eta)}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{4\pi i}{Q}\left(m+\frac{m_2}{K}\sum_{l=1}^{n}\lambda_l+\frac{m_2}{2K}(N-2n)\lambda_j\right)\right\}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{h(\lambda_j-\lambda_k+2\eta)}{h(\lambda_j-\lambda_k-2\eta)}\;(j=1,\ldots,n),$$

а соответствующие собственные значения имеют вид

$$(5.32)\quad \Lambda_m(\lambda;\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=$$

$$=\exp\left\{\frac{2\pi i}{Q}\left(m+\frac{m_2}{K}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j+\frac{m_2}{2K}(N-2n)(\lambda-\eta)\right)\right\}{}_1\Lambda(\lambda;\lambda_1,\ldots,\lambda_n)+$$

$$+\exp\left\{-\frac{2\pi i}{Q}\left(m+\frac{m_2}{K}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j+\frac{m_2}{2K}(N-2n)(\lambda-\eta)\right)\right\}{}_2\Lambda(\lambda;\lambda_1,\ldots,\lambda_n).$$

В силу того, что $h(u+2K)=-h(u)$ (см. приложение I), естественно рассматривать решения λ_j системы (5.31) только в фундаментальной области $|\operatorname{Re}\lambda_j|\leqslant K$.

Применим полученные результаты к XYZ модели Гейзенберга. Напомним, что гамильтониан этой модели связан с трансфер-матрицей восьмивершинной модели формулами (2.11) — (2.13). При этом коэффициенты w_j определяются из формул (1.36) с общим нормирующим множителем, равным 1. В нашем случае коэффициенты w_j даются выражениями (4.2), так что формулы (2.11) — (2.13) переписываются следующим образом:

$$(5.33)\qquad H=-\operatorname{sn}2\eta\frac{d}{d\lambda}\ln T(\lambda)|_{\lambda=\eta}+NC_1I_N,$$

где

$$(5.34)\qquad J_x=1+k\operatorname{sn}^2 2\eta,\quad J_y=1-k\operatorname{sn}^2 2\eta,\quad J_z=\operatorname{cn}2\eta\operatorname{dn}2\eta$$

и

$$(5.35)\qquad C_1=\frac{J_z}{2}+\operatorname{sn}2\eta\left(\frac{\Theta'(0)}{\Theta(0)}+\frac{\Theta'(2\eta)}{\Theta(2\eta)}\right).$$

Формулы (5.33) — (5.35) показывают, что собственными векторами гамильтониана H являются собственные векторы коммутативного семейства операторов $T(\lambda)$, т. е.

$$(5.36)\qquad \breve{\Phi}_m(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\sum_{l=0}^{Q-1}e^{2\pi ilm/Q}\widetilde{\Psi}_l(\lambda_1,\ldots,\lambda_n),$$

при этом числа λ_j определяются из системы трансцендентных уравнений (5.31). Соответствующие собственные значения имеют вид

$$(5.37)\quad E(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=NC_2+\sum_{j=1}^{n}E(\lambda_j)+\operatorname{sn}2\eta\,\frac{\pi i m_2}{QK}(2n-N),$$

где

$$(5.38)\qquad E(\lambda)=\operatorname{sn}2\eta\left(\frac{h'(\lambda+\eta)}{h(\lambda+\eta)}-\frac{h'(\lambda-\eta)}{h(\lambda-\eta)}\right)$$

и

$$(5.39)\qquad C_2=C_1-\operatorname{sn}2\eta\frac{h'(2\eta)}{h(2\eta)}.$$

Допустимые значения n при этом определяются из сравнения (5.21).

Мы видим из формул (5.36) — (5.39), что собственные значения оператора H являются вырожденными. Можно показать (см. [19]), что в случае $N \equiv 0 \pmod Q$ собственное значение (5.37) при $n = 0$ имеет кратность $2N$. Также следует отметить, что в случае $N \equiv 0 \pmod Q$ и собственные значения трансфер-матрицы (5.26) при $n = 0$ являются вырожденными с кратностью $2N/Q$ (см. [19]).

В случае произвольных значений параметра η собственные значения оператора H по-прежнему даются формулой (5.37), где теперь $n = N/2$, а числа λ_j определяются из системы (5.15).

В заключение подведем итоги этого параграфа. Используя семейство порождающих векторов (4.18) и серию перестановочных соотношений (5.1) — (5.3), мы построили алгебраическое обобщение анзатца Бете для нахождения собственных значений и собственных векторов трансфер-матрицы восьмивершинной модели. Собственные векторы представляются бесконечным рядом (5.13), каждый член которого является результатом применения n операторов $B_{l+j,l-j}(\lambda_j)$ к порождающему вектору Ω_N^{l-n}. В отличие от случая шестивершинной модели число n не произвольно, а равно $N/2$. Числа λ_j определяются из системы трансцендентных уравнений (5.15), а соответствующие собственные значения даются выражением (5.14). Мы рассмотрели также интересный частный случай, когда 2η является точкой конечного порядка на эллиптической кривой $\mathscr{E}$. При этом бесконечный ряд (5.13) превращается в конечную сумму (5.23). Допустимые значения n определяются из сравнения (5.21), т. е. $2n \equiv N \pmod Q$, где Q — порядок точки 2η на кривой $\mathscr{E}$. Используя полученные результаты, мы решили задачу о нахождении собственных значений и собственных векторов гамильтониана XYZ модели Гейзенберга. Таким образом, мы показали, как квантовый метод обратной задачи работает на примере XYZ модели. В следующем параграфе мы, опираясь на полученные результаты, вычислим свободную энергию восьмивершинной модели в физической области, т. е. для положительных больцмановских весов v_j, и найдем энергию основного состояния XYZ модели в случае вещественных коэффициентов J_x, J_y и J_z.

§ 6. Интегральные уравнения

Здесь мы вычислим удельную свободную энергию восьмивершинной модели. Мы будем при этом предполагать, что вещественные коэффициенты w_j принадлежат так называемой основной области, т. е. удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant w_4 < w_3 < w_2 < w_1. \tag{6.1}$$

В этом случае параметры l, ζ и v, определяемые из формул (1.33), являются вещественными числами и удовлетворяют условиям

$$0 < l < 1, \quad 0 \leqslant v < \zeta < K_l. \tag{6.2}$$

Тем самым связанные с ними по формулам (1.35) параметры η и λ являются чисто мнимыми и

$$0 < k < 1, \quad 0 \leqslant -i\lambda < -i\eta < K'_k/2. \tag{6.3}$$

Через K_l и K'_k мы, как обычно, обозначаем полные эллиптические интегралы первого рода модуля l и дополнительного к модулю k модуля k' соответственно.

Следует отметить, что случай основной области (6.1) для коэффициентов w_j является нефизическим, так как при этом больцмановский вес v_3 отрицателен. Тем не менее для вычисления статистической суммы Z в физической области достаточно рассматривать только случай основной области, так как статистическая сумма Z является четной симметрической функцией коэффициентов w_j, т. е. для всех перестановок (j, k, l, m) чисел $(1, 2, 3, 4)$ и произвольных знаков имеют место соотношения

$$(6.4)\qquad Z(w_1, w_2, w_3, w_4) = Z(\pm w_j, \pm w_k, \pm w_l, \pm w_m).$$

Соотношения симметрии (6.4) для восьмивершинной модели были получены в 1970 г. Ц. Фаном и Ф. Ву [59]. Они являются непосредственным следствием формул (1.11)—(1.14). Для полноты изложения мы приведем здесь доказательство формул (6.4). Обозначим через $\mathscr{L}_n(w_1, w_2, w_3, w_4)$ локальную матрицу перехода $\mathscr{L}_n$. Из (1.11) получаем, что

$$(6.5)\qquad \sigma^1\mathscr{L}_n(w_1, w_2, w_3, w_4)\sigma^1 = \mathscr{L}_n(w_1, -w_2, -w_3, w_4),$$

$$(6.6)\qquad \sigma^2\mathscr{L}_n(w_1, w_2, w_3, w_4)\sigma^2 = \mathscr{L}_n(-w_1, w_2, -w_3, w_4),$$

$$(6.7)\qquad \sigma^3\mathscr{L}_n(w_1, w_2, w_3, w_4)\sigma^3 = \mathscr{L}_n(-w_1, -w_2, w_3, w_4),$$

где σ^j — матрицы Паули (5), т. е. матрицы операторов Паули в базисе (4) вспомогательного пространства $\mathbb{C}^2$. Кроме того, при вещественных w_j имеет место равенство

$$(6.8)\qquad \bar{\mathscr{L}}_n(w_1, w_2, w_3, w_4) = \mathscr{L}_n(w_1, -w_2, w_3, w_4),$$

где $\bar{\mathscr{L}}_n$ — матрица, определенная в § 3. Также очевидно, что

$$(6.9)\qquad \mathscr{L}_n(-w_1, -w_2, -w_3, -w_4) = -\mathscr{L}_n(w_1, w_2, w_3, w_4).$$

Из локальных формул (6.5)—(6.9) следуют аналогичные соотношения для матрицы монодромии $\mathscr{T}(w_1, w_2, w_3, w_4)$, из которых получаем следующие формулы, справедливые при вещественных w_j и четных N:

$$(6.10)\qquad T(w_1, w_2, w_3, w_4) = T(w_1, -w_2, -w_3, w_4),$$

$$(6.11)\qquad T(w_1, w_2, w_3, w_4) = T(-w_1, w_2, -w_3, w_4),$$

$$(6.12)\qquad T(w_1, w_2, w_3, w_4) = T(-w_1, -w_2, w_3, w_4),$$

$$(6.13)\qquad T^*(w_1, w_2, w_3, w_4) = T(w_1, -w_2, w_3, w_4),$$

$$(6.14)\qquad T(w_1, w_2, w_3, w_4) = T(-w_1, -w_2, -w_3, -w_4).$$

Обозначим через u_{jn} операторы в пространстве $\mathfrak{H}_N$

$$(6.15)\qquad u_{jn} = \exp\left\{-\frac{\pi i}{4}\sigma_n^j\right\} \qquad (j = 1, 2, 3),$$

а через u_j — матрицы во вспомогательном пространстве $\mathbb{C}^2$

$$(6.16)\qquad u_j = \exp\left\{-\frac{\pi i}{4}\sigma^j\right\} \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Из формулы (1.11) следует, что

$$(6.17)\qquad u_{1n}\mathscr{L}_n(w_1, w_2, w_3, w_4)u_{1n}^{-1} = u_1^{-1}\mathscr{L}_n(w_1, w_3, w_2, w_4)u_1,$$

$$(6.18)\qquad u_{2n}\mathscr{L}_n(w_1, w_2, w_3, w_4)u_{2n}^{-1} = u_2^{-1}\mathscr{L}_n(w_3, w_2, w_1, w_4)u_2,$$

$$(6.19)\qquad u_{3n}\mathscr{L}_n(w_1, w_2, w_3, w_4)u_{3n}^{-1} = u_3^{-1}\mathscr{L}_n(w_2, w_1, w_3, w_4)u_3.$$

Положим

$$(6.20)\qquad U_j = \prod_{n=1}^{N} u_{jn} \qquad (j=1, 2, 3).$$

Из локальных формул (6.17) — (6.19) получаем, что

$$(6.21)\qquad U_1T(w_1, w_2, w_3, w_4)U_1^{-1} = T(w_1, w_3, w_2, w_4),$$

$$(6.22)\qquad U_2T(w_1, w_2, w_3, w_4)U_2^{-1} = T(w_3, w_2, w_1, w_4),$$

$$(6.23)\qquad U_3T(w_1, w_2, w_3, w_4)U_3^{-} = T(w_2, w_1, w_3, w_4).$$

Из (1.11) также получаем, что

$$\sigma_n^1 \mathscr{L}_n(w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4) = \mathscr{L}_n(w_4,\ w_3,\ w_2,\ w_1)\sigma^1 \tag{6.24}$$

и

$$\sigma_n^1 \mathscr{L}_n(w_1, w_2,\ w_3,\ w_4)\sigma_n^1 = \mathscr{L}_n(w_1,\ -w_2,\ -w_3,\ w_4). \tag{6.25}$$

Положим при четных N

$$S_e^1 = \prod_{k=1}^{\frac{N}{2}} \sigma_{2k}^1, \quad S_0^1 = \prod_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \sigma_{2k+1}^1, \quad S^1 = S_e^1 S_0^1. \tag{6.26}$$

Тогда из локальных формул (6.24) — (6.25) следует, что

$$S_e^1 T(w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4) S_0^1 = T(w_4,\ w_3,\ w_2,\ w_1) \tag{6.27}$$

и

$$S^1 T(w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4) S^1 = T(w_1,\ -w_2,\ -w_3,\ w_4) = T(w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4). \tag{6.28}$$

Из соотношений (6.10) — (6.14), (6.21) — (6.23), (6.27) — (6.28) и из определения статистической суммы — формул (1.2) и (1.4) — получаем формулы (6.4).

Таким образом, на основании соотношений симметрии (6.4) и формул (1.3) и (1.8) мы заключаем, что для нахождения свободной энергии f в физической области достаточно вычислить асимптотику при $N \to \infty$ наибольшего по абсолютной величине собственного значения $\Lambda_{\max}(N)$ трансфер-матрицы $T(\lambda)$ в основной области (6.1).

Рассмотрим теперь систему трансцендентных уравнений (5.31) в предположении, что параметр η удовлетворяет условию (5.16). Используя теорию возмущений, можно показать (см. [9]), что в основной области (6.3) изменения параметров k, η и λ собственному значению $\Lambda_{\max}(N)$ отвечает случай $m = 0$ и $n = N/2$ в (5.31). Соответствующие решения λ_j системы (5.31) являются при этом вещественными числами и симметрично расположены на интервале $[-K_k,\ K_k]$, т. е.

$$-K_k \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < K_k$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0, \qquad n = \frac{N}{2}. \tag{6.29}$$

Тем самым система трансцендентных уравнений (5.31) и формула (5.32) для собственных значений принимают следующий вид:

$$\frac{h^N(\lambda_j+\eta)}{h^N(\lambda_j-\eta)} = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{h(\lambda_j-\lambda_k+2\eta)}{h(\lambda_j-\lambda_k-2\eta)} \qquad (j=1,\ \ldots,\ n) \tag{6.30}$$

и

$$\Lambda(\lambda;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n) = h^N(\lambda+\eta) \prod_{j=1}^{n} \frac{h(\lambda_j-\lambda+2\eta)}{h(\lambda_j-\lambda)} + h^N(\lambda-\eta) \prod_{j=1}^{n} \frac{h(\lambda-\lambda_j+2\eta)}{h(\lambda-\lambda_j)} \quad \left(n=\frac{N}{2}\right). \tag{6.31}$$

Из явного вида формул (6.30) — (6.31) и непрерывной зависимости трансфер-матрицы $T(\lambda)$ от параметра η следует, что формулы (6.30) — (6.31) остаются справедливыми при всех значениях η из основной области (6.3).

Перейдем теперь к непосредственному исследованию системы (6.30). Прологарифмировав уравнения (6.30), мы получим, что

$$N\varphi(\lambda_j) = 2\pi l_j + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n} \Phi(\lambda_j - \lambda_k) \qquad (j=1, \ldots, n), \tag{6.32}$$

где l_j — целые числа, а

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{i}\ln\frac{h(\alpha+\eta)}{h(\alpha-\eta)}, \qquad \Phi(\alpha) = \frac{1}{i}\ln\frac{h(\alpha+2\eta)}{h(\alpha-2\eta)}. \tag{6.33}$$

Ветви логарифма в (6.33) однозначно определяются разложениями этих функций в ряды Фурье (см. приложение I).

Используя соображения, основанные на теории возмущений ([9], [22], ср. [6] — [7]), и учитывая тот факт, что при вещественных α функция $\varphi(\alpha)$ убывает в интервале $[-K, K]$, можно показать, что собственному значению $\Lambda_{\max}(N)$ отвечает решение системы (6.32) при

$$l_{j+1} - l_j = -1 \qquad (j = 1, \ldots, n-1,\ n = N/2). \tag{6.34}$$

В дальнейшем мы используем только эллиптические функции Якоби модуля k, что позволяет опустить индекс k.

Классический метод исследования системы (6.32) при $N \to \infty$, восходящий к Хюльтену [4], основан на предположении, что решения λ_j при $N \to \infty$ являются равномерно распределенными на интервале $[-K, K]$ с положительной плотностью $\rho(\alpha)$. Таким образом, для каждой интегрируемой функции f

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j) = \int_{-K}^{K} f(\alpha)\rho(\alpha)\,d\alpha + o(1) \tag{6.35}$$

при $N \to \infty$, где $n = N/2$. Другими словами, величина $1/N(\lambda_{j+1} - \lambda_j)$ при $N \to \infty$ превращается в гладкую функцию $\rho(\alpha)$, т. е. разность $\lambda_{j+1} - \lambda_j$ имеет порядок $1/N$ при больших N. Вычтем теперь из уравнения (6.32) при $j = k+1$ аналогичное уравнение при $j = k$, разделим разность на $N(\lambda_{k+1} - \lambda_k)$ и в получившемся уравнении перейдем к пределу $N \to \infty$. Используя (6.35), мы получим, что

$$\varphi'(\alpha) = -2\pi\rho(\alpha) + \int_{-K}^{K} \Phi'(\alpha-\beta)\rho(\beta)\,d\beta, \tag{6.36}$$

где штрих означает производную по α. Отметим, что функция $\Phi'(\alpha)$ является ядром Пуассона для области $|\operatorname{Re}\alpha| \leqslant K$, $|\operatorname{Im}\alpha| \leqslant K'/2$ в комплексной плоскости переменной α. Тем самым уравнение (6.36) связано с задачей о факторизации функции $h(\alpha+\eta)/h(\alpha-\eta)$.

Таким образом, мы показали, что плотность $\rho(\alpha)$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению с ядром, зависящим от разности аргументов. Поскольку ядро и свободный член этого уравнения являются периодическими функциями с периодом $2K$ и интегрирование в (6.36) производится по периоду, то уравнение (6.36) решается с помощью преобразования Фурье. Положим

$$\begin{cases} \rho_m = \dfrac{1}{2K}\displaystyle\int_{-K}^{K} \rho(\alpha)\, e^{-\pi i m\alpha/K}\,d\alpha, \\ \varphi_m = \dfrac{1}{2K}\displaystyle\int_{-K}^{K} \varphi'(\alpha)\, e^{-\pi i m\alpha/K}\,d\alpha, \quad \Phi_m = \dfrac{1}{2K}\displaystyle\int_{-K}^{K} \Phi'(\alpha)\, e^{-\pi i m\alpha/K}\,d\alpha \\ (m = -\infty, \ldots, \infty). \end{cases} \tag{6.37}$$

После перехода к коэффициентам Фурье уравнение (6.36) принимает вид

$$\varphi_m = -2\pi\rho_m + 2K\rho_m\Phi_m,$$

откуда получаем, что

$$\rho_m = \frac{\varphi_m}{2K\Phi_m - 2\pi} \qquad (m = -\infty, \ldots, \infty). \tag{6.38}$$

Из разложений Фурье для логарифмов тэта-функций Якоби (см. приложение I) следует, что функции $\varphi'(\alpha)$ и $\Phi'(\alpha)$ при условии (6.3), т. е. $0 < -i\eta < K'/2$, разлагаются в абсолютно сходящиеся при вещественных α ряды Фурье с коэффициентами Фурье

$$\varphi_m = \begin{cases} -\pi/K & \text{при } m=0, \\ -\dfrac{\pi \operatorname{sh}(\pi m(2i\eta + K')/2K)}{K \operatorname{sh}(\pi m K'/2K)} & \text{при } m \neq 0 \end{cases} \tag{6.39}$$

и

$$\Phi_m = \begin{cases} -\dfrac{\pi \operatorname{sh}(\pi m(4i\eta + K')/2K)}{K \operatorname{sh}(\pi m K'/2K)} & \text{при } m \neq 0, \\ -\pi/K & \text{при } m=0. \end{cases} \tag{6.40}$$

Таким образом, из (6.38) — (6.40) получаем, что

$$\rho_m = \frac{1}{4K \operatorname{ch}(\pi i m\eta/K)}, \tag{6.41}$$

и следовательно,

$$\rho(\alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi i m\alpha/K}}{4K \operatorname{ch}(\pi i m\eta/K)} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{dn}(\alpha, \tilde{k})\,^{1)}. \tag{6.42}$$

Отметим, что решение $\rho(\alpha)$ является согласованным с условиями (6.29) и $n = N/2$, в предположении которых мы получили интегральное уравнение (6.36). Действительно, из (6.42) следует, что $\rho(\alpha)$ является четной функцией α, так что

$$\int_{-K}^{K} \alpha\rho(\alpha)\,d\alpha = 0,$$

откуда, на основании (6.35), мы убеждаемся в выполнении условия (6.29). Кроме того, равенство

$$\int_{-K}^{K} \rho(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2}$$

показывает, что и $n = N/2$. И, наконец, применив к функции $\rho(\alpha)$ формулу суммирования Пуассона

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(m), \qquad \text{где} \quad \hat{\varphi}(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, e^{-2\pi i m x}\,dx,$$

мы получим, что

$$\rho(\alpha) = \frac{i}{4\eta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} \dfrac{\pi K}{i\eta}\left(\dfrac{\alpha}{2K} - m\right)}, \tag{6.43}$$

т. е. плотность $\rho(\alpha)$ действительно является положительной.

---

1) Здесь модуль $\tilde{k}$ определяется через $\tilde{q} = \exp(\pi i\eta/K)$ по формуле (I.7) из приложения I (см. также [62]). В дальнейшем этот факт нам не понадобится.

Перейдем теперь к вычислению собственного значения $\Lambda_{\max}(N)$ и рассмотрим с этой целью формулу (6.31). Из разложений Фурье для логарифмов отношений тэта-функций Якоби следует, что в основной области (6.3) второе слагаемое в формуле (6.31) при $N \to \infty$ является экспоненциально малым по сравнению с первым. Таким образом, при $N \to \infty$ получаем, что

$$(6.44)\quad \Lambda_{\max}(N) = h^N(\lambda+\eta)\prod_{j=1}^{n}\frac{h(\lambda_j-\lambda+2\eta)}{h(\lambda_j-\lambda)} + O(e^{-c_0N}) =$$

$$= (w_1+w_2)^N\left(\frac{\Theta(0)\,\mathrm{H}(\lambda+\eta)}{\Theta(\lambda-\eta)\,\mathrm{H}(2\eta)}\right)^N\prod_{j=1}^{n}\frac{h(\lambda_j-\lambda+2\eta)}{h(\lambda_j-\lambda)} + O(e^{-c_0N}),$$

откуда на основании (6.35) заключаем:

$$(6.45)\quad \frac{1}{N}\ln\Lambda_{\max}(N) = \ln(w_1+w_2) + \ln\frac{\Theta(0)\,\mathrm{H}(\lambda+\eta)}{\Theta(\lambda-\eta)\,\mathrm{H}(2\eta)} +$$

$$+\frac{1}{i}\int_{-K}^{K}\varphi(\lambda-\alpha-\eta)\,\rho(\alpha)\,d\alpha + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Используя формулы (6.39), (6.41) и ряды Фурье для логарифмов отношений тэта-функций Якоби, окончательно получаем, что в основной области изменения коэффициентов w_j свободная энергия восьмивершинной модели имеет вид

$$(6.46)\quad -\beta f = \ln(w_1+w_2) +$$

$$+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\,\frac{\mathrm{sh}^2(\pi m(K'+2i\eta)/2K)}{\mathrm{sh}(\pi mK'/K)\,\mathrm{ch}(\pi mi\eta/K)}\left(\mathrm{ch}\frac{\pi mi\eta}{K} - \mathrm{ch}\frac{\pi mi\lambda}{K}\right).$$

Формула (6.46) и была получена Бакстером в [9]. Отметим, что она справедлива при любом выборе общего положительного нормирующего множителя в параметризации (1.36) для коэффициентов w_j. Еще раз подчеркнем, что мы вывели формулу (6.46) при условии (6.1). Для вычисления свободной энергии f в физической области нужно, используя (6.4), расположить коэффициенты w_j в порядке (6.1), найти параметры k, η и λ по формулам (1.33), (1.35), вычислить полные эллиптические интегралы K и K' и подставить полученные значения в (6.46).

Из формулы (6.46) следует, что функция f непрерывна и в расширенной области

$$(6.47)\quad 0 \leqslant w_4 \leqslant w_3 < w_2 \leqslant w_1.$$

Кроме того, можно показать (см. [9]), что функция f, вообще говоря, является сингулярной при $w_2 \to w_3$ в основной области (6.1). Таким образом, случай $w_2 = w_3$ отвечает фазовому переходу в восьмивершинной модели. Также укажем, что при $w_1 \to w_2$ из формулы (6.46) можно получить известные выражения для свободной энергии шестивершинной модели (см. [15] — [18]).

Используем теперь полученные результаты для вычисления энергии основного состояния XYZ модели. Напомним, что гамильтониан H XYZ модели связан с трансфер-матрицей $T(\lambda)$ восьмивершинной модели формулами (2.11) — (2.13), которые мы перепишем в следующем виде:

$$(6.48)\quad H = -\frac{J_x\,\mathrm{sn}\,2\eta}{1+k\,\mathrm{sn}^2 2\eta}\,\frac{d}{d\lambda}\ln T(\lambda)\,|_{\lambda=\eta} + \frac{J_zN}{2}I_N,$$

где

$$(6.49)\quad J_x : J_y : J_z = (1+k\,\mathrm{sn}^2 2\eta) : (1-k\,\mathrm{sn}^2 2\eta) : \mathrm{cn}\,2\eta\,\mathrm{dn}\,2\eta.$$

В (6.48) подразумевается, что для коэффициентов w_j выбрана реализация проективной параметризации (1.36) с общим нормирующим множителем, равным 1.

Используя свойства эллиптических функций Якоби (см. приложение I), без труда получаем, что в основной области изменения параметров k и η имеют место неравенства

$$|1 + k\,\mathrm{sn}^2\,2\eta| < 1 - k\,\mathrm{sn}^2\,2\eta < \mathrm{cn}\,2\eta\,\mathrm{dn}\,2\eta. \tag{6.50}$$

Основываясь на теории возмущений, можно показать (см. [10]), что при условии

$$|J_x| < -J_y < -J_z \tag{6.51}$$

собственный вектор трансфер-матрицы $T(\lambda)$, отвечающий положительному собственному значению $\Lambda_{\max}(N)$, соответствует минимальному собственному значению $E_0(N)$ гамильтониана H. Таким образом, из (6.48) — (6.51) следует, что при выборе в параметризации (6.49) отрицательного общего нормирующего множителя в основной области (6.3) мы имеем следующее выражение для энергии основного состояния:

$$E_0(N) = -\frac{J_x\,\mathrm{sn}\,2\eta}{1+k\,\mathrm{sn}^2\,2\eta}\frac{d}{d\lambda}\ln \Lambda_{\max}(N)\,|_{\lambda=\eta} + \frac{J_zN}{2}. \tag{6.52}$$

Можно показать (см. [9]), что (6.46) является дифференцируемой функцией при $\lambda = \eta$. Тем самым, если мы определим плотность энергии основного состояния

$$\varepsilon_0(J_x, J_y, J_z) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N}E_0(N), \tag{6.53}$$

то в основной области (6.51) изменения коэффициентов J_x, J_y, J_z получаем, что

$$\varepsilon_0(J_x, J_y, J_z) = \frac{J_x\,\mathrm{sn}\,2\eta}{2(1+k\,\mathrm{sn}^2\,2\eta)}\frac{d}{d\lambda}\beta f\,|_{\lambda=\eta} + \frac{J_z}{4}. \tag{6.54}$$

Используя свойства эллиптических функций Якоби (см. приложение I) и формулу (6.46), окончательно получаем, что в основной области (6.51) плотность энергии основного состояния XYZ модели имеет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(J_x, J_y, J_z) &= J_z/4 - \\ &- \frac{\pi}{2K}\{(J_z^2-J_x^2)^{1/2} + (J_z^2-J_y^2)^{1/2}\}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}^2\frac{\pi m}{2K}(2i\eta+K')\,\mathrm{th}\frac{\pi m i\eta}{K}}{\mathrm{sh}(\pi mK'/K)}.\end{aligned} \tag{6.55}$$

Формула (6.55) была получена Бакстером в работе [10].

Для вычисления энергии основного состояния в случае произвольных вещественных коэффициентов J_x, J_y и J_z достаточно заметить, что $E_0(N)$ является симметрической функцией переменных J_x, J_y, J_z, которая не меняется при одновременном изменении знаков у каких-либо двух ее аргументов. Таким образом, мы всегда можем расположить коэффициенты J_x, J_y и J_z так, чтобы они удовлетворяли условиям (6.51). Предельным переходом из формулы (6.55) можно получить (см. [10]) известные выражения для плотности энергии основного состояния XXZ модели (см. [6] — [7]).

В заключение этого параграфа скажем несколько слов о возбуждениях XYZ модели. В случае произвольных значений η из (6.3) им отвечают комплексные решения λ_j системы уравнений

$$\frac{h^N(\lambda_j+\eta)}{h^N(\lambda_j-\eta)}=\exp\left\{-\frac{4\pi\eta}{KK'}\sum_{l=1}^{n}\lambda_l\right\}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{h(\lambda_j-\lambda_k+2\eta)}{h(\lambda_j-\lambda_k-2\eta)} \tag{6.56}$$

$$(j=1,\ \ldots,\ n;\ n=N/2).$$

Система уравнений (6.56) получается, если мы в системе (5.31) положим $m=0$, $n=N/2$ и заметим, что для значений η из (6.3) из условия (5.16) следует, что $im_2/Q=\eta/K'$. Предельным переходом получаем, что система уравнений (6.56) имеет место при всех значениях η из (6.3).

Простейшие возбуждения XYZ модели устроены следующим образом. Мы удаляем из интервала $[-K,\ K]$ одно значение λ_{j_0} и помещаем его в точку $\lambda_{j_0}+\frac{iK'}{2}$ интервала $\operatorname{Im}\alpha=K'/2$, $|\operatorname{Re}\alpha|\leqslant K$; при этом значения $\operatorname{Re}\lambda_j$ снова будут симметрично заполнять интервал $[-K,\ K]$ при $N\to\infty$. Аналогичным образом можно построить возбуждения, в которых несколько значений λ_j перемещены на интервал $\operatorname{Im}\alpha=K'/2$. Остальные возбуждения являются их связанными состояниями и устроены более сложно. Энергия этих возбуждений вычислена в работе [22], к которой мы и отсылаем читателя за техническими подробностями. Скажем лишь, что вычисления в [22] становятся более наглядными, если использовать упрощения в методе интегральных уравнений, предложенные в работе В. Е. Корепина [60] и в работе [25]. Отметим также, что в отличие от XXZ модели, в общей XYZ модели как основное состояние, так и возбуждения над ним отвечают случаю $n=N/2$, т. е. находятся в секторе с нулевым «зарядом» q, где $q=2n-N$, поэтому особый интерес представляет случай (5.16), в котором имеются и секторы с ненулевым «зарядом». Мы не хотим здесь вскользь говорить об этих интересных вопросах, а надеемся вернуться к ним в другом месте.

Заключение

В настоящем обзоре мы показали, как недавно созданный квантовый метод обратной задачи работает на примере XYZ модели Гейзенберга. Следуя Бакстеру, мы нашли для гамильтониана XYZ модели вспомогательную спектральную задачу, которая по своей постановке является квантовой. Соответствующая ей матрица монодромии оказывается связанной с восьмивершинной моделью классической статистической физики. На примере XXZ модели мы показали, как простые перестановочные соотношения для операторных матричных элементов матрицы монодромии и существование порождающего вектора приводят к алгебраизации анзатца Бете; при этом след матрицы монодромии — трансфер-матрица — является производящей функцией для квантовых интегралов движения. Таким образом, с помощью квантового метода обратной задачи для гамильтониана XXZ модели мы явно построили как коммутирующие интегралы — квантовые аналоги «переменных типа действие», так и его собственные векторы — квантовые аналоги «переменных типа угол».

Используя серию перестановочных соотношений для операторных матричных элементов матрицы монодромии восьмивершинной модели и семейство порождающих векторов, мы построили алгебраическое обобщение анзатца Бете для нахождения собственных значений и собственных векторов гамильтониана XYZ модели. Тем самым мы нашли квантовые аналоги «переменных типа действие-угол» и таким образом показали, что общая XYZ модель Гейзенберга является вполне интегрируемой квантовой системой.

В основном наше изложение носило формально-алгебраический характер, так как в первую очередь мы хотели донести до читателя-математика интересные алгебраические структуры, естественно возникающие в квантовом методе обратной задачи.

Сформулируем теперь ряд математических задач, тесно связанных с содержанием настоящего обзора.

1) Выяснить условия, при которых собственные векторы трансфер-матрицы $T(\lambda)$ из § 3, получаемые с помощью анзатца Бете, образуют базис в пространстве $\mathfrak{H}_N$.

Исследовать вырождения в спектре трансфер-матрицы $T(\lambda)$ и гамильтониана H XXZ модели.

2) Аналогичные вопросы сохраняются и для XYZ модели при условии, что параметр η удовлетворяет (5.16). В общем случае исследовать сходимость ряда (5.13) и полноту возникающих собственных векторов.

3) Дать строгое оправдание предельных переходов в § 6, не прибегая к теории возмущений.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Здесь мы приведем определение эллиптических функций Якоби и тэта-функций и изложим их свойства, используемые в основном тексте. Доказательства приведенных формул см. в [61] — [64].

Пусть τ — комплексное число, $\operatorname{Im}\tau > 0$ и $q = e^{\pi i\tau}$. Положим

$$\vartheta(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2\pi i n z}. \tag{I.1}$$

Ряд в (I.1) абсолютно сходится при всех комплексных z и представляет целую функцию переменной z. Функция $\vartheta_4(z, q) = \vartheta(z, q)$ удовлетворяет соотношениям

$$\vartheta_4(z+1, q) = \vartheta_4(z, q), \qquad \vartheta_4(z+\tau, q) = -\frac{e^{-2\pi i z}}{q}\vartheta_4(z, q). \tag{I.2}$$

Остальные три тэта-функции определяются следующим образом:

$$\left\{\begin{aligned} \vartheta_1(z, q) &= \frac{1}{i} q^{\frac{1}{4}} e^{\pi i z}\vartheta_4\left(z+\frac{\tau}{2}, q\right), \\ \vartheta_2(z, q) &= q^{\frac{1}{4}} e^{\pi i z}\vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}, q\right), \\ \vartheta_3(z, q) &= \vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}, q\right). \end{aligned}\right. \tag{I.3}$$

В силу (I.2) они являются квазидвоякопериодическими функциями переменной z с квазипериодами 1 и τ, при этом $\vartheta_1(z)$ является нечетной функцией, а $\vartheta_2(z)$, $\vartheta_3(z)$ и $\vartheta_4(z)$ — четными. Функции $\vartheta_1(z)$, $\vartheta_2(z)$, $\vartheta_3(z)$ и $\vartheta_4(z)$ имеют нули в точках $m+n\tau$, $m+\frac{1}{2}+n\tau$, $m+\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau$ и $m+\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau$ соответственно, где m и n — целые числа.

Общие теоремы сложения для тэта-функций были получены Якоби в его классическом трактате «Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum» [61] (см. также [64]). Здесь мы приведем лишь используемые в основном тексте формулы

$$\vartheta_1(u)\vartheta_1(v)\vartheta_1(w)\vartheta_1(u+v+w) + \vartheta_4(u)\vartheta_4(v)\vartheta_4(w)\vartheta_4(u+v+w) = \\ = \vartheta_4(0)\vartheta_4(u+v)\vartheta_4(u+w)\vartheta_4(v+w), \tag{I.4}$$

$$\vartheta_1(u)\vartheta_1(v)\vartheta_4(w)\vartheta_4(u+v+w) + \vartheta_4(u)\vartheta_4(v)\vartheta_1(w)\vartheta_1(u+v+w) = \\ = \vartheta_4(0)\vartheta_4(u+v)\vartheta_1(u+w)\vartheta_1(v+w), \tag{I.5}$$

где для сокращения записи опущен параметр q. Для доказательства (I.4) (и аналогично (I.5)) достаточно заметить, что в силу (I.2) и (I.3) отношение левой части равенства (I.4) к правой части является целой двоякопериодической функцией, т. е. константой. Столь же просто доказывается и соотношение

$$\vartheta_4(u-v)\,\vartheta_1(u+v)-\vartheta_4(u+v)\,\vartheta_1(u-v)=\frac{2\vartheta_1(v)\,\vartheta_2(u)\,\vartheta_3(u)\,\vartheta_4(v)}{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)}. \tag{I.6}$$

Положим

$$k=\frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)},\qquad k'=\frac{\vartheta_4^2(0)}{\vartheta_3^2(0)} \tag{I.7}$$

и пусть

$$K_k=\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0),\qquad K_k'=-\frac{i\pi\tau}{2}\vartheta_3^2(0). \tag{I.8}$$

Имеет место формула

$$k^2+k'^2=1. \tag{I.9}$$

Эллиптические функции Якоби модуля k определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(u,k)=\dfrac{1}{\sqrt{k}}\,\dfrac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}, \\ \operatorname{cn}(u,k)=\sqrt{\dfrac{k'}{k}}\,\dfrac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}, \\ \operatorname{dn}(u,k)=\sqrt{k'}\,\dfrac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)}, \end{cases} \tag{I.10}$$

где $v=u/2K_k$. Они являются двоякопериодическими функциями переменной u. Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(-u)=-\operatorname{sn}u, & \operatorname{cn}(-u)=\operatorname{cn}u, \\ & \qquad\operatorname{dn}(-u)=\operatorname{dn}u, \\ \operatorname{sn}(2K-u)=\operatorname{sn}u, & \operatorname{cn}(2K-u)=-\operatorname{cn}u, \\ & \qquad\operatorname{dn}(2K-u)=\operatorname{dn}u, \\ \operatorname{sn}(2iK'-u)=-\operatorname{sn}u, & \operatorname{cn}(2iK'-u)=-\operatorname{cn}u, \\ & \qquad\operatorname{dn}(2iK'-u)=-\operatorname{dn}u, \end{cases} \tag{I.11}$$

где, если не указан модуль k, выражения $\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{dn}u$, K и K' обозначают $\operatorname{sn}(u,k)$, $\operatorname{cn}(u,k)$, $\operatorname{dn}(u,k)$, K_k и K_k' соответственно. Таким образом, элементарные периоды для функции $\operatorname{sn}u$ суть $4K$, $2iK'$, для $\operatorname{cn}u$ суть $4K$, $2K+2iK'$ и для $\operatorname{dn}u$ суть $2K$, $4iK'$.

Число k' называется дополнительным модулем к модулю k, а величины K и K' — полными эллиптическими интегралами первого рода модулей k и k' соответственно. Они имеют вид

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\qquad K'=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}. \tag{I.12}$$

Нахождение по заданному модулю k числа τ, $\operatorname{Im}\tau>0$, для которого имеет место (I.7), называется задачей обращения. Она однозначно разрешима при $k^2\neq 0,\ 1$.

Функция $y=\operatorname{sn}(u,k)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=(1-y^2)(1-k^2y^2), \tag{I.13}$$

и, следовательно, дифференциальное уравнение общего вида

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=\prod_{j=1}^{4}(u-u_j) \tag{I.14}$$

также интегрируется в эллиптических функциях. Таким образом получаются формулы (1.29) — (1.30) в § 1.

Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{cases} \mathrm{sn}^2 u+\mathrm{cn}^2 u=1, \\ k^2\,\mathrm{sn}^2 u+\mathrm{dn}^2 u=1, \end{cases} \tag{I.15}$$

при помощи которых получаем формулы (1.32) в § 1. Теоремы сложения для эллиптических функций Якоби модуля k имеют вид

$$\begin{cases} \mathrm{sn}\,(u+v)=\dfrac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v+\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}, \\ \mathrm{cn}\,(u+v)=\dfrac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}, \\ \mathrm{dn}\,(u+v)=\dfrac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,v}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v}. \end{cases} \tag{I.16}$$

Мнимое преобразование Якоби связывает эллиптические функции аргумента u и модуля k с эллиптическими функциями аргумента iu и дополнительного модуля k' и выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \mathrm{sn}\,(u,\,k)=\dfrac{1}{i}\,\dfrac{\mathrm{sn}\,(iu,\,k')}{\mathrm{cn}\,(iu,\,k')}, \\ \mathrm{cn}\,(u,\,k)=\dfrac{1}{\mathrm{cn}\,(iu,\,k')}, \\ \mathrm{dn}\,(u,\,k)=\dfrac{\mathrm{dn}\,(iu,\,k')}{\mathrm{cn}\,(iu,\,k')}. \end{cases} \tag{I.17}$$

Связь эллиптических функций Якоби аргумента $(1+k')\,u$ и модуля k_1,

$$k_1=\frac{1-k'}{1+k'},$$

с эллиптическими функциями аргумента u и модуля k доставляется преобразованием Ландена

$$\begin{cases} \mathrm{sn}\,\{(1+k')\,u,\ k_1\}=(1+k')\,\dfrac{\mathrm{sn}\,(u,\,k)\,\mathrm{cn}\,(u,\,k)}{\mathrm{dn}\,(u,\,k)}, \\ \mathrm{cn}\,\{(1+k')\,u,\ k_1\}=\dfrac{1-(1+k')\,\mathrm{sn}^2\,(u,\,k)}{\mathrm{dn}\,(u,\,k)}, \\ \mathrm{dn}\,\{(1+k')\,u,\ k_1\}=\dfrac{1-(1-k')\,\mathrm{sn}^2\,(u,\,k)}{\mathrm{dn}\,(u,\,k)}, \end{cases} \tag{I.18}$$

при этом

$$\tau_1=2\tau, \quad K_{k_1}=\frac{1+k'}{2}K_k, \quad K'_{k_1}=(1+k')\,K'_k.$$

Используя формулы (I.16) — (I.18), из параметризации (1.32) в § 1 получаем основную параметризацию (1.36) для коэффициентов w_j.

При условии, что $k\to 0$, дополнительный модуль k' стремится к 1, $K\to\pi/2$, $K'\to\infty$ и эллиптические функции $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ превращаются в $\sin u$, $\cos u$ и 1 соответственно.

Формулы дифференцирования эллиптических функций Якоби имеют вид

$$\frac{d}{du}\,\mathrm{sn}\,u=\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \quad \frac{d}{du}\,\mathrm{cn}\,u=-\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u, \quad \frac{d}{du}\,\mathrm{dn}\,u=-k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u. \tag{I.19}$$

Из (I.11) и (I.19) получаем формулы (2.20) в § 2.

Также укажем, что в случае $0 < k < 1$ при изменении аргумента u от 0 до iK' $\mathrm{sn}\, u$ принимает чисто мнимые значения от 0 до $i\infty$, а $\mathrm{cn}\, u$ и $\mathrm{dn}\, u$ — вещественные значения от 1 до ∞. Вместе с формулами (I.15) это доказывает неравенства (6.50) в § 6.

В основном тексте мы использовали тэта-функции Якоби $\mathrm{H}(u)$ и $\Theta(u)$, также введенные Якоби в его трактате [61]. Они выражаются через тэта-функции $\vartheta_1(z)$ и $\vartheta_4(z)$ следующим образом:

$$\mathrm{H}(u) = \vartheta_1\left(\frac{u}{2K}, q\right), \quad \Theta(u) = \vartheta_4\left(\frac{u}{2K}, q\right). \tag{I.20}$$

В этих обозначениях

$$\mathrm{sn}(u, k) = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(u)}{\Theta(u)}. \tag{I.21}$$

Тэта-функции Якоби $\mathrm{H}(u)$ и $\Theta(u)$ обладают следующими свойствами:

$$\begin{cases} \mathrm{H}(-u) = -\mathrm{H}(u), & \Theta(-u) = \Theta(u), \\ \mathrm{H}(u+2K) = -\mathrm{H}(u), & \Theta(u+2K) = \Theta(u), \\ \mathrm{H}(u+iK') = \dfrac{i}{q^{1/4}} \exp\left\{-\dfrac{\pi i u}{2K}\right\} \Theta(u), \\ \Theta(u+iK') = \dfrac{i}{q^{1/4}} \exp\left\{-\dfrac{\pi i u}{2K}\right\} \mathrm{H}(u), \end{cases} \tag{I.22}$$

где

$$q = e^{\pi i \tau} = \exp\{-\pi K'/K\}.$$

Теоремы сложения (I.4) — (I.5) для тэта-функций Якоби $\mathrm{H}(u)$ и $\Theta(u)$ позволяют непосредственно доказать соотношение (1.38) из § 1. Для доказательства формул (4.14) — (4.17), (4.24) и (4.27) — (4.30) из § 4 надо, наряду с теоремами сложения (I.4) — (I.5), также использовать и формулу (I.6), которая в терминах $\mathrm{H}(u)$ и $\Theta(u)$ принимает следующий вид:

$$\mathrm{H}(u-v)\,\Theta(u+v) - \Theta(u-v)\,\mathrm{H}(u+v) = 2\,\frac{g(u-K)\,g(v)}{g(K)}, \tag{I.23}$$

где

$$g(u) = \mathrm{H}(u)\Theta(u). \tag{I.24}$$

Из разложений тэта-функций в бесконечные произведения можно получить разложения их логарифмов в ряды Фурье. Таким образом, получаем, что

$$\ln \frac{\vartheta_4(v+w)}{\vartheta_4(v-w)} = 2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n v \sin 2\pi n w}{n \sin \pi n \tau}. \tag{I.25}$$

В равенстве (I.25) выбрана главная ветвь логарифма; ряд (I.25) абсолютно сходится при условии, что

$$|\mathrm{Im}\, v| + |\mathrm{Im}\, w| < \frac{1}{2} \mathrm{Im}\, \tau. \tag{I.26}$$

Используя формулы (I.22), получаем, что

$$\ln \frac{\vartheta_1(v+w)}{\vartheta_1(v-w)} = -\pi i - 2\pi i v + 2i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n v \sin 2\pi n \left(w - \frac{\tau}{2}\right)}{n \sin \pi n \tau}. \tag{I.27}$$

Ряд (I.27) абсолютно сходится при условии, что

$$|\mathrm{Im}\, v| + \left|\mathrm{Im}\left(w - \frac{\tau}{2}\right)\right| < \frac{1}{2} \mathrm{Im}\, \tau. \tag{I.28}$$

Из формул (I.20), (I.25) и (I.26) заключаем, что для определенных в § 6 функций $\varphi(\alpha)$ и $\Phi(\alpha)$ при $0<k<1$ (т. е. для чисто мнимых τ) имеют место следующие соотношения:

$$\text{(I.29)}\quad \varphi(\alpha)=-\pi\left(1+\frac{\alpha}{K}\right)-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi m\alpha}{K}}{m\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi mK'}{2K}}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi m}{2K}(2i\eta+K')$$

и

$$\text{(I.30)}\quad \Phi(\alpha)=-\pi\left(1+\frac{\alpha}{K}\right)-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi m\alpha}{K}}{m\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi mK'}{2K}}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi m}{2K}(4i\eta+K').$$

Ряды (I.29) и (I.30) и определяют ветви логарифма в формулах (6.33) из § 6. Ряд (I.29) абсолютно сходится при условии, что

$$\text{(I.31)}\qquad |\operatorname{Im}\alpha|+|\operatorname{Im}\eta|<K',\qquad |\operatorname{Im}\alpha|+|\operatorname{Im}(\eta-iK')|<K',$$

а ряд (I.30) — при условии

$$\text{(I.32)}\qquad |\operatorname{Im}\alpha|+2\,|\operatorname{Im}\eta|<K',\qquad |\operatorname{Im}\alpha|+|\operatorname{Im}(2\eta-iK')|<K'.$$

Таким образом, ряды (I.29) — (I.30) абсолютно сходятся при вещественных α и η из области (6.3) в § 6. Коэффициенты (6.39) — (6.40) из § 6 получаются почленным дифференцированием этих разложений Фурье. Из формулы (I.29) также следует, что при условии (6.3) из § 6 вещественная часть функции $i\varphi(\lambda)$ является положительной. Этот факт был использован в § 6 для получения формулы (6.44).

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Рассмотрим ассоциативную алгебру с образующими $A_i(x)$, удовлетворяющими соотношениям (1.52) из § 1, т. е.

$$\text{(II.1)}\qquad A_i(x)A_k(y)=S_{ij}^{kl}(x-y)A_l(y)A_j(x),$$

где $i, j, l, k=1, 2$ и по повторяющимся индексам производится суммирование. Здесь мы дадим реализацию этой алгебры в терминах расслоений над эллиптическими кривыми. Эта реализация была предложена И. В. Чередником в [45].

Пусть L — решетка на плоскости $\mathbb{C}^1$ с образующими 1 и τ, $\operatorname{Im}\tau>0$, $\mathscr{E}$ — соответствующая ей эллиптическая кривая, т. е. $\mathscr{E}=\mathbb{C}^1/L$. Рассмотрим линейное аналитическое расслоение V над кривой $\mathscr{E}$. Известно (см. [65] — [66]), что все такие расслоения получаются следующим образом. Пусть $\widetilde{V}$ — тривиальное линейное расслоение над $\mathbb{C}^1$, т. е. $\widetilde{V}=\mathbb{C}^1\times\mathbb{C}^1$. Определим действие решетки L в $\widetilde{V}$ следующим образом:

$$\text{(II.2)}\qquad \omega\circ(z, u)=(z+\omega,\quad \alpha_{N,\beta}(z, \omega)u),$$

где $\omega=n_1+n_2\tau$ — элемент решетки L, (z, u) — точка в $\widetilde{V}$ и

$$\text{(II.3)}\qquad \alpha_{N,\beta}(z,\omega)=\exp\left\{n_2\left(-2\pi iN\left(z+\frac{(n_2-1)}{2}\tau\right)+\beta\right)\right\},$$

N — целое, $N\geqslant 1$, а β — произвольное комплексное число. Тогда $V=\widetilde{V}/L$.

Сечения расслоения $V_{N,\beta}$ можно отождествить с аналитическими функциями f на $\mathbb{C}^1$, удовлетворяющими условиям

$$\text{(II.4)}\qquad \begin{cases} f(z+1)=f(z),\\ f(z+\tau)=e^{-2\pi iNz+\beta}f(z).\end{cases}$$

Пространство таких функций имеет размерность N и обозначается через $\mathcal{H}(N, \beta)$.

Зафиксируем комплексный параметр η и рассмотрим пространство $\mathcal{H}(2, \beta_0)$, где $\beta_0 = \pi i(1 - 2\tau)$. Базис пространства $\mathcal{H}(2, \beta_0)$ имеет вид

$$f_1(z) = \vartheta_1(2z, q^2), \quad f_2(z) = \vartheta_4(2z, q^2), \quad q = e^{\pi i \tau}. \tag{II.5}$$

Образующие $A_i(x)$ реализуются как операторы, переводящие пространство сечений $\mathcal{H}(N, \beta)$ в

$$\mathcal{H}(N + 2, \beta + \beta_0 + 2\pi i N\eta + 4\pi i x),$$

и выглядят следующим образом:

$$A_i(x)f(z) = f_i(z - x)f(z - \eta). \tag{II.6}$$

Операторы $A_i(x)A_k(y)$ и $A_l(y)A_j(x)$ переводят $\mathcal{H}(N, \beta)$ в одно и то же пространство сечений

$$\mathcal{H}(N + 4, \beta + 2\beta_0 + 4\pi i N\eta + 4\pi i(x + y + \eta)),$$

и тем самым эти операторы можно сравнивать. Таким образом, мы получаем, что если для операторов $A_i(x)$ имеет место соотношение (II.1), то величины S_{ij}^{kl} удовлетворяют соотношению Бакстера — Янга (1.51), так как из (II.6) очевидно следует, что алгебра с образующими $A_i(x)$ является ассоциативной.

Для справедливости соотношения (II.1) достаточно, чтобы при всех значениях индексов выполнялось условие

$$f_i(z - x)f_k(z - y - \eta) = S_{ij}^{kl}\,(x - y)f_l(z - y)f_j(z - x - \eta). \tag{II.7}$$

Обозначим $w = z - y$, $v = x - y$. Тогда (II.7) примет вид

$$f_i(w - v)f_k(w - \eta) = S_{ij}^{kl}\,(v, \eta)f_l(w)f_j(w - v - \eta). \tag{II.8}$$

Функции

$$f_i(w - v)f_k(w - \eta) \quad \text{и} \quad f_l(w)f_j(w - v - \eta)$$

образуют базисы в пространстве $\mathcal{H}(4, 2\beta_0 + 4\pi i(v + \eta))$, а соотношение (II.8) осуществляет связь между ними. Таким образом, величины $S_{ij}^{kl}\,(v, \eta)$ однозначно определяются из уравнений (II.8). Используя антипериодичность функции $f_1(z)$ при сдвиге аргумента на $^1/_2$ и периодичность функции $f_2(z)$, заключаем, что

$$S_{ij}^{kl}\,(v, \eta) = 0 \quad \text{при} \quad i + k \not\equiv j + l (\operatorname{mod} 2). \tag{II.9}$$

Тем самым из формулы (1.50) в § 1 мы вновь получаем, что $\mathcal{R}$-матрица имеет вид (1.39). Оставшиеся коэффициенты $S_{ij}^{kl}\,(v, \eta)$ определяются из (II.8) при помощи теорем сложения (I.4) — (I.5). Окончательно имеем, что

$$\begin{cases} S_{11}^{11} = \dfrac{f_2(v)\,f_2(\eta)}{f_2(0)\,f_2(v+\eta)}, & S_{12}^{12} = \dfrac{f_1(v)\,f_1(\eta)}{f_2(0)\,f_2(v+\eta)}, \\ S_{21}^{12} = \dfrac{f_1(\eta)\,f_2(v)}{f_2(0)\,f_1(v+\eta)}, & S_{22}^{11} = \dfrac{f_1(v)\,f_2(\eta)}{f_2(0)\,f_1(v+\eta)}, \\ S_{22}^{22} = S_{11}^{11}, \quad S_{21}^{21} = S_{12}^{12}, & S_{12}^{21} = S_{21}^{12}, \quad S_{11}^{22} = S_{22}^{11}. \end{cases} \tag{II.10}$$

Сравнение с формулами (1.40) показывает, что после очевидных переобозначений и умножения формул (II.10) на общий множитель

$$f_2(0)f_1(v + \eta)f_2(v + \eta)$$

мы снова получаем матричные элементы $\mathcal{R}$-матрицы в виде (1.40).

Таким образом, мы показали, как геометрическая интерпретация операторов $A_i(x)$ (II.6) вновь приводит к эллиптической параметризации (1.36) в § 1.

Описанная здесь конструкция обобщается на случай, когда индексы принимают большее число значений, а также и на случай, когда x и y являются векторами, при этом вместо эллиптических кривых нужно рассматривать абелевы многообразия.

Также отметим, что формулы (II.1) напоминают хорошо известные соотношения Вейля из теории канонических шрёдингеровских операторов. Об этом говорит и конкретная реализация (II.6) операторов $A_i(x)$ в виде операторов умножения и сдвига. Было бы весьма интересно до конца проследить за этой аналогией. Возможно, что при этом окажется полезным рассмотрение проективных представлений квадрата $\mathscr{E} \times \mathscr{E}$ эллиптической кривой $\mathscr{E}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Heisenberg, Zur Theorie des Ferromagnetismus, Zeitschrift für Physik 49: 9—10 (1928), 619—636.
[2] H. Bethe, Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen Atomkette, Zeitschrift für Physik 71: 3—4 (1931), 205—226.
[3] Mathematical physics in one dimension, ed. E. H. Lieb and D. C. Mattis, New York — London, Academic Press, 1966.
[4] L. Hulthén, Über das Austauschproblem eines Kristalles, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, B.26A, Häfte 3, № 11 (1938), 1—106.
[5] J. des Cloizeaux, J. J. Pearson, Spin-wave spectrum of the antiferromagnetic linear chain, Phys. Rev. 128 (1962), 2131—2135.
[6] C. N. Yang, C. P. Yang, One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interac tions. I. Proof of Bethe's hypothesis for ground state in a finite system, Phys. Rev. 150 (1966), 321—327.
[7] C. N. Yang, C. P. Yang, One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. II. Properties of the ground state energy per lattice site for an infinite system, Phys. Rev. 150 (1966), 327—339.
[8] C. N. Yang, C. P. Yang, One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. III. Applications, Phys. Rev. 151 (1966), 258—264.
[9] R. J. Baxter, Partition function of the eight-vertex lattice model, Ann. Phys. (N. Y.) 70 (1972), 193—228.
[10] R. J. Baxter, One-dimensional anisotropic Heisenberg chain, Ann. Phys. (N. Y.) 70 (1972), 323—337.
[11] R. J. Baxter, Eight-vertex model in lattice statistics, Phys. Rev. Letters 26 (1971), 832—833.
[12] R. J. Baxter, One-dimensional anisotropic Heisenberg chain, Phys. Rev. Letters 26 (1971), 834—835.
[13] H. A. Kramers, G. H. Wannier, Statistics of the 2-dimensional ferromagnetic. I, Phys. Rev. 60 (1941), 252—262.
[14] L. Onsager, Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition, Phys. Rev. 65 (1944), 117—149.
[15] E. H. Lieb, Exact solution of the problem of the entropy of two-dimensional ice, Phys. Rev. Letters 18 (1967), 692—694.
[16] E. H. Lieb, Residual entropy of square ice, Phys. Rev. 162 (1967), 162—171.
[17] E. H. Lieb, Exact solution of the F model of an antiferroelectric, Phys. Rev. Letters 18 (1967), 1046—1048.
[18] E. H. Lieb, Exact solution of the two-dimensional Slater KDP model of a ferroelectric, Phys. Rev. Letters 19 (1967), 108—110.
[19] R. J. Baxter, Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain. I. Some fundamental eigenvectors, Ann. Phys. (N. Y.) 76 (1973), 1—24.

[20] R. J. Baxter, Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain. II. Equivalence to a generalized ice-type lattice model, Ann. Phys. (N. Y.) **76** (1973), 25—47.

[21] R. J. Baxter, Eight-vertex model in lattice statistics and one-dimensional anisotropic Heisenberg chain. III. Eigenvectors of the transfer-matrix and Hamiltonian, Ann. Phys. (N. Y.) **76** (1973), 48—71.

[22] J. D. Johnson, S. Krinsky, B. M. McCoy, Vertical-arrow correlation length in the eight-vertex model and the low-lying excitations of the $X-Y-Z$ Hamiltonian, Phys. Rev. **A8** (1973), 2526—2547.

[23] A. Luther, Eigenvalue spectrum of interacting massive fermions in one dimension., Phys. Rev. **B14** (1976), 2153—2159.

[24] Л. Д. Фаддеев, Квантовые вполне-интегрируемые модели теории поля, препринт ЛОМИ, Р-2-79, Ленинград, 1979.

[25] Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Квантовый метод обратной задачи. I, Препринт ЛОМИ Р-1-79, Ленинград, 1979 (см. также Теорет. и матем. физика **40**:3 (1979)).

[26] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, Method for solving the Korteveg — de Vries equation., Phys. Rev. Letters **19** (1967), 1095—1097.

[27] P. D. Lax, Integrals of nonlinear equations and solitary waves, Comm. Pure Appl. Math. **21**: 2 (1968), 467—490.

[28] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах, Журнал экспер. и теорет. физики **61**: 1 (1971), 118—125.

[29] В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев, Уравнение Кортевега — де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система, Функц. анализ 5: 4 (1971), 18—27.

[30] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, Существенно-нелинейная одномерная модель классической теории поля, Теорет. и матем. физика **21** : 2 (1974), 160—174.

[31] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния. I, Функц. анализ 8: 3 (1974), 43—53.

[32] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur, The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems, Stud. Appl. Math. **53** (1974), 249—315.

[33] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, К теории резонансного взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах, Журнал экспер. и теорет. физики **69**: 5 (1975), 1654—1673.

[34] L. A. Takhtajan, Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method, Phys. Letters **64A** (1977), 235—237.

[35] В. Е. Захаров, А. В. Михайлов, Релятивистки-инвариантные двумерные модели теории поля, интегрируемые методом обратной задачи, Журнал экспер. и теорет. физики **74**: 6 (1978), 1953—1973.

[36] M. Adler, On a trace functional for formal pseudodifferential operators and the symplectic structure for the Korteveg — de Vries type equations, Invent. Math. **50** (1979), 219—248.

[37] B. Kostant, The solution of a generalized Toda lattice and a representation theory, preprint MIT, Cambridge, Ma., 1979.

[38] Л. Д. Фаддеев, Обратная задача квантовой теории рассеяния. II, В кн. «Современные проблемы математики», т. 3, М., ВИНИТИ, 1974, 93—181.

[39] M. J. Ablowitz, Review on the inverse scattering transform, Stud. Appl. Math. 58 (1978), 17—95.

[40] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия, УМН **31**: 1 (1976), 55—136.

[41] И. М. Кричевер, Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений, УМН **32**: 6 (1977), 183—208.

[42] Nonlinear evolution equations solvable by the spectral transform, ed. F. Calogero, Research Notes in Math. **26**, Pitman Ltd, London — San-Francisco — Melbourne, 1978.
[43] Е. К. Склянин, Метод обратной задачи рассеяния и квантовое нелинейное уравнение Шрёдингера, ДАН **244**: 6 (1979), 1337—1341.
[44] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, Heisenberg ferromagnet and quantum inverse scattering method, Phys. Letters **70A** (1979), 461—463.
[45] И. В. Чередник, Соотношения Янга — Бакстера и алгебраическая геометрия, ДАН (1979).
[46] Phase Transitions and Critical Phenomena., v. I, Ed. S. Domb and M. S. Green, London-New York, Academic Press, 1972.
[47] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, М., «Наука», 1965.
[48] Е. К. Склянин, Л. Д. Фаддеев, Квантовомеханический подход к вполне интегрируемым моделям теории поля, ДАН **243**: 6 (1978), 1430—1433.
[49] C. N. Yang, Some exact results for the many-body problem in on dimension with repulsive delta-function interaction, Phys. Rev. Letters **19** (1967), 1312—1315.
[50] M. Karowski, H. J. Thun, T. T. Truong, P. H. Weisz, On the uniqueness of a purely elastic S-matrix in $(1+1)$ dimensions, Phys. Letters **67B** (1977), 321—322.
[51] А. Б. Замолодчиков, Точная двухчастичная S-матрица квантовых солитонов модели Sine — Gordon, Письма в Журнал экспер. и теорет. физики **25**: 10 (1977), 499—502.
[52] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, Relativistic factorized S-matrix in two-dimensions having O (N) isotopic symmetry, Nucl. Phys. **B133** (1978), 525—535.
[53] M. Toda, Waves in nonlinear lattice, Prog. Theor. Phys. Sappl. **45** (1970), 174—200.
[54] В. И. Арнольд, Математические методы классической механики, М., «Наука», 1974.
[55] С. В. Манаков, О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах, Журнал экспер. и теорет. физики **67** : 2 (1974), 543—555.
[56] H. Flaschka, Toda lattice II, Prog. Theor. Phys. **51** (1974), 703—716.
[57] B. Sutherland, Two-dimensional hydrogen bonded crystals without the ice rule, J. Math. Phys. **11** (1970), 3183—3186.
[58] M. Lüscher, Quantum non-local charges and absence of particle production in the two-dimensional non-linear σ-model, Nucl. Phys. **B135** (1978), 1—19.
[59] C. Fan, F. Y. Wu, General lattice statistical model of phase transitions, Phys. Rev. **B2** (1970), 723—733.
[60] В. Е. Корепин, Непосредственные вычисления S-матрицы в модели Тирринга, Теорет. и матем. физика **41** : 2 (1979).
[61] K. G. J. Jacobi, Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum, Königsberg, 1829, (Ges. Math. Werke, B1, 1881, 49—239).
[62] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. II, М., Физматгиз, 1963.
[63] Г. Бэйтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т. 3, М., «Наука», 1967.
[64] H. Weber, Lehrbuch der Algebra, B.III. Elliptische Funktionen und Algebraische Zahlen, Braunschweig, 1908.
[65] Д. Мамфорд, Абелевы многообразия, М., «Мир», 1971.
[66] И. Р. Шафаревич, Основы алгебраической геометрии, М., «Наука», 1972.

Поступила в редакцию 1 июня 1979 г.