



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Мазуров, Д. О. Ревин, О холловом D_π -свойстве для
конечных групп,
Сиб. матем. журн., 1997, том 38, номер 1, 125–134

<https://www.mathnet.ru/smj429>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

29 апреля 2025 г., 10:39:42



О ХОЛЛОВОМ D_π -СВОЙСТВЕ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В. Д. Мазуров, Д. О. Ревин

Обобщая свойства силовских p -подгрупп, Ф. Холл в [1] ввел обозначения E_π , C_π , D_π для свойств группы содержать холлову π -подгруппу, удовлетворять условию сопряженности холловых π -подгрупп и условию погружения любой π -подгруппы в подгруппу, сопряженную с некоторой фиксированной холловой π -подгруппой. Он показал, что конечная группа разрешима в том и только в том случае, когда она для любого множества π простых чисел обладает свойством D_π . Тем не менее при любом фиксированном π класс D_π -групп значительно шире класса разрешимых групп, поскольку любая π -группа обладает свойством D_π .

Известно, что класс C_π -групп замкнут относительно расширений. Будет ли аналогичное утверждение справедливо и для D_π -групп, т. е. будет ли расширение одной D_π -группы с помощью другой снова D_π -группой? Этот вопрос, восходящий к Ф. Холлу, был поставлен Л. А. Шеметковым в Коуровской тетради [2, вопрос 3.62]. Сам Л. А. Шеметков опубликовал несколько работ, связанных с этой темой (см., например, [3, 4]), где основное внимание уделялось нахождению новых классов конечных групп, для которых ответ положителен.

В настоящей работе мы, двигаясь в том же направлении, указываем новый такой класс — класс групп, композиционные факторы которых обладают абелевыми силовскими 2-подгруппами. Этот результат оказывается следствием теорем, сводящих изучение общей проблемы к рассмотрению простых групп и групп их автоморфизмов (теоремы 1 и 2). Универсальный характер теоремы 1 дает надежду получить ответ на вопрос Шеметкова с помощью классификации конечных простых групп.

1. Основные определения и предварительные результаты

Пусть π — некоторое фиксированное множество простых чисел. Множество простых чисел, не принадлежащих π , будем обозначать символом π' . Натуральное число называется π -числом, если все его простые делители принадлежат π . Наибольшее π -число n_π , делящее натуральное число n , называется π -частью числа n . Конечная группа называется π -группой, если ее порядок — π -число. Холловой π -подгруппой конечной группы G называется любая подгруппа H , для которой $|G|_\pi = |H|$. Множество простых делителей натурального числа n обозначается через $\pi(n)$. Для конечной группы G определим $\pi(G)$ как $\pi(|G|)$.

О конечной группе G говорят, что она обладает свойством:

E_π (является E_π -группой), если она обладает холловой π -подгруппой;

C_π (является C_π -группой), если она обладает свойством E_π и все ее холловы π -подгруппы сопряжены;

D_π (является D_π -группой), если она обладает свойством C_π и любая ее π -подгруппа содержится в некоторой холловой π -подгруппе.

Как заметил Л. А. Шеметков, свойство D_π эквивалентно сопряженности максимальных π -подгрупп.

В следующем предложении объединены простые утверждения, которые будут неоднократно использоваться на протяжении статьи. Основным средством для их доказательства может служить теорема Шура — Цассенхауза о существовании и сопряженности дополнений к нормальной холловой π -подгруппе [5, теорема I.18.3].

Предложение. 1. Пусть G — E_π -группа, $A \trianglelefteq G$. Тогда если H — холлова π -подгруппа в G , то $H \cap A$ — холлова π -подгруппа в A , а HA/A — холлова π -подгруппа в G/A .

2. Расширение C_π -группы с помощью E_π -группы — E_π -группа, а расширение C_π -группы с помощью C_π -группы — C_π -группа.

3. Если A — нормальная подгруппа D_π -группы G , то G/A — D_π -группа.

4. Расширение π - или π' -группы с помощью D_π -группы — D_π -группа.

5. Если $A \trianglelefteq G$, $A \leq R \leq G$, причем $A, G, R/A$ — D_π -группы, то R является D_π -группой.

По определению Л. А. Шеметкова класс \mathscr{W} конечных групп, замкнутый относительно подгрупп и гомоморфных образов, называется классом Виландта, если выполняются следующие условия:

W1) если $G \in \mathscr{W}$, то существует такое линейное упорядочение δ множества всех простых чисел, что каждая π -подгруппа H группы G δ -дисперсивна, т. е. обладает нормальной силовой p -подгруппой, где p — минимальный по отношению δ простой делитель $|H|$;

W2) если $G \in \mathscr{W}$ обладает свойством E_π , то $N_G(U)$ обладает свойством E_π для любой π -подгруппы U из G .

Конечная группа обладает свойством D_π^s , если она обладает свойством D_π и ее холловы π -подгруппы разрешимы.

Л. А. Шеметков доказал следующие два утверждения.

Лемма [4]. Всякая E_π -группа, принадлежащая некоторому классу Виландта, обладает свойством D_π .

Теорема [4]. Расширение E_π -группы, принадлежащей некоторому классу Виландта, с помощью D_π^s -группы является D_π -группой.

2. Сведение к случаю простых групп

Пусть \mathscr{G} — замкнутый относительно нормальных подгрупп и гомоморфных образов класс конечных групп.

Скажем, что для \mathscr{G} верна D_π -гипотеза, если расширение любой D_π -группы из \mathscr{G} с помощью произвольной D_π -группы является D_π -группой.

Будем говорить, что D_π -гипотеза верна для простых групп из \mathscr{G} , если для любой неабелевой простой группы $P \in \mathscr{G}$ группа $\text{Out}(P)$ разрешима и свойством D_π обладает группа $\text{Aut}(P)$, если P является D_π -группой.

Скажем, что D_π -гипотеза верна для почти простых групп из \mathscr{G} , если для любой неабелевой простой группы $P \in \mathscr{G}$ группа $\text{Out}(P)$ разрешима и свойством D_π обладает любая группа G со следующими свойствами:

- 1) $\text{Inn}(P) \leq G \leq \text{Aut}(P)$, где P — простая неабелева группа;
- 2) G содержит нормальную подгруппу A из \mathscr{G} , содержащую P и обладающую свойством D_π .

Класс \mathcal{G} назовем D_π -нормальным, если в нем свойство D_π является наследственным для нормальных подгрупп.

Теорема 1. Пусть \mathcal{G} — замкнутый относительно нормальных подгрупп и гомоморфных образов класс конечных групп. Если D_π -гипотеза верна для почти простых групп из \mathcal{G} , то она верна для \mathcal{G} .

Доказательство. Предположим противное.

Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой выполнены следующие условия:

- а) в G есть нормальная подгруппа $A \in \mathcal{G}$,
- б) A и G/A обладают свойством D_π ,
- в) G не обладает свойством D_π .

Процесс уничтожения группы G разобьем на несколько этапов.

(1) G/A является π -группой.

В противном случае полный прообраз D холловой π -подгруппы из G/A обладает свойством D_π . Поскольку любая π -подгруппа из G сопряжена с подгруппой из фиксированной холловой π -подгруппы группы D , которая, очевидно, является холловой π -подгруппой группы G , группа G является D_π -группой. Противоречие.

(2) G обладает свойством C_π .

(3) Если S — холлова π -подгруппа в A , то $N_G(S)$ обладает свойством D_π .

Действительно, в группе G имеется холлова π -подгруппа H такая, что $H \cap A = S$. При этом $H \leq N_G(S)$. Если U — π -подгруппа из $N_G(S)$, то она нормализует $N_A(S)$, и группа $UN_A(S)/N_A(S)$ сопряжена с подгруппой из $HN_A(S)/N_A(S)$. Поскольку $HN_A(S)$ обладает нормальным рядом $1 \leq S \leq N_A(S) \leq HN_A(S)$, любой фактор которого π - или π' -группа, то по п. 4 предложения $HN_A(S)$ является D_π -группой. Поэтому U сопряжена с подгруппой из H , т. е. $N_G(S)$ обладает свойством D_π .

Зафиксируем некоторую холлову π -подгруппу H группы G . Среди π -подгрупп группы G , не сопряженных ни с одной подгруппой из H , выберем подгруппу U наименьшего порядка. Из (3) следует, что

(4) U не нормализует ни одну холлову π -подгруппу из A .

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в A . В силу п. 3 предложения A/N — D_π -группа. Поэтому G/N — расширение D_π -группы A/N с помощью π -группы $(G/N)/(A/N) \cong G/A$. Так как $|G/N| < |G|$, то по предположению

(5) G/N является D_π -группой.

В частности, UN/N сопряжена с подгруппой из HN/N . Если N — π - или π' -группа, то U сопряжена в HN с подгруппой из H и G является D_π -группой. Поэтому

(6) N не является π - или π' -группой.

Значит, N неразрешима. Пусть $T = N \cap H$. Подгруппа T является холловой π -подгруппой в N , и любая π -подгруппа из N сопряжена в A с подгруппой из T . Кроме того, в силу (6) $N \neq T$.

(7) $N_A(T)$ обладает свойством D_π и содержит холлову π -подгруппу из A .

Действительно, пусть $S = H \cap A$. Если C — π -подгруппа из $N_A(T)$, то CT содержится в S^x для некоторого $x \in A$. Поскольку $S^x \cap N$ — холлова π -подгруппа в N и $T \leq S^x \cap N$, то $T = S^x \cap N = (S \cap N)^x = T^x$, т. е. $x \in N_A(T)$. Поэтому C сопряжена в $N_A(T)$ с подгруппой из S .

(8) $AU = G$.

Действительно, если $AU \neq G$, то U содержится в холловой π -подгруппе из AU и, значит, нормализует некоторую холлову π -подгруппу из A , что противоречит (4).

(9) U не нормализует никакую холлову π -подгруппу из N .

В противном случае можно считать, что U нормализует T и, значит, нормализует $N_A(T)$. Но тогда $C = N_A(T)U$ — собственная подгруппа группы G , и минимальность G вместе с (7) дает свойство D_π для C . Таким образом, U содержится в холловой π -подгруппе из C , которая по (8) является холловой π -подгруппой группы G .

Поскольку N — неразрешимая минимальная нормальная подгруппа, $N = P_1 \times \dots \times P_t$, где $\{P_1, \dots, P_t\}$ — класс сопряженных простых неабелевых подгрупп группы G .

(10) Существует число $i \in \{1, \dots, t\}$ такое, что U нормализует P_i , но не нормализует ни одну из холловых π -подгрупп группы P_i .

Предположим противное. Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ — орбиты, на которые распадается множество $\{P_1, \dots, P_t\}$ при сопряжении элементами из U , и пусть $\Delta = \{P^{u_1}, \dots, P^{u_m}\}$ — одна из таких орбит. Здесь подгруппа P сопряжена в G с P_1 , $u_1 = 1, u_2, \dots, u_m \in U$. Очевидно, U нормализует $N_\Delta = \langle P^{u_1}, \dots, P^{u_m} \rangle = P^{u_1} \times \dots \times P^{u_m}$. Пусть $U_0 = N_U(P)$. Тогда $|U : U_0| = m$ и $U = U_0 u_1 \cup \dots \cup U_0 u_m$.

Если $m = 1$, то по предположению U нормализует некоторую холлову π -подгруппу C_Δ из $N_\Delta = P$. Если же $m > 1$, то $U_0 \neq U$, U_0 содержится в некоторой холловой π -подгруппе H из G , значит, нормализует холлову π -подгруппу $B_\Delta = H \cap N_\Delta = H \cap N \cap N_\Delta$ подгруппы N_Δ и, следовательно, холлову π -подгруппу $B = P \cap B_\Delta = P \cap H$ группы P . Очевидно, что $C_\Delta = \langle B^{u_1}, \dots, B^{u_m} \rangle = B^{u_1} \times \dots \times B^{u_m}$ — холлова π -подгруппа в N_Δ . Заметим, что U нормализует C_Δ . Действительно, если $u \in U$, то для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ имеет место равенство $u_i u = u_0 u_j$, где $u_0 \in U_0$, $j \in \{1, \dots, m\}$. Поэтому $(B^{u_i})^u = B^{u_0 u_j} = B^{u_j} \leq C_\Delta$. Значит, $C_\Delta^u = C_\Delta$. Итак, для любой орбиты Δ подгруппа U нормализует некоторую холлову π -подгруппу C_Δ группы N_Δ . Так как $C_{\Delta_1} \times \dots \times C_{\Delta_r}$ — холлова π -подгруппа в N , то U нормализует некоторую холлову π -подгруппу группы N , что противоречит (9).

Пусть P — та из подгрупп P_i , которую нормализует U и в которой нет холловых π -подгрупп, нормализуемых подгруппой U . Так как G действует на множестве $\{P_1, \dots, P_t\}$ транзитивно и $G = UA$, то

(11) A действует транзитивно на множестве $\{P_1, \dots, P_t\}$.

(12) $N_A(P)$ действует при сопряжении транзитивно на множестве холловых π -подгрупп группы P .

Действительно, пусть V — холлова π -подгруппа из P , Δ — множество всех подгрупп, сопряженных с V в $A_0 = N_A(P)$. Пусть $A = A_0 \cup A_0 a_2 \cup \dots \cup A_0 a_t$ — разложение A в объединение смежных классов по A_0 . По (11) $N = P^{a_1} \times \dots \times P^{a_t}$, где $a_1 = 1$, и $V_1 \times \dots \times V_t$ — холлова π -подгруппа в N для любых $V_i \in \Delta^{a_i}$. С другой стороны, множество $\{V_1 \times \dots \times V_t \mid V_i \in \Delta^{a_i}, i = 1, \dots, t\}$ является A -инвариантным и, следовательно, совпадает с множеством холловых π -подгрупп группы N . Это означает, что Δ совпадает с множеством всех холловых π -подгрупп из P , и (12) верно.

Пусть $\bar{G} = N_G(P)/C_G(P)$, $\bar{A} = N_A(P)C_G(P)/C_G(P)$, $\bar{U} = UC_G(P)/C_G(P)$. Очевидно, что

(13) $\bar{A} \trianglelefteq \bar{G}$ и $\bar{G} = \bar{A}\bar{U}$. В частности, $|\bar{G} : \bar{A}|$ делится только на простые числа из π .

(14) \bar{A} обладает свойством D_π .

Для доказательства рассмотрим две максимальных π -подгруппы \bar{B} и \bar{B}' из \bar{A} . Пусть B_1 и B'_1 — их полные прообразы в $N_A(P)C_G(P)$, а B и B' — подгруппы наименьшего порядка из $N_A(P)$, для которых $B_1 = BC_G(P)$ и $B'_1 = B'C_G(P)$. Тогда B и B' — π -подгруппы и, значит, содержатся в холловых π -подгруппах C и C' из A . Поскольку $C \cap N$ — холлова π -подгруппа в N , а $C \cap N \cap P$ — холлова π -подгруппа в P , то подгруппа B нормализует холлову π -подгруппу из P . Точно

так же B' нормализует холлову π -подгруппу из P .

Если L и M — две холловы π -подгруппы из P , то по (12) они сопряжены в $N_A(P)$, и поэтому можно считать, что B и B' содержатся в нормализаторе одной и той же холловой π -подгруппы L из P . Положим $\bar{L} = LC_G(P)/C_G(P)$ и $\bar{P} = PC_G(P)/C_G(P)$. Поскольку $P \cap C_G(P) = 1$, то $\bar{P} \simeq P$ и $\bar{L} \simeq L$. Группа $N_{\bar{P}}(\bar{L})$ является расширением π -группы посредством π' -группы, а $N_{\bar{A}}(\bar{L})/N_{\bar{P}}(\bar{L}) = N_{\bar{A}}(\bar{L})/(N_{\bar{A}}(\bar{L}) \cap \bar{P}) \simeq N_{\bar{A}}(\bar{L})\bar{P}/\bar{P}$ изоморфна подгруппе группы $\text{Out}(P)$ и, значит, разрешима. Поэтому $N_{\bar{A}}(\bar{L})$ является D_π -группой. Отсюда вытекает, что \bar{B}^x и \bar{B}' порождают π -подгруппу для некоторого $x \in N_{\bar{A}}(\bar{L})$, и, следовательно, $\bar{B}^x = \bar{B}'$.

(15) $N = P$ и $C_G(P) = 1$.

В противном случае $|\bar{G}| < |G|$ и в силу минимальности G из (13) и (14) вытекает, что \bar{G} обладает свойством D_π . В частности, \bar{U} нормализует холлову π -подгруппу из \bar{P} , и, значит, U нормализует холлову π -подгруппу из P , что противоречит выбору P .

Так как $P \trianglelefteq G$, $C_G(P) = 1$ и $P \leq A$, то по условию теоремы G обладает свойством D_π , что противоречит выбору G . Теорема доказана.

Из теоремы 1 и п. 5 предложения вытекает

Следствие. Пусть \mathcal{G} — D_π -нормальный класс. Если D_π -гипотеза верна для простых групп из \mathcal{G} , то она верна для \mathcal{G} .

Из теоремы Ф. Гросса [6, теорема А], использующей классификацию конечных простых групп, вытекает D_π -нормальность класса всех конечных групп для случая, когда $2 \notin \pi$. Неизвестно, выполнено ли это свойство в общем случае. Следующая теорема дает достаточные условия D_π -нормальности.

Теорема 2. Пусть \mathcal{G} — замкнутый относительно нормальных подгрупп и гомоморфных образов класс конечных групп, и пусть всякая простая неабелева группа P из \mathcal{G} удовлетворяет одному из следующих условий:

- D1) P не является E_π -группой;
- D2) существуют π -подгруппа U и холлова π -подгруппа H в P такие, что U не изоморфна ни одной подгруппе из H ;
- D3) P — D_π -группа.

Тогда класс \mathcal{G} является D_π -нормальным.

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{G}$, G — D_π -группа и A — ее нормальная подгруппа. Покажем индукцией по $|A|$, что A обладает свойством D_π . Достаточно проверить свойство C_π для A .

По п. 1 предложения A — E_π -группа.

Допустим, существует такая нормальная подгруппа M в G , что $1 < M < A$. По предположению индукции M — D_π -группа. В силу п. 3 предложения G/M обладает свойством D_π . Так как $A/M \trianglelefteq G/M$ и $|A/M| < |A|$, то по предположению индукции A/M — D_π -группа. Но тогда A — C_π -группа по п. 2 предложения.

Пусть теперь A — минимальная нормальная подгруппа группы G . Если A абелева, то $|A| = p^m$, где p — некоторое простое число, и A является либо π -, либо π' -группой. Если A неабелева, то $A = P_1 \times \dots \times P_n$, где P_1, \dots, P_n — сопряженные в G простые неабелевы группы.

Поскольку A — E_π -группа, P_1, \dots, P_n тоже E_π -группы и поэтому не удовлетворяют условию D1.

Допустим, они удовлетворяют условию D2. Тогда существуют холлова π -подгруппа H_1 и π -подгруппа U_1 в P_1 такие, что U_1 не вкладывается изоморфно в H_1 . Пусть теперь $g_1 = 1, g_2, \dots, g_n$ — элементы, для которых $P_i = P_1^{g_i}$. Положим $H_i = H_1^{g_i}, U_i = U_1^{g_i}, i = 1, \dots, n$.

$H = H_1 \times \dots \times H_n$, $U = U_1 \times \dots \times U_n$. Легко видеть, что H — холлова π -подгруппа в A . Пусть F — холлова π -подгруппа в G такая, что $H \leq F$. Тогда $U \leq F^g$ для некоторого $g \in G$. Но тогда $U \leq F^g \cap A = (F \cap A)^g = H^g$ и $U_1 = U \cap P_1 = H^g \cap P_1 = (H \cap P_1^{g^{-1}})^g$. Подгруппа $P_1^{g^{-1}}$ совпадает с одной из групп P_1, \dots, P_n . Пусть $P_1^{g^{-1}} = P_j$. Тогда $U_1 \leq (H \cap P_j)^g = H_j^g = H_1^{g_j g}$, что невозможно.

Значит, подгруппы P_i могут удовлетворять только условию D3. Но тогда, как легко видеть, A — D_π -группа. Теорема доказана.

Как следствие доказанных теорем и описания холловых подгрупп в знакопеременных группах, отметим следующий результат.

Теорема 3. Пусть конечная группа G является расширением D_π -группы A с помощью D_π -группы B . Если все композиционные факторы группы A изоморфны знакопеременным группам или имеют простой порядок, то G обладает свойством D_π .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим сначала следующий факт.

Лемма 1. Группы A_n и S_n , $n \geq 5$, обладают свойством D_π в том и только в том случае, когда они являются π - либо π' -группами или же когда $\pi(n!) \cap \pi = \{p\}$, где p — простое число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A_n является C_π -группой, то и S_n является C_π -группой. Теоремы [1, A4] и [7, A] дают описание холловых подгрупп группы S_n . Это S_n , силовские подгруппы, S_{n-1} , если n — простое число, холловы $\{2, 3\}$ -подгруппы, если $n = 5, 7, 8$. Рассмотрим соответствующие случаи.

Если в S_n холловой π -подгруппой является сама S_n или силовская p -подгруппа, то соответственно S_n и A_n — π -группы или $\pi \cap \pi(n!) = \{p\}$.

Если n — простое число и $\pi((n-1)!) \subseteq \pi$, то S_{n-1} — холлова π -подгруппа в S_n , а A_{n-1} — холлова π -подгруппа в A_n . Случай, когда $n = 5$, будет рассмотрен ниже. Пусть $n > 5$. Рассмотрим группу $\langle (1, 2)(3, 4)(5, \dots, n) \rangle$. Это π -подгруппа в A_n , которая не содержится ни в какой подгруппе, сопряженной с S_{n-1} , так как не имеет неподвижных символов. Значит, S_n и A_n не являются D_π -группами в этом случае.

Если $\pi \cap \pi(n!) = \{2, 3\}$, то по [1, теорема A4] S_n не обладает свойством D_π .

Пусть $n = 5$. В A_5 имеется подгруппа порядка 6 (нормализатор силовской 3-подгруппы), не вкладывающаяся в A_4 , которая является холловой $\{2, 3\}$ -подгруппой группы A_5 .

Пусть $n = 7$. В S_n имеется холлова $\{2, 3\}$ -подгруппа $H = S_3 \times S_4$. Множество $\{1, \dots, 7\}$ под действием H распадается на две орбиты, одна из которых имеет длину 3, а другая — 4. $A_7 \cap H$ — холлова π -подгруппа в A_7 . Рассмотрим подгруппу

$$U = \langle (1, 2)(3, 4), (3, 4)(5, 6), (1, 3, 5)(2, 4, 6) \rangle$$

порядка 12 из A_7 . Она действует транзитивно на множестве из шести элементов, поэтому не сопряжена ни с какой подгруппой из H .

Пусть $n = 8$. В S_8 холловы $\{2, 3\}$ -подгруппы имеют вид $S_4 \wr S_2$, причем S_8 обладает свойством $C_{\{2,3\}}$. Подгруппа $A_8 \cap (S_2 \wr S_4)$ из A_8 является $\{2, 3\}$ -подгруппой, и она, как легко проверить, не содержится ни в какой холловой $\{2, 3\}$ -подгруппе группы A_8 . Лемма доказана.

Пусть \mathcal{G} — класс всех конечных групп, композиционные факторы которых либо абелевы, либо изоморфны знакопеременным группам. Класс \mathcal{G} замкнут относительно нормальных подгрупп и гомоморфных образов. Любая неабелева простая группа P из \mathcal{G} изоморфна A_n для некоторого $n \geq 5$. Известно, что $\text{Aut}(P) \simeq S_n$, если $n \neq 6$, и $\text{Out}(P) \simeq Z_2 \times Z_2$, если $n = 6$. Из леммы 1 вытекает, что если $\text{Inn}(P) \leq A \trianglelefteq G \leq$

$\text{Aut}(P)$ и A обладает свойством D_π , то G также обладает свойством D_π . Применение теоремы 1 завершает доказательство.

3. D_π -теорема для конечных групп, композиционные факторы которых обладают абелевыми силовскими 2-подгруппами

В этом пункте будет доказана справедливость D_π -гипотезы для класса $SA(2)$ конечных групп, композиционные факторы которых обладают абелевыми силовскими 2-подгруппами. Очевидно, что этот класс замкнут относительно подгрупп и гомоморфных образов.

По [8, 9] простые группы из $SA(2)$ исчерпываются следующим списком:

- $PSL(2, 2^n)$, $n \geq 2$;
- $PSL(2, q)$, $q = p^s$, где p — простое число, причем $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$;
- группы Ри $Re(q)$, где $q = 3^{2n+1}$, $n \geq 1$;
- спорадическая группа Янко J_1 .

Лемма 2. Пусть $2 \in \pi$. Тогда

- 1) $SA(2)$ — D_π -нормальный класс;
- 2) любая простая D_π -группа P из $SA(2)$ либо является π -группой, либо принадлежит некоторому классу Виландта относительно π .

Доказательство. Проверим, что любая простая группа P из класса $SA(2)$ удовлетворяет одному из условий D1–D3 теоремы 2.

Допустим, что P является E_π -группой.

Если $\pi(P) \subseteq \pi$, то выполнено условие D3. Пусть $\pi(P)$ не содержится в π . Так как $2 \in \pi \cap \pi(P)$, то холлова π -подгруппа H из P является собственной π -подгруппой группы P , содержащей ее силовскую 2-подгруппу. Рассмотрим все возможные случаи для P .

Пусть $P = PSL(2, 2^n)$, $n \geq 2$. Тогда $|P| = 2^n(2^n - 1)(2^n + 1)$, $|P|_2 = 2^n$.

Из описания максимальных подгрупп группы P (см. [5]) вытекает, что H содержится в подгруппе Фробениуса порядка $2^n(2^n - 1)$ с ядром порядка 2^n . Если $\pi \cap \pi(P) \neq \{2\}$ и p — нечетное простое число из $\pi \cap \pi(P)$, то в P содержится подгруппа порядка $2p$, не изоморфная ни одной подгруппе из H , т. е. P удовлетворяет условию D2. Если $\pi \cap \pi(P) = \{2\}$, то имеет место D3. Кроме того, в последнем случае P обладает нильпотентной холловой π -подгруппой, следовательно, принадлежит некоторому классу Виландта относительно π (см. [4]).

Пусть $P = PSL(2, q)$, $q = p^s$, p — нечетное простое число, $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$. Тогда $|P| = \frac{1}{2}q(q-1)(q+1)$, $|P|_2 = 4$.

Как следует из [5, теорема 8.27], любая подгруппа группы P является одной из следующих групп: элементарной абелевой p -группой, подгруппой нормализатора силовской p -подгруппы, циклической подгруппой порядка z , где $z \mid (q \pm 1)/2$, группой диэдра порядка $2z$, группой, изоморфной A_4 , группой, изоморфной A_5 , если $p = 5$ или $(q^2 - 1) \equiv 0 \pmod{5}$, $PSL(2, p^m)$, где $m \mid s$.

Заметим, что $p \notin \pi$, так как в противном случае холлова π -подгруппа должна содержаться в нормализаторе силовской p -подгруппы, который не содержит силовскую 2-подгруппу группы P .

Допустим, что $3 \in \pi \cap \pi(P)$.

Если A_5 является холловой π -подгруппой, то $\pi \cap \pi(P) = \{2, 3, 5\}$. Так как $3, 5 \in \pi$, $3, 5 \neq p$, то $3, 5 \mid (q^2 - 1)$, поэтому в P имеется по крайней мере одна из следующих подгрупп, не изоморфных ни одной из подгрупп группы A_5 : циклическая подгруппа порядка 15, группа диэдра порядка 20, группа диэдра порядка 12.

Допустим, холловой π -подгруппой является A_4 ; P содержит группу диэдра порядка 6, а в A_4 подгрупп порядка 6 нет.

Если $3 \in \pi$, то кроме A_4 и A_5 холловой π -подгруппой группы P может быть только группа диэдра порядка $2z$, где $3 \mid z$. A_4 будет в этом случае π -подгруппой, не вкладывающейся изоморфно в холлову π -подгруппу.

Таким образом, если $3 \in \pi$, имеет место случай D2.

Пусть $3 \notin \pi$. Тогда холловой π -подгруппой может быть только группа диэдра порядка $2z$, где 3 не делит z . При этом $\pi \cap \pi(P) \subseteq \pi(2z)$. Покажем, что в этом случае класс \mathscr{W} гомоморфных образов подгрупп из P образует класс Виландта относительно π .

Если K — группа из \mathscr{W} и U — ее π -подгруппа, то легко проверить, что U будет δ -дисперсивной, если для всякого $s \in \pi \cap \pi(P)$ положить $5\delta s$ и $s\delta^2$.

Допустим, что K — E_π -группа. Так как всякая π -подгруппа группы K разрешима, ее нормализатор в K тоже разрешим и, значит, обладает свойством E_π .

Итак, \mathscr{W} — класс Виландта. По [4, лемма 1] P — D_π -группа, и имеет место случай D3.

Пусть $P = Re(q)$, $q = 3^{2n+1}$, $n \geq 1$. Тогда $|P| = q^3(q^3+1)(q-1)$, $|P|_2 = 8$, и по [10] любая максимальная подгруппа P содержится в списке:

центральный инволюции $C(\eta) \simeq (\eta) \times PSL(2, q)$;

$Re(m)$, где $m^p = q$, p — простое число;

нормализатор силовой 3-подгруппы $N(U(q)) \simeq q^{1+2} : (q-1)$;

$N(A_i)$, $i = 1, 2, 3$, — нормализатор холловой циклической подгруппы A_i , где $|A_1| = (q+1)/4$, $|A_2| = q+1-3^{n+1}$, $|A_3| = q+1+3^{n+1}$. При этом $N(A_1) \simeq (2^2 \times A_1) : 6$, $N(A_i) \simeq A_i : 6$, $i = 2, 3$.

Пусть M — максимальная подгруппа группы P , содержащая ее холлову π -подгруппу H . Очевидно, что M может быть только подгруппой вида $C(\eta)$, $Re(q)$, $N(A_1)$.

Заметим, что $3 \notin \pi$, так как $|P|_3 = q^3$ делит только порядок подгруппы $N(U(q))$, где H содержаться не может.

Если $M = C(\eta)$, то $H_1 = H \cap PSL(2, q)$ — холлова π -подгруппа в $PSL(2, q)$, а $H = \langle \eta \rangle \times H_1$. Так как $3 \notin \pi$, то $H_1 \neq PSL(2, q)$, поэтому H_1 является группой диэдра порядка $2z$, где $z \mid (q \pm 1)/2$. Поскольку $q-1 \equiv 2 \pmod{4}$, число $(q+1)/2$ делится на z . В группе $N(A_1)$ есть подгруппа $2^2 \times A_1$, холлова π -подгруппа которой не вкладывается изоморфно в H , как следует из строения H и H_1 , поэтому имеет место D2.

Если $M = N(A_1)$, то π -подгруппа $(\eta) \times H_1$ из $C(\eta)$ не вкладывается изоморфно в M , и реализуется D2.

Пусть теперь $M = Re(m)$. Так как $3 \notin \pi$, то $H \neq M$. Пусть $M_1 \leq M$ — минимальная подгруппа типа $Re(m)$, содержащая H . Если $m > 3$, то H содержится в некоторой максимальной подгруппе группы M_1 , не являющейся группой Ри. Этот случай уже рассмотрен. Допустим, что $m = 3$. Группа $M_1 = Re(3)$ содержит нормальную подгруппу индекса 3, изоморфную $PSL(2, 8)$; $|PSL(2, 8)| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$. Поскольку $3 \notin \pi$, имеем $\pi \cap \pi(P) \subseteq \{2, 7\}$ и $H \leq PSL(2, 8)$. Если $7 \in \pi$, то, как мы заметили выше, имеет место случай D2. Если $7 \notin \pi$, то H является силовой 2-подгруппой, и реализуется случай D3, при этом P принадлежит некоторому классу Виландта.

Пусть $P = J_1$. Тогда $|P| = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$, $|P|_2 = 8$, и список максимальных подгрупп по [11] исчерпывается группами $PSL(2, 11)$ порядка 660, $2^3 : 7 : 3$ порядка 168, $2 \times A_5$ порядка 120, 19×6 порядка 114, $11 : 10$ порядка 110, $(3 : 2) \times (5 : 2)$ порядка 60, $7 : 6$ порядка 42.

Пусть M — максимальная подгруппа, содержащая H . Порядок M может быть равен только 120 или 168, поэтому $\pi(P) \cap \pi \subseteq \{2, 3, 5\}$ или

$\{2, 3, 7\}$.

Пусть $5 \in \pi$. Если $3 \in \pi$, то $H = 2 \times A_5$. Но максимальная подгруппа порядка 60 не вкладывается изоморфно в H . Если $3 \notin \pi$, то $|H| = 40$, а $|H \cap A_5| = 20$. Но в A_5 нет подгрупп порядка 20, т. е. P не может быть E_π -группой.

Пусть $7 \in \pi$. Если $3 \in \pi$, то $H = M$, $|H| = 168$. В максимальной подгруппе порядка 60 есть подгруппа $3 : 2$, которая не вкладывается изоморфно в H . Если $3 \notin \pi$, то $H = 2^3 : 7$. Подгруппа $7 : 2$ из максимальной подгруппы порядка 42 не вкладывается в $2^3 : 7$.

Пусть теперь $5, 7 \notin \pi$. Если $3 \in \pi$, то группа $2 \times A_4$ из максимальной подгруппы порядка 120 будет холловой π -подгруппой, а подгруппа $3 : 2$ из подгруппы порядка 60 в нее изоморфно не вкладывается. Если теперь $\pi(P) \cap \pi = \{2\}$, то P является D_π -группой по теореме Силова, и принадлежит некоторому классу Виландта. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $2 \notin \pi$, P — простая неабелева группа из $SA(2)$. Тогда P принадлежит некоторому классу Виландта относительно π .

Доказательство. Из списка максимальных подгрупп группы $PSL(2, 2^n)$ вытекает, что эта группа обладает циклическими силовскими p -подгруппами для любого $p \in \pi$. Это же утверждение справедливо и для J_1 , так как нечетные простые делители входят в разложение $|J_1|$ в 1-й степени. Значит, эти группы принадлежат некоторому классу Виландта (см. [4]).

Пусть $P = PSL(2, q)$, $q = p^s$, p — нечетное простое число, $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$. Если $p \notin \pi$, то P обладает циклическими силовскими s -подгруппами для всякого $s \in \pi$, как вытекает из списка максимальных подгрупп P , т. е. P принадлежит некоторому классу Виландта. Если $p \in \pi$, то рассмотрим класс \mathscr{W} гомоморфных образов подгрупп из P .

Пусть $K \in \mathscr{W}$, U — нетривиальная π -подгруппа группы K . Легко проверить, что U является δ -дисперсивной, если p — минимум π по отношению δ . Нетрудно также показать, что группа $N_K(U)$ всегда разрешима, в частности, обладает свойством E_π . Таким образом, \mathscr{W} — класс Виландта.

В группе $P = Re(q)$ среди всех силовских p -подгрупп, где p нечетно, лишь силовская 3-подгруппа не является циклической. Если $3 \notin \pi$, то P принадлежит классу групп с циклическими силовскими p -подгруппами для любого $p \in \pi$. Если $3 \in \pi$, то рассмотрим класс \mathscr{W} гомоморфных образов подгрупп группы P . Как следует из списка максимальных подгрупп группы $Re(q)$, любая π -подгруппа U группы $K \in \mathscr{W}$ будет δ -дисперсивной, если для любых нечетных $p_1 \in \pi(q-1)$ и $p_2 \in \pi(q^3+1)$ имеем $p_1 \delta 3$ и $3 \delta p_2$ (ясно, что такое δ существует, так как $(q-1, q^3+1) = 2$). Если K — E_π -группа, то нормализатор любой ее нетривиальной π -подгруппы разрешим и, значит, обладает свойством D_π по теореме Ф. Холла. Значит, \mathscr{W} — класс Виландта. Лемма доказана.

Теорема 4. Для любого множества простых чисел π расширение D_π -группы, композиционные факторы которой обладают абелевой силовской 2-подгруппой, с помощью произвольной D_π -группы будет D_π -группой.

Доказательство. Покажем, что D_π -гипотеза верна в классе $SA(2)$. Из [6, теорема А] и п. 1 леммы 2 вытекает D_π -нормальность класса $SA(2)$. Пусть P — неабелева простая D_π -группа из $SA(2)$. По п. 2 леммы 2 и по лемме 3 P принадлежит некоторому классу Виландта или является π -группой, и из [4, теорема 1] и п. 4 предложения следует, что $\text{Aut}(P)$ — D_π -группа. Применение следствия теоремы 1 завершает доказательство.

В статье [1] Ф. Холл высказал гипотезу о том, что $E_\pi \Rightarrow D_\pi$ в случае, когда $2 \notin \pi$. Ф. Гросс в [12] показал, что в общем случае это неверно. Однако из теоремы 4 вытекает

Следствие. Для групп, композиционные факторы которых обладают абелевой силовской 2-подгруппой, свойства E_π и D_π эквивалентны, если $2 \notin \pi$.

Доказательство будем проводить индукцией по порядку группы. Пусть G — E_π -группа из $SA(2)$. Если G имеет собственную нормальную подгруппу A , то A и G/A — D_π -группы по предположению индукции. По теореме 4 G — D_π -группа.

Остается рассмотреть случай, когда G проста. Если G абелева, то все ясно, а если G неабелева, то по лемме 3 G принадлежит некоторому классу Виландта относительно π . По [4, лемма 1] G обладает свойством D_π . Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hall P. Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6, N 11. P. 286–304.
2. *Нерешенные вопросы теории групп*. Коуровская тетрадь. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1992.
3. Шеметков Л. А. Силовские свойства конечных групп // Мат. сб. 1968. V. 76, N 2. P. 271–287.
4. Шеметков Л. А. О силовских свойствах конечных групп // Докл. АН БССР. 1972. Т. 16, № 10. С. 881–883.
5. Huppert B. Endliche Gruppen. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
6. Gross F. Conjugacy of odd order Hall subgroups // Bull. London Math. Soc. 1987. V. 19(4), N 79. P. 311–319.
7. Thompson J. Hall subgroups of the symmetric groups // J. Combin. Theory. Ser. A. 1966. V. 1. P. 271–279.
8. Feit W., Thompson J. G. Solvability of groups of odd order // Pacific J. Math. 1963. V. 13, N 3. P. 775–1029.
9. Walter J. H. The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-groups // Ann. of Math. (2). 1969. V. 89. P. 405–514.
10. Левчук В. М., Нужин Я. Н. О строении групп Ри // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 1. С. 26–41.
11. Atlas of finite groups / J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson. Oxford, 1985.
12. Gross F. On a conjecture of Philip Hall // Proc. London Math. Soc. 1986. V. 52(3). P. 464–494.