А. Д. Бендиков, И. В. Павлов, Ограниченность в $L_p(T^\infty)$ одного класса векторных мультипликаторных операторов, *Сиб. матем. журн.*, 1986, том 27, номер 1, 3–10

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Т. XXVII, № 1 ЯНВАРЬ — ФЕВРАЛЬ 1986

УДК 517.98

А. Д. БЕНДИКОВ, И. В. ПАВЛОВ

ОГРАНИЧЕННОСТЬ В $L_p(T^\infty)$ ОДНОГО КЛАССА ВЕКТОРНЫХ МУЛЬТИПЛИКАТОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Введение

Рассмотрим в R^n векторный оператор, компоненты которого суть операторы Рисса, т. е. $\mathbf{R}=(R_1, R_2, \ldots, R_n)$, где $(\widehat{R_jf})(\xi)=\frac{i\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi)$, $\xi\in R^n$. Обозначим $|\mathbf{R}f(x)|=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|R_jf(x)|^2\right)^{1/2}$. В заметке [1] И. Стейн дает схему доказательства следующего неравенства:

$$\|\mathbf{R}f\|_p\leqslant A_p\|f\|_p,\quad 1<p<\infty, \tag{1}$$

причем константа A_p как функция от n ограничена. В этой связи он ставит вопрос об устремлении n к бесконечности, т. е. о перенесении неравенства (1) на надлежащим образом подобранные бесконечномерные пространства. В настоящей статье в качестве такого пространства рассматривается бесконечномерный тор T^∞ — счетное произведение окружностей T^1. Результаты этой работы анонсированы в [2] (см. также [3]). В данной статье все теоремы сопровождаются подробными доказательствами.

§ 1. Основные обозначения и некоторые вспомогательные факты

Обозначим через $\mathscr{L}$ множество бесконечно дифференцируемых функций на T^∞, зависящих от конечного числа переменных. Зададим на $\mathscr{L}$ бесконечномерный аналог оператора Лапласа:

$$\Delta f=\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2D_{x_k}^{(2)}f,$$

где $a_k>0$, а $D_{x_k}^{(2)}$ — оператор дифференцирования 2-го порядка по переменной x_k. Следуя П. А. Мейеру [4], введем также в рассмотрение оператор поля оператора Δ, который на функциях из $\mathscr{L}+i\mathscr{L}$ имеет вид

$$\Gamma(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2D_{x_k}fD_{x_k}\overline{g}.$$

В работе [5] установлено, что оператор Δ является генератором винеровской полугруппы (P_t), которая представляет собой проективный предел соответствующих винеровских полугрупп на конечномерных торах T^n при $n\to\infty$. С помощью субординатора $h_t(s)=(4\pi)^{-1/2}ts^{-3/2}\exp\left(\frac{-t^2}{4s}\right)$ зададим полугруппу Пуассона (Q_t), именно

$$Q_tf=\int_0^\infty P_sf\cdot h_t(s)\,ds.$$

Генератор полугруппы (Q_t) обозначим через B. Нетрудно показать, что

$B^2 f = -\Delta f$. Без труда вычисляются также символы (преобразования Фурье) операторов Δ, B, P_t, Q_t:

$$\widehat{\Delta f}(\theta) = -\psi(\theta)\hat{f}(\theta),$$
$$\widehat{Bf}(\theta) = -\sqrt{\psi(\theta)}\hat{f}(\theta),$$
$$\widehat{P_t f}(\theta) = e^{-t\psi(\theta)}\hat{f}(\theta),$$
$$\widehat{Q_t f}(\theta) = e^{-t\sqrt{\psi(\theta)}}\hat{f}(\theta),$$

где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots)$ — элемент бесконечномерной целочисленной решетки Z^∞, являющейся группой характеров группы T^∞, а $\psi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \theta_k^2$. Заметим, что у целочисленного вектора θ лишь конечное число координат отлично от нуля.

Пусть ν — мера Хаара на T^∞, а $d\theta$ — соответствующая мера Хаара на Z^∞. Обозначим

$$L_p = \left\{ f : \int_{T^\infty} |f|^p \, d\nu < \infty \right\},$$

$$L_p(Z^\infty) = \left\{ \varphi : \int_{Z^\infty} |\varphi(\theta)|^p \, d\theta < \infty \right\}.$$

Легко видеть, что $\mathscr{L}$ плотно в L_p $(1 \leqslant p < \infty)$.

В дальнейшем нам понадобится следующее

Предложение 1. *Функция f на T^∞, зависящая от конечного числа переменных, принадлежит $\mathscr{L}$ тогда и только тогда, когда для любого $n \geqslant 0$ $\psi^n \hat{f} \in L_1(Z^\infty)$.*

Доказательство этого факта стандартное, и мы его опускаем.

Для $f \in \mathscr{L}$ введем в рассмотрение следующие функции Литтлвуда — Пэли (см. [4, с. 164]):

$$G_\rightarrow f = \left\{ \int_0^\infty (D_t Q_t f)^2 \, t dt \right\}^{1/2},$$

$$Gf = \left\{ \int_0^\infty [\Gamma(Q_t f, Q_t f) + (D_t Q_t f)^2] \, t dt \right\}^{1/2}.$$

Очевидно, что

$$G_\rightarrow f \leqslant Gf. \tag{2}$$

Теорема 1.

$$\| Gf \|_{L_p} \leqslant c_p \| f \|_{L_p}, \quad 1 < p < \infty. \tag{3}$$

Доказательство этого неравенства содержится в [4].

§ 2. Неравенства для $G_\rightarrow$ — функции векторного аргумента

Пусть $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots)$ — вектор-функция на T^∞ с бесконечным числом компонент. Положив $|\mathbf{f}| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 \right)^{1/2}$, обозначим $\mathbf{L}_p = \left\{ \mathbf{f} : \int_{T^\infty} |\mathbf{f}|^p \, d\nu < \infty \right\}$. Для вектор-функции $\mathbf{f}$, у которой все компоненты лежат в $\mathscr{L}$, определим

$$G_\rightarrow \mathbf{f} = \left\{ \int_0^\infty |D_t Q_t \mathbf{f}|^2 \, t dt \right\}^{1/2}.$$

Теорема 2. *При $1 < p < \infty$ справедливо неравенство*

$$\| G_\rightarrow \mathbf{f} \|_{\mathbf{L}_p} \leqslant c_p \| \mathbf{f} \|_{\mathbf{L}_p}. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждения будем вести, предполагая, что вектор $\mathbf{f}$ имеет конечное число отличных от нуля компонент (затем применяется монотонный предельный переход). Через $c_p^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots)$ обозначим константы, зависящие только от p.

Пусть $s\in[0, 1]$ и $\mathbf{r}(s)=(r_1(s), r_2(s), \ldots)$ — вектор, составленный из функций Радемахера [6, с. 124]. Применив к скалярной функции $\mathbf{rf}$ неравенства (2) и (3), будем иметь

$$\|G_\to(\mathbf{rf})\|_{L_p}^p\leqslant c_p^{(1)}\|\mathbf{rf}\|_{L_p}^p.$$

Интегрируя это неравенство по отрезку [0, 1], делая очевидные преобразования и применяя неравенство Хинчина [6, с. 124, (44)], получим

$$\int_0^1 ds\|G_\to(\mathbf{rf})\|_{L_p}^p\leqslant c_p^{(1)}\int_0^1 ds\|\mathbf{rf}\|_{L_p}^p=c_p^{(1)}\int_0^1 ds\int_{T^\infty}d\nu|\mathbf{rf}|^p=$$

$$=c_p^{(1)}\int_{T^\infty}d\nu\int_0^1 ds|\mathbf{rf}|^p\leqslant c_p^{(2)}\int_{T^\infty}d\nu|\mathbf{f}|^p=c_p^{(2)}\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}_p}^p.$$

Итак,

$$\int_0^1 ds\|G_\to(\mathbf{rf})\|_{L_p}^p\leqslant c_p^{(2)}\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}_p}^p. \tag{5}$$

Теперь оценим снизу интеграл, стоящий в левой части неравенства (5). Имеем

$$\int_0^1 ds\|G_\to(\mathbf{rf})\|_{L_p}^p=\int_0^1 ds\int_{T^\infty}d\nu\,(G_\to(\mathbf{rf}))^p=$$

$$=\int_{T^\infty}d\nu\int_0^1 ds\,(G_\to(\mathbf{rf}))^p\geqslant\int_{T^\infty}d\nu\left(\int_0^1 dsG_\to(\mathbf{rf})\right)^p. \tag{6}$$

Для удобства введем временно следующие обозначения:

$$\mu(dt)=tdt,\quad \mathbf{g}=D_tQ_t\mathbf{f},$$
$$\varphi=|D_tQ_t(\mathbf{rf})|=|\mathbf{r}D_tQ_t\mathbf{f}|=|\mathbf{rg}|,$$

$L_2(\mu)$ — пространство функций на $[0, \infty[$, интегрируемых с квадратом по мере μ.

Считая, что функция h пробегает единичную сферу в $L_2(\mu)$, получаем

$$\int_0^1 dsG_\to(\mathbf{rf})=\int_0^1 ds\left(\int_0^\infty(D_tQ_t(\mathbf{rf}))^2tdt\right)^{1/2}=\int_0^1 ds\|\varphi\|_{L_2(\mu)}=$$

$$=\int_0^1 ds\sup_h|\langle\varphi, h\rangle_\mu|\geqslant\sup_h\int_0^1 ds|\langle\varphi, h\rangle_\mu|\geqslant$$

$$\geqslant\sup_h\left|\int_0^1 ds\langle\varphi, h\rangle_\mu\right|=\sup_h\left|\int_0^1 ds\int_0^\infty\varphi hd\mu\right|=$$

$$=\sup_h\left|\int_0^\infty hd\mu\int_0^1\varphi ds\right|=\sup_h\left|\int_0^\infty hd\mu\int_0^1|\mathbf{rg}|ds\right|\geqslant$$

$$\geqslant c_1\sup_h\left|\int_0^\infty h|\mathbf{g}|d\mu\right|=c_1\||\mathbf{g}|\|_{L_2(\mu)}=c_1G_\to\mathbf{f}.$$

Учитывая это, продолжим неравенство (6):

$$\int_0^1 ds \| G_{\rightarrow} (\mathbf{rf}) \|_{L_p}^p \geqslant c_p^{(3)} \int_{T^\infty} d\nu (G_{\rightarrow}\mathbf{f})^p = c_p^{(3)} \| G_{\rightarrow}\mathbf{f} \|_{L_p}^p. \tag{7}$$

Сопоставляя (5) и (7), получаем требуемое неравенство.

Теорема 3. *Если* $1 < p < \infty$ *и вектор-функция* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots)$ *такова, что* $\langle f_k, 1 \rangle = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *то*

$$\| \mathbf{f} \|_{\mathbf{L}_p} \leqslant c_p \| G_{\rightarrow}\mathbf{f} \|_{L_p}. \tag{8}$$

Доказательство. Опять достаточно предположить, что $\mathbf{f}$ — конечномерный вектор. Пусть число q таково, что $1/q + 1/p = 1$, а $\mathbf{g}$ — конечномерный вектор, компоненты которого лежат в $\mathscr{L}$. Тогда, применяя равенство Парсеваля и ортогональность единице компонент вектора $\mathbf{f}$, получим

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \langle \widehat{\mathbf{f}}, \widehat{\mathbf{g}} \rangle = 4 \int_0^\infty t dt \langle - \sqrt{\psi}\, e^{-t\sqrt{\psi}} \widehat{\mathbf{f}}, \ - \sqrt{\psi}\, e^{-t\sqrt{\psi}} \widehat{\mathbf{g}} \rangle =$$

$$= 4 \int_0^\infty \langle \widehat{D_t Q_t \mathbf{f}}, \widehat{D_t Q_t \mathbf{g}} \rangle t dt = 4 \int_{T^\infty} d\nu \int_0^\infty (D_t Q_t \mathbf{f})(D_t Q_t \mathbf{g})\, t dt \leqslant$$

$$\leqslant 4 \int_{T^\infty} d\nu \left(\int_0^\infty (D_t Q_t \mathbf{f})^2\, t dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty (D_t Q_t \mathbf{g})^2\, t dt \right)^{1/2} =$$

$$= 4 \langle G_{\rightarrow}\mathbf{f}, G_{\rightarrow}\mathbf{g} \rangle \leqslant 4 \| G_{\rightarrow}\mathbf{f} \|_{L_p} \| G_{\rightarrow}\mathbf{g} \|_{L_q} \leqslant c_q^{(1)} \| G_{\rightarrow}\mathbf{f} \|_{L_p} \| \mathbf{g} \|_{\mathbf{L}_q}$$

(в последнем неравенстве мы воспользовались формулой (4)).

Итак, $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \leqslant c_q^{(1)} \| G_{\rightarrow}\mathbf{f} \|_{L_p} \| \mathbf{g} \|_{\mathbf{L}_q}$. Учитывая, что множество вектор-функций $\mathbf{g}$ плотно в $\mathbf{L}_q$, получаем требуемое неравенство.

§ 3. Допустимые векторы распределений на T^∞

Введем на линейном пространстве $\mathscr{L}$ понятие сходимости. Скажем, что последовательность (φ_n) сходится к нулю в $\mathscr{L}$, если все функции φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ зависят от конечного числа фиксированных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x \in T^\infty} |D^\alpha \varphi_n(x)| = 0$, где $D^\alpha = D_{x_1}^{(\alpha_1)} D_{x_2}^{(\alpha_2)} \ldots D_{x_m}^{(\alpha_m)}$. Совокупность всех линейных функционалов на $\mathscr{L}$, непрерывных относительно этой сходимости, будем обозначать $\mathscr{L}^*$ и называть пространством распределений на T^∞. Преобразование Фурье распределения $\Lambda \in \mathscr{L}^*$ определим формулой

$$\widehat{\Lambda}(\theta) = \Lambda(l_\theta),$$

где $\theta \in Z^\infty$, $l_\theta = \exp(i\theta x)$ — характер на T^∞.

Определение 1. *Вектор* $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots)$, *где* $\Lambda_k \in \mathscr{L}^*$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *называется допустимым, если для любой функции* $f \in \mathscr{L}$

$$|\mathbf{\Lambda} f|^2 = \sum_{k=1}^\infty |\Lambda_k f|^2 \leqslant \Gamma(f, f)(0) + |Bf(0)|^2. \tag{9}$$

Заметим, что если $\mathbf{\Lambda}$ — допустимый вектор, то неравенство (9) выполняется для всех $f \in \mathscr{L} + i\mathscr{L}$.

Свяжем с каждым допустимым вектором $\mathbf{\Lambda}$ линейный оператор $\mathbf{L}$, который задается на $\mathscr{L}$ формулой

$$\mathbf{L} f = \mathbf{\Lambda} * f = (\Lambda_1 * f, \Lambda_2 * f, \ldots),$$

где $(\Lambda_k * f)(x) = \Lambda_k(f(\cdot + x))$.

Предложение 2. *Пусть* $\mathbf{\Lambda}$ — *допустимый вектор и* $\mathbf{L}f = \mathbf{\Lambda} * f$. *Тогда*

1) *компоненты оператора* $\mathbf{L}$ *действуют непрерывно из* $\mathscr{L}$ *в* $\mathscr{L}$ (в топологии $\mathscr{L}$);

2) *для любой функции* $f \in \mathscr{L}$

$$Q_t\mathbf{L}f = \mathbf{L}Q_tf; \tag{10}$$

3) $|\mathbf{L}f|^2 \leqslant \Gamma(f, f) + |Bf|^2$ *для* $f \in \mathscr{L}$;

4) *компоненты вектора* $\mathbf{L}f$ *ортогональны единице.*

Доказательство этого предложения просто, и мы его опускаем.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{\Lambda}$ — *допустимый вектор и* $\mathbf{L}$ — *соответствующий оператор. Тогда для любой функции* $f \in \mathscr{L}$ *справедливо неравенство*

$$\|\mathbf{L}f\|_{\mathbf{L}_p} \leqslant c_p \|Bf\|_{L_p} \quad (1 < p < \infty).$$

Доказательство. Продифференцировав по t обе части равенства (10), получим

$$D_tQ_t\mathbf{L}f = D_t\mathbf{L}Q_tf = \mathbf{L}D_tQ_tf = \mathbf{L}Q_tBf,$$

или, обозначив $\mathbf{r} = \mathbf{L}f$, $g = Bf$,

$$D_tQ_t\mathbf{r} = \mathbf{L}Q_tg.$$

Возведем это равенство в скалярный квадрат и применим свойство 3 предложения 2:

$$(D_tQ_t\mathbf{r})^2 = (\mathbf{L}Q_tg)^2 \leqslant \Gamma(Q_tg, Q_tg) + (BQ_tg)^2 = \Gamma(Q_tg, Q_tg) + (D_tQ_tg)^2.$$

Проинтегрируем полученное неравенство на интервале $[0, \infty[$ по мере tdt:

$$\int_0^\infty (D_tQ_t\mathbf{r})^2\, tdt \leqslant \int_0^\infty [\Gamma(Q_tg, Q_tg) + (D_tQ_tg)^2]\, tdt.$$

Согласно обозначениям § 1 и 2 справа стоит функция $(Gg)^2$, а слева — $(G_\to\mathbf{r})^2$. Итак, получаем $G_\to\mathbf{r} \leqslant Gg$, откуда $\|G_\to\mathbf{r}\|_{L_p} \leqslant \|Gg\|_{L_p}$. Неравенство (3) дает нам $\|Gg\|_{L_p} \leqslant c_p\|g\|_{L_p}$. С другой стороны, из неравенства (8) и пункта 4 предложения 2 следует, что $\|\mathbf{r}\|_{\mathbf{L}_p} \leqslant c_p\|G_\to\mathbf{r}\|_{L_p}$. Суммируя все изложенное, запишем цепочку неравенств при $1 < p < \infty$:

$$\|\mathbf{r}\|_{\mathbf{L}_p} \leqslant c_p\|G_\to\mathbf{r}\|_{L_p} \leqslant c_p\|Gg\|_{L_p} \leqslant c_p^{(1)}\|g\|_{L_p},$$

откуда $\|\mathbf{L}f\|_{\mathbf{L}_p} \leqslant c_p^{(1)}\|Bf\|_{L_p}$.

§ 4. Мультипликаторы, связанные с допустимыми векторами распределений

Определение 2. *Пусть на* Z^∞ *определена вектор-функция* $\mathbf{m}(\theta) = (m_1(\theta), m_2(\theta), \ldots)$, *причем ее модуль ограничен. Зададим линейное преобразование* $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \ldots)$, *определенное на* $\mathscr{L}$ *следующим образом:*

$$\widehat{\mathbf{T}f}(\theta) = \mathbf{m}(\theta)\hat{f}(\theta), \quad \theta \in Z^\infty. \tag{11}$$

Будем называть $\mathbf{m}$ $(L_p, \mathbf{L}_p)$-*мультипликатором, а* $\mathbf{T}$ — *мультипликаторным оператором из* L_p *в* $\mathbf{L}_p$, *если для любой функции* $f \in \mathscr{L}$ *выполняется неравенство*

$$\|\mathbf{T}f\|_{\mathbf{L}_p} \leqslant c_p\|f\|_{L_p} \quad (1 \leqslant p < \infty). \tag{12}$$

Замечание 1. Из предложения 1 и теоремы Планшереля следует, что равенство (11) корректно определяет вектор-функцию $\mathbf{T}f \in \mathbf{L}_2$ для

$f \in \mathscr{L}$, причем ее компоненты лежат в $\mathscr{L}$. Из равенства же (12) и из плотности $\mathscr{L}$ в L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ следует, что оператор $\mathbf{T}$ может быть продолжен по непрерывности до ограниченного оператора из L_p в $\mathbf{L}_p$.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots)$ — *допустимый вектор распределений и* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ — *его преобразование Фурье. Тогда вектор-функция на* $\mathbf{Z}^\infty$

$$\mathbf{m}(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\theta)}{\sqrt{\psi(\theta)}}, & \theta \neq 0, \\ 0, & \theta = 0 \end{cases} \tag{13}$$

является $(L_p, \mathbf{L}_p)$-*мультипликатором при* $1 < p < \infty$.

Доказательство. Так как $\mathbf{\Lambda}$ — допустимый вектор и $\lambda(\theta) = \mathbf{\Lambda}(l_\theta)$, то используя неравенство (9), получим

$$|\lambda(\theta)|^2 = |\mathbf{\Lambda}(l_\theta)|^2 \leqslant \Gamma(l_\theta, l_\theta)(0) + |Bl_\theta(0)|^2 = 2\psi(\theta).$$

Отсюда следует, что $\mathbf{m}$ ограничена.

Пусть $f \in \mathscr{L}$. Рассмотрим функцию $g(x)$ на T^∞, которую определим через преобразование Фурье:

$$\hat{g}(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\hat{f}(\theta)}{\sqrt{\psi(\theta)}}, & \theta \neq 0, \\ 0, & \theta = 0. \end{cases}$$

Заметив, что носитель функции $\hat{f}$ содержится при некотором n в n-мерной целочисленной решетке Z^n, проведем оценку при $\theta \neq 0$:

$$|\hat{g}(\theta)| = \left|\frac{\hat{f}(\theta)}{\sqrt{\psi(\theta)}}\right| = \left|\hat{f}(\theta)\frac{I_{Z^n}(\theta)}{\sqrt{\psi(\theta)}}\right| = |\hat{f}(\theta)|\left|\frac{I_{Z^n}(\theta)}{\sqrt{\psi(\theta)}}\right| \leqslant |\hat{f}(\theta)| \frac{1}{\inf\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k}.$$

Из этой оценки и из того, что $\hat{f} \in L_1(\mathbf{Z}^\infty)$, следует, что и $\hat{g} \in L_1(\mathbf{Z}^\infty)$. Поэтому функция g определена однозначно.

Покажем, что $g \in \mathscr{L}$. Действительно, при $k \geqslant 0$ и $\theta \neq 0$ имеем

$$|\psi^k \hat{g}| \leqslant \frac{1}{\inf\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k} |\psi^k \hat{f}|.$$

Воспользовавшись предложением 1, видим, что $g \in \mathscr{L}$.

Из всего вышеизложенного следует, что к функции g можно применить оператор $\mathbf{L}$, порождаемый вектором $\mathbf{\Lambda}$. Переходя к преобразованию Фурье, легко проверить равенство

$$\mathbf{T}f = \mathbf{L}g,$$

где $\mathbf{T}$ определяется формулой (11). Применяя теорему 4, получаем при $1 < p < \infty$

$$\|\mathbf{T}f\|_{\mathbf{L}_p} = \|\mathbf{L}\,g\|_{\mathbf{L}_p} \leqslant c_p \|Bg\|_{L_p}.$$

Однако

$$Bg(x) = \int\limits_{Z^\infty} l_\theta(x)\widehat{Bg}(\theta)\,d\theta = \int\limits_{Z^\infty \setminus \{0\}} l_\theta(x)\sqrt{\psi(\theta)}\frac{\hat{f}(\theta)}{\sqrt{\psi(\theta)}}\,d\theta =$$

$$= \int\limits_{Z^\infty \setminus \{0\}} l_\theta(x)\hat{f}(\theta)\,d\theta = \int\limits_{Z^\infty} l_\theta(x)\hat{f}(\theta)\,d\theta - \hat{f}(0) = f(x) - \langle f, 1\rangle.$$

Поэтому $\|\mathbf{T}f\|_{\vec{\mathbf{L}}_p} \leqslant c_p\|f - \langle f, 1\rangle\|_{L_p} \leqslant c_p^{(1)}\|f\|_{L_p}$. Следовательно, $\mathbf{m}$ — $(L_p, \mathbf{L}_p)$-мультипликатор $(1 < p < \infty)$.

Замечание 2. Из структуры мультипликатора $\mathbf{m}$, ассоциированного с допустимым вектором распределений Λ, вытекает, что $\langle T_k f, 1\rangle = 0$ $(k=1, 2, \ldots)$.

§ 5. Некоторые обобщения

Пусть $(A, \mathscr{A}, \mu)$ — пространство с мерой, а $L_p(A)$ и $\mathbf{L}_p(A)$ вводятся так же, как для функций (соответственно вектор-функций) на T^∞ (см. § 1 и 2). Пусть на функциях $f\in L_p(A)$ задан векторный оператор $\mathbf{T}$ по формуле

$$\mathbf{T}f = (T_1 f, T_2 f, \ldots).$$

Определим оператор $\mathbf{T}$ на вектор-функциях $\mathbf{f}\in \mathbf{L}_p(A)$ следующим образом:

$$\mathbf{T}\mathbf{f} = \begin{pmatrix} T_1 f_1 & T_2 f_1 & T_3 f_1 & \cdots \\ T_1 f_2 & T_2 f_2 & T_3 f_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Преобразовав матрицу, стоящую справа, в вектор, положим

$$\|\mathbf{T}\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}_p(A)} = \left(\int\limits_A \left(\sum_{k,j=1}^{\infty} |T_k f_j|^2\right)^{p/2} d\mu\right)^{1/p}.$$

Справедлив следующий общий факт, который является простым обобщением одной леммы Зигмунда (см. [7, с. 336]).

Предложение 3. *Если оператор* $\mathbf{T}$ *действует ограниченно из* $L_p(A)$ *в* $\mathbf{L}_p(A)$ $(1\leqslant p<\infty)$, *то этот оператор также ограниченно действует из* $\mathbf{L}_p(A)$ *в* $\mathbf{L}_p(A)$.

Следствие 1. *Если* $\mathbf{T}^{(n)}$ — *n-я тензорная степень ограниченного оператора* $\mathbf{T}: L_p(A)\to \mathbf{L}_p(A)$ $(1\leqslant p<\infty)$, *задаваемая формулой*

$$\mathbf{T}^{(n)}f = (T_{k_1}\circ T_{k_2}\circ\ldots\circ T_{k_n})_{k_1,k_2,\ldots,k_n=1}^{\infty}$$

и

$$\|\mathbf{T}^{(n)}f\|_{\mathbf{L}_p(A)} = \left(\int\limits_A \left(\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n=1}^{\infty} |T_{k_1}\circ\ldots\circ T_{k_n} f|^2\right)^{p/2} d\mu\right)^{1/p},$$

то

$$\|\mathbf{T}^{(n)}f\|_{\mathbf{L}_p(A)} \leqslant c_{p,n}\|f\|_{L_p(A)}\quad (1\leqslant p<\infty).$$

Доказательство легко получается с помощью индукции по n. Переход от n к $n+1$ совершается с помощью предложения 3.

Следствие 2. *Если оператор* $\mathbf{T}$ *задается формулами* (11) *и* (13), *то его тензорная степень* $\mathbf{T}^{(n)}$, *имеющая преобразование Фурье*

$$\widehat{\mathbf{T}^{(n)}}f(\theta) = \left(\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\lambda_{k_j}(\theta)}{[\psi(\theta)]^{n/2}}\hat f(\theta)\right)_{k_1,k_2,\ldots,k_n=1}^{\infty},$$

действует ограниченно из L_p *в* $\mathbf{L}_p$ *при любых* $p\in\,]1, \infty[$.

§ 6. Векторный оператор Рисса на бесконечномерном торе. Операторы Рисса высших порядков

Положим для $f\in\mathscr{L}$ $\Lambda_k f := -a_k D_{x_k} f(0)$ $(k=1, 2, \ldots)$, и пусть $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots)$. Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\Lambda_k f)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 (D_{x_k} f(0))^2 = \Gamma(f, f)(0),$$

то вектор Λ допустим. Вычислим преобразование Фурье распределения Λ_k:

$$\lambda_k(\theta) = \Lambda_k(l_\theta) = -ia_k\theta_k,$$

где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots) \in Z^\infty$. Мультипликатор m_k, ассоциированный с Λ_k, имеет вид

$$m_k(\theta) = \begin{cases} \dfrac{-ia_k\theta_k}{\sqrt{\psi(\theta)}}, & \theta \neq 0, \\ 0, & \theta = 0. \end{cases}$$

Оператор R_k, соответствующий мультипликатору m_k, будем называть k-м оператором Рисса на T^∞, а оператор $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \ldots)$ — векторным оператором Рисса.

На основании теоремы 5 имеем

$$\|\mathbf{R}f\|_{\mathrm{L}_p} \leqslant c_p \|f\|_{L_p}, \quad f \in L_p, \quad 1 < p < \infty.$$

Это неравенство является обобщением неравенства (1) на бесконечномерную структуру — тор T^∞. Легко видеть, что при $k > n$ сужение R_{kn} оператора R_k на n-мерный тор T^n есть нулевой оператор. Если же положить $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$, то операторы $R_{1n}, R_{2n}, \ldots, R_{nn}$ совпадут с классическими операторами Рисса на T^n (см. [8, гл. VII]).

Применяя к оператору $\mathbf{R}$ следствие 2 получим $\|\mathbf{R}^{(n)}f\|_{\mathrm{L}_p} \leqslant c_{p,n}\|f\|_{L_p}$ для всех $p \in]1, \infty[$, где

$$\widehat{\mathbf{R}^{(n)}f}(\theta) = \left(\frac{(-i)^n \prod_{j=1}^{n} a_{k_j}\theta_{k_j}}{[\psi(\theta)]^{n/2}} \hat{f}(\theta) \right)_{k_1, k_2, \ldots, k_n = 1}^{\infty}.$$

Этот факт является обобщением на бесконечномерный случай того обстоятельства, что нормы операторов Рисса высших порядков на конечномерных пространствах ограничены как функции размерности пространства (см. [1]).

В заключение авторы хотели бы выразить глубокую благодарность А. Н. Ширяеву и Н. С. Ландкофу за внимание к работе.

г. Ростов-на-Дону

Статья поступила 2 декабря 1983 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stein E. M.* Some results in harmonic analysis in R^n for $n \to \infty$.— Bull. Amer. Math. Soc., 1983, v. 9, N 1, p. 71—73.
2. *Bendikov A. D., Pavlov I. V.* Spaces H^p and BMO on the infinite dimensional torus.— В кн.: Третья международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике: Тез. докл. Вильнюс, 1981, т. III, с. 26—27.
3. *Павлов И. В.* Вероятностно-аналитический подход к исследованию пространств Харди и ВМО на бесконечномерном торе: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук.— Вильнюс, 1982.
4. *Meyer P. A.* Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood — Paley.— Lect. Notes Math., N 511, p. 125—183.
5. *Бендиков А. Д.* О гармонических функциях для одной категории марковских процессов и проективных пределов в ней.— Успехи мат. наук, 1976, т. XXXI, вып. 2 (188), с. 209—210.
6. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.— М.: Мир, 1973.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды.— М.: Мир, 1965, т. II.
8. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М.: Мир, 1974.