А. М. Гайсин, Поведение суммы ряда экспонент вблизи границы области регулярности, *Матем. заметки*, 1990, том 48, выпуск 3, 45–53

Математические заметки

том 48 выпуск 3 сентябрь 1990

ПОВЕДЕНИЕ СУММЫ РЯДА ЭКСПОНЕНТ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ РЕГУЛЯРНОСТИ

А. М. Гайсин

Введение. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — последовательность комплексных чисел, $0 < |\lambda_k| \uparrow \infty$. Через D обозначим область сходимости ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}. \tag{1}$$

В случае когда D — вся плоскость или полуплоскость, поведение суммы ряда Дирихле с вещественными показателями в горизонтальных полосах (соответственно в полуполосах) исследовалось в ряде работ (см., например, [1—5]).

В статье рассматривается ситуация, когда область сходимости ряда (1) — ограниченная выпуклая область.

Пусть D — ограниченная выпуклая область плоскости $\mathbb{C}$. Предположим, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$ такова, что имеется ряд вида (1) с показателями λ_k, который абсолютно сходится в области D, а вне $\overline{D}$ — расходится. Пусть $f(z)$ — сумма этого ряда. Класс всех таких функций $f(z)$ обозначим через $H(D, \Lambda)$. Известно, что при условиях

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{|\lambda_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} \ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_k)}\right| = 0, \quad L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right)$$

область регулярности функции $f(z)$ совпадает с D [6, с. 106].

Пусть $a, b \in \partial D$, $0 \in D$, $[\widetilde{a, b}]$ — замкнутая ориентированная дуга границы ∂D, т. е. переход от a к b совершается в положительном направлении. Через $S = S_{a,b}$ обозначим сектор области D с вершиной в точке 0, опирающийся на дугу $[\widetilde{a, b}]$. Считаем, что сектору S принадлежат его стороны $[0, a)$ и $[0, b)$, но $[\widetilde{a, b}] \cap S = \varnothing$. В дальнейшем запись $S_1 \succ S_2$ для секторов $S_1 = S_{ab}$ и $S_2 = S_{c,d}$ будет означать то, что $(\widetilde{a, b}) \supset [\widetilde{c, d}]$ (здесь $(\widetilde{a, b})$ — открытая дуга).

В статье речь пойдет о росте функции $f(z) \in H(D, \Lambda)$ в секторе S при $z \to \partial D$. В качестве характеристики роста функции $f(z)$ берется R-порядок, наиболее часто используемая величина в подобных исследованиях.

Пусть $f(z) \in H(D)$, $H(D)$ — пространство аналитических в области D функций. Величины

$$\rho_D = \overline{\lim_{z \to \partial D}} d(z) \ln^+ \ln^+ |f(z)|, \quad \rho_s = \overline{\lim_{z \in S,\ z \to \partial D}} d(z) \ln^+ \ln^+ |f(z)|,$$

где $d(z) = \inf_{\xi \in \partial D} |z - \xi|$, называются R-порядками функции $f(z)$ в области D и в секторе S соответственно. В дальнейшем будем называть их просто порядками.

Понятие обычного порядка для случая ограниченной выпуклой области введено в работе [7].

§ 1. Основные результаты. Сформулируем основные результаты и следствия из них.

Пусть D — ограниченная выпуклая область с гладкой границей ∂D, $0 \in D$, $K(\varphi)$ — опорная функция $\bar{D}$. На границе области D определено однозначное отображение $\varphi = \pi(z)$, действующее по правилу: если $z \in \partial D$, то φ такое, что $\operatorname{Re}(ze^{i\varphi}) = h(\varphi)$, где $h(\varphi) = K(-\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$.

Пусть $S_\tau = S_{a,b}$ — сектор, такой, что если

$$E_\tau = \{\lambda = re^{i\varphi} : |\varphi - \varphi_0| \leqslant \tau,\ 0 < \tau \leqslant \pi\},$$

то дуга $\overset{\frown}{[a, b]}$ является полным прообразом отрезка $\{\varphi : |\varphi - \varphi_0| \leqslant \tau\}$ при отображении $\varphi = \pi(z)$.

Если $f(z) \in H(D, \Lambda)$, то функция $f(z)$ в области D представляется рядом (1). Положим

$$f_\tau(z) = \sum_{\lambda_k \in E_\tau} a_k e^{\lambda_k z}.$$

В этих обозначениях имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть D — ограниченная выпуклая область с гладкой границей, $0 \in D$.*

Если для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}$ выполняется условие

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k \ln |\lambda_k|}{|\lambda_k|} = 0, \tag{2}$$

то порядок ρ_s функции $f(z) \in H(D, \Lambda)$ в любом секторе S, $S \succ S_\tau$ и порядок ρ_τ функции $f_\tau(z)$ в том же секторе связаны соотношением

$$\rho_\tau \leqslant \gamma_\tau \leqslant \rho_s + q_\tau, \tag{3}$$

где

$$\gamma_\tau = \overline{\lim_{\substack{\lambda_k \in E_\tau, \\ k \to \infty}}} \frac{\ln |\lambda_k|}{|\lambda_k|} \ln^+ [|a_k| e^{h(\varphi_k)|\lambda_k|}],$$

$$q_\tau = \overline{\lim_{\substack{\lambda_k \in E_\tau, \\ k \to \infty}}} \frac{\ln |\lambda_k|}{|\lambda_k|} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right|, \qquad \varphi_k = \arg \lambda_k.$$

Границы в соотношении (3) неулучшаемы. Точность левой границы устанавливается без особых ограничений на последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$. Для того чтобы сформулировать теорему о точности правой границы, введем следующее

Определение. Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$ принадлежит классу Г, если выполняется условие (2) и:

1) имеются окружности $|z| = d_n$, $0 < d_n \uparrow \infty$, $[d_n - d_{n-1}] \ln d_n / d_n \to 0$, $n/d_n \to 0$ при $n \to \infty$, причем на контурах Γ_{nk} ($k = 1, 2, \ldots, P_n$), составленных дугами окружностей $|z| = d_{n-1}$, $|z| = d_n$ и отрезками лучей $\arg z = \psi_{nk}^{(i)}$ ($i = 1, 2$; $0 \leqslant \psi_{nk}^{(1)} \leqslant \psi_{nk}^{(2)} \leqslant 2\pi$), соединяющими эти дуги, справедлива оценка

$$\ln\left|\frac{1}{L(\xi)}\right| < \varepsilon\frac{d_n}{\ln d_n}, \quad n > n_0(\varepsilon) \quad \forall\varepsilon > 0;$$

2) угол β_{nk}, под которым виден контур Γ_{nk} из начала координат, удовлетворяет условию

$$\beta_{nk} = \psi_{nk}^{(2)} - \psi_{nk}^{(1)} = o(\ln^{-1} d_n), \qquad n \to \infty;$$

3) множество $\{\varphi_k: \varphi_k = \arg \lambda_k\}$ всюду плотно на отрезке $[0, 2\pi]$;

4) для любого угла $E_\tau = \{\lambda = re^{i\varphi}: |\varphi - \varphi_0| \leqslant \tau, 0 < \tau \leqslant \pi\}$ существует угол $E_\sigma = \{\lambda = re^{i\varphi}: |\varphi - \varphi_0| \leqslant \sigma, 0 < \sigma < \tau\}$ такой, что $q_\sigma = q_\tau$;

5) все точки последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}$ сосредоточены в областях D_{nk} (область D_{nk} ограничена контуром Γ_{nk}, $D_{nk} \cap D_{ns} = \varnothing$, $k \neq s$ и каждая область D_{nk} содержит хотя бы одну точку λ_k.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для любой последовательности* $\Lambda = \{\lambda_k\}$ *из класса* Г *существует функция* $f(z) \in H(D, \Lambda)$, *для которой выполняется равенство*

$$\gamma_\tau = \rho_s + q_\tau.$$

Из теорем 1 и 2 вытекают важные следствия. Сформулируем их в виде теорем.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для порядка* ρ_D *любой функции* $f(z) \in H(D, \Lambda)$ *справедливо соотношение* $\rho_D \leqslant \gamma \leqslant \rho_D + q$, *где* $\gamma = \gamma_\pi$, $q = q_\pi$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $\Lambda = \{\lambda_k\} \in \Gamma$. *Для того, чтобы для порядка* ρ_D *любой функции* $f(z) \in H(D, \Lambda)$ *была верна формула*

$$\rho_D = \overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln|\lambda_k|}{|\lambda_k|}\ln^+[|a_k|\,e^{h(\varphi_k)|\lambda_k|}],$$

необходимо и достаточно, чтобы $q = 0$.

Построен пример последовательности $\Lambda = \{\lambda_k\}$ из класса Г.

§ 2. Оценка для коэффициентов. Имеет место следующая формула для коэффициентов ряда (1) [6, с. 103]:

$$a_k = e^{-z\lambda_k}\frac{1}{2\pi i}\int_C \psi_k(t) f(t+z)\,dt \qquad (k \geqslant 1), \tag{4}$$

где C — замкнутый контур, охватывающий сопряженную диаграмму $\overline{G}$ функции $L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \lambda^2/\lambda_k^2)$ и выбранный так, чтобы при $t \in C$ переменная $(t + z)$ находилась в области регулярности функции $f(z)$.

Поскольку в нашем случае $\overline{G} = \{0\}$, то в качестве контура C можно взять окружность $|t| = \delta$ (δ — мало). В формуле (4)

$$\psi_k(t) = \frac{1}{L'(\lambda_k)} \int_0^{\infty e^{i\psi_0}} \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k} e^{-\lambda t}\,dt, \quad \operatorname{Re}(te^{i\psi_0}) > \delta.$$

Оценим коэффициенты a_k. Имеем

$$\left|\frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_k}\right| \leqslant M(r+1), \quad M(r) = \max_{|\lambda|=r} |L(\lambda)|, \quad k \geqslant 1.$$

Тогда на контуре C получим

$$|\psi_k(t)| \leqslant \left|\frac{1}{L'(\lambda_k)}\right| \int_0^{\infty} M(r+1)\,e^{-r\delta}\,dr = \left|\frac{1}{L'(\lambda_k)}\right| H(\delta), \quad k \geqslant 1. \tag{5}$$

Ясно, что $H(\delta) \to \infty$ при $\delta \to 0+$. Из (4) и (5) получаем

$$|a_k| \leqslant \left|\frac{1}{L'(\lambda_k)}\right| H(\delta)\,\delta\,|e^{-\lambda_k z}|\max_{|t|=\delta}|f(t+z)|, \quad z \in D, \quad k \geqslant 1. \tag{6}$$

Уточним эту оценку. Для этого нам понадобятся оценки для $H(\delta)$ и $|e^{-\lambda_k z}|$.

ЛЕММА 1. *Пусть выполняется условие* (2). *Тогда* $\lim\limits_{\delta \to 0+} \delta \ln \ln H(\delta) = 0$.

ЛЕММА 2. *Пусть D — ограниченная выпуклая область с гладкой границей ∂D, $z_0 \in \partial D$, N_0 — нормаль в точке z_0. Тогда для $z \in D \cap N_0$ при $z \to z_0$ справедливо равенство*

$$|z - z_0| = d(z)(1 + o(1)).$$

Леммы 1, 2 проверяются непосредственно.

Вернемся к оценке (6). Пусть $\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\varphi_k}$, а z_k такая точка границы ∂D, что $\operatorname{Re}(z_k e^{i\varphi_k}) = h(\varphi_k)$. Пусть N_k — нормаль в точке z_k. Если $z \in D \cap N_k$ и $z \to z_k$, то по лемме 2 получим, что

$$-\operatorname{Re}(\lambda_k z) \leqslant -h(\varphi_k)|\lambda_k| + |\lambda_k|\, d(z)(1 + o(1)).$$

Отсюда, применяя лемму 1, из оценки (6) окончательно получаем необходимую в дальнейшем оценку

$$|a_k| \leqslant \left|\frac{1}{L'(\lambda_k)}\right| e^{-h(\varphi_k)|\lambda_k|} \max_{|t|=\delta}|f(t+z)| \exp[e^{\varepsilon\delta^{-1}} + |\lambda_k|(1 + o(1))\,d(z)], \quad \delta < \delta_0(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad d < d_0, \quad k \geqslant 1. \tag{7}$$

§ 3. Доказательство теоремы 1. Так как функция $d(z)$ удовлетворяет условию Липшица, т. е. для всех $z', z'' \in D$

$$|d(z') - d(z'')| \leqslant |z' - z''|,$$

то $d(t + z) \geqslant d(z) - \delta$. Положим $\delta = \varepsilon_1 \cdot d(z)$, $\varepsilon_1 > 0$ — любое, но фиксированное. Пусть S, S_1, $S_\tau = S_{a,b}$ — сектора с вершинами в начале координат, $S \succ S_1 \succ S_\tau$.

Если функция $f(z) \in H(D, \Lambda)$ имеет в секторе S конечный порядок ρ_s, то для $z \in S_1$ имеем

$$\max_{|t|=\delta} |f(t+z)| \leqslant \exp\exp[(\rho_s + \varepsilon_2) d^{-1}(z)],$$

$$d < d_1(\varepsilon_2) \quad \forall \varepsilon_2 > 0.$$

Для $\lambda_k = |\lambda_k| e^{i\varphi_k} \in E_\tau$ существует точка $z_k \in \widetilde{[a, b]}$ такая, что $\operatorname{Re}(z_k e^{i\varphi_k}) = h(\varphi_k)$. Пусть $z \in N_k \cap D$ (N_k — нормаль в точке $z_k \in \widetilde{[a, b]}$). Тогда при $z \to \partial D$ имеем $z \in S_1$. Учитывая это и полагая $\varepsilon = \varepsilon_1^2$, из (7) получим

$$|a_k| e^{h(\varphi_k)|\lambda_k|} \leqslant \left|\frac{1}{L'(\lambda_k)}\right| \exp[e^{(\rho_s+\varepsilon_3)d^{-1}(z)} +$$

$$+ |\lambda_k|(1 + o(1)) d(z)], \quad \lambda_k \in E_\tau, \quad d < d_2(\varepsilon_3) \quad \forall \varepsilon_3 > 0. \qquad (8)$$

Минимум под экспонентой из правой части неравенства (9) точно не вычисляется. Полагая

$$d^{-1}(z) = [\alpha_k/(\rho_s + \varepsilon_3)] \ln|\lambda_k|, \quad \alpha_k = 1 - 2\frac{\ln\ln|\lambda_k|}{\ln|\lambda_k|}, \quad k \geqslant k_0,$$

из (9) получим

$$\ln[|a_k| e^{h(\varphi_k)|\lambda_k|}] \leqslant \ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_k)}\right| +$$

$$+ \frac{|\lambda_k|}{\ln|\lambda_k|}\left[(\rho_s + 2\varepsilon_3)\alpha_k^{-1} + \frac{1}{\ln|\lambda_k|}\right],$$

$$\lambda_k \in E_\tau, \quad k > k_1(\varepsilon_3) \quad \forall \varepsilon_3 > 0.$$

Отсюда $\gamma_\tau \leqslant \rho_s + q_\tau$. Убедимся, что $\rho_\tau \leqslant \gamma_\tau$. Для этого нам понадобится лемма из [4, с. 415].

ЛЕММА 3. *При* $\sigma > 0$

$$\max_{t \geqslant 2} \varphi(t) \leqslant \exp[a\sigma^{-1}],$$

где $\varphi(t) = at/\ln t - t\sigma$, $a > 0$.

Из определения γ_τ имеем $\forall \varepsilon > 0$

$$|a_k| \leqslant \exp\left[-h(\varphi_k)|\lambda_k| + (\gamma_\tau + \varepsilon)\frac{|\lambda_k|}{\ln|\lambda_k|}\right], \quad \lambda_k \in E_\tau, \quad k > k_0(\varepsilon),$$

Так как для $z \in D$

$$\operatorname{Re}(\lambda_k z) \leqslant [h(\varphi_k) - d(z)]|\lambda_k|,$$

то

$$|a_k e^{\lambda_k z}| \leqslant A(\varepsilon)\exp\left[(\gamma_\tau + \varepsilon)\frac{|\lambda_k|}{\ln|\lambda_k|} - d(z)|\lambda_k|\right], \quad k \geqslant 1.$$

Тогда, в частности, для $z \in S$ имеем

$$|f_\tau(z)| \leqslant \sum_{\lambda_k \in E_\tau} |a_k e^{\lambda_k z}| \leqslant A(\varepsilon)\exp\{\max_{t \geqslant 2}[(\gamma_\tau + 2\varepsilon)t/\ln t -$$

$$- t\,d(z)]\} \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-\varepsilon|\lambda_k|/\ln|\lambda_k|].$$

Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}$ имеет нулевую плотность, поэтому последний ряд сходится. Используя лемму 3, окончательно получим, что для $z \in S$

$$|f_\tau(z)| \leqslant \exp\exp[(\gamma_\tau + 3\varepsilon)\, d^{-1}(z)], \quad d < d_0(\varepsilon) \ \forall \varepsilon > 0.$$

Это означает, что $\rho_\tau \leqslant \gamma_\tau$. Теорема 1 доказана.

§ 4. **Неулучшаемость оценок в теореме 1.** Установим сначала точность левой границы в (3). Для этого дополнительно предположим, что множество $\{\varphi_k \colon \varphi_k = \arg \lambda_k\}$ всюду плотно на отрезке $[0, 2\pi]$. Рассмотрим ряд

$$f(z) = \sum\nolimits_{j=1}^{\infty} a_{k_j} e^{\lambda_{k_j} z} + \sum\nolimits_{k \neq k_j} a_k e^{\lambda_k z} = f_1(z) + f_2(z),$$

где $\{\lambda_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset E_\tau$, $\quad |\lambda_{k_{j+1}}| - |\lambda_{k_j}| > \ln |\lambda_{k_j}| \quad (j \geqslant 1)$,

$$a_k = \begin{cases} \exp[-h(\varphi_{k_j})\,|\lambda_{k_j}| + \mu\,|\lambda_{k_j}|/\ln|\lambda_{k_j}|], \ \mu > 0, & k = k_j, \\ \exp[-h(\varphi_k)\,|\lambda_k|], & k \neq k_j. \end{cases}$$

Этот ряд абсолютно сходится в области D, а поскольку множество $\{\varphi_k\}$ всюду плотно на отрезке $[0, 2\pi]$, то вне D ряд расходится.

Порядок функции $f_2(z)$ в области D равен нулю. Поэтому порядок ρ_1 функции $f_1(z)$ в области D равен порядкам функций $f(z)$ и $f_\tau(z)$ в секторе S: $\rho_1 = \rho_\tau = \rho_s$. Но

$$q_1 = \lim_{j \to \infty} \frac{\ln|\lambda_{k_j}|}{|\lambda_{k_j}|} \ln \left| \frac{1}{L_1'(\lambda_{k_j})} \right| = 0, \quad L_1(\lambda) = \prod\nolimits_{j=1}^{\infty} (1 - \lambda^2 / \lambda_{k_j}^2),$$

следовательно, применяя теорему 1 к функции $f_1(z)$, получаем, что $\rho_1 = \gamma_\tau$, т. е. $\rho_\tau = \gamma_\tau$. Все доказано.

Доказательство теоремы 2. Существует угол

$$E_\sigma = \{\lambda = re^{i\varphi} \colon |\varphi - \varphi_0| \leqslant \sigma, \ 0 < \sigma < \tau\}$$

такой, что $q_\sigma = q_\tau$. Следовательно, имеется последовательность контуров $\{\Gamma_{sk}\}$ $(k = 1, 2, \ldots, p_s)$, целиком содержащихся в E_τ и

$$\varlimsup_{\lambda_k \in A,\, k \to \infty} \frac{\ln|\lambda_k|}{|\lambda_k|} \ln \left| \frac{1}{L'(\lambda_k)} \right| = q_\tau,$$

где $A = U_{s,k} D_{s,k}$, D_{sk} — область, ограниченная контуром Γ_{sk}. Напомним, что контур Γ_{sk} содержится в кольце $B_s = \{\lambda \colon d_{s-1} \leqslant |\lambda| \leqslant d_s\}$. Из последовательности контуров $\{\Gamma_{sk}\}$ выберем по одному контуру из соответствующего кольца. Получим последовательность $\{\Gamma_{s_n k_m}\}_{n, m=1}^{\infty}$, обозначим ее для удобства через $\{\Gamma_{s_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть D_{s_n} — область, ограниченная контуром Γ_{s_n}. Имеем

$$D_{s_n} \subset E_\tau \cap B_{s_n}, \qquad d_{s_n - 1} / d_{s_n} \to 1, \ s_n / d_{s_n} \to 0, \ n \to \infty.$$

Для показателей $\lambda_{n_j} \in D_{s_n}$ $(j = \overline{1,\ m_s})$ положим

$$a_{n_j} = \frac{\alpha_{n_j}}{L'(\lambda_{n_j})}, \quad \alpha_{n_j} = c_n = \exp[-h(\psi_n) d_{s_n} + + (p - q_\tau) d_{s_n}/\ln d_{s_n}], \quad p > q_\tau.$$

Величина ψ_n такая, что луч $\arg\lambda = \psi_n$ пересекает область D_{s_n}. Для $\lambda_k \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{s_n}$ считаем, что

$$a_k = \exp[-h(\varphi_k) |\lambda_k|], \quad \lambda_k = |\lambda_k| e^{i\varphi_k}.$$

Рассмотрим ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k z}. \tag{9}$$

Для $\lambda_{n_j} = |\lambda_{n_j}| e^{i\varphi_{n_j}} \in D_{s_n}$ $(j = \overline{1,\ m_s})$ имеем

$$|h(\varphi_{n_j}) - h(\psi_n)| = |h'(\xi)| |\varphi_{n_j} - \psi_n| \leqslant H_{\beta_{s_n}} = = o(\ln^{-1} d_{s_n}), \tag{10}$$

где β_{s_n} — угол, под которым виден контур Γ_{s_n} из начала координат. Далее множество $\{\varphi_k\}$ всюду плотно на отрезке $[0,\ 2\pi]$. С учетом этого и оценки (10) проверяется, что ряд (11) в области D абсолютно сходится, а вне $\overline{D}$ — расходится. Итак, D — область сходимости для ряда (9).

Оценим порядок ρ_s функции $f(z)$ в секторе S. Пусть $z \in S$. Сумма членов ряда для $\lambda_{n_j} \in D_{s_n}$ равна

$$A_{s_n} = \sum_{j=1}^{m_s} a_{n_j} e^{\lambda_{n_j} z} = c_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{s_n}} \frac{e^{\xi z}}{L(\xi)} d\xi, \quad \xi = |\xi| e^{i\varphi}.$$

Отсюда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon)$: $\forall n \geqslant n_0$

$$|A_{s_n}| \leqslant c_n \exp(\varepsilon d_{s_n}/\ln d_{s_n}) \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{s_n}} \exp[|\xi|(h(\varphi) - d(z))] |d\xi|.$$

Тогда, используя оценку (10), получим, что $\forall \varepsilon > 0$

$$|A_{s_n}| \leqslant \exp[(p - q_\tau + 2\varepsilon) d_{s_n} / \ln d_{s_n} - d_{s_n - 1} d(z)], \quad n > n_1(\varepsilon). \tag{11}$$

Пусть $\lambda_k \in B_{s_n} \setminus D_{s_n}$. Тогда

$$|a_k e^{\lambda_k z}| \leqslant \exp[-d_{s_n - 1} d(z)], \quad s_n \geqslant 2. \tag{12}$$

Учитывая оценки (11)—(12) для $z \in S$ получаем, что

$$|f(z)| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\lambda_k \in B_n} |a_k e^{\lambda_k z}| \leqslant A(\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-\varepsilon d_n/\ln d_n] \cdot \cdot \exp\{\max_{t \geqslant 2} [(p - q_\tau + 3\varepsilon) t/\ln t - t d(z)]\}.$$

У нас $n/d_n \to 0$ при $n \to \infty$. Так что последний ряд сходится. Применяя лемму 3, отсюда окончательно получаем, что если $z \in S$, то

$$|f(z)| \leqslant \exp\exp[(p - q_\tau + 4\varepsilon)\, d^{-1}(z)], \quad d < d_0(\varepsilon) \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Следовательно, $\rho_s \leqslant p - q_\tau$. Легко проверяется, что $\gamma_\tau = p$. Но всегда $\rho_s \geqslant \gamma_\tau - q_\tau$. Следовательно, $\gamma_\tau = \rho_s + q_\tau$. Все доказано.

§ 5. Пример последовательности из класса Г. Положим

$$\lambda_{nk} = [c_n + d_{nk}]\, e^{i\theta_{nk}},$$

где

$$\theta_{nk} = 2\pi k/n \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1;\ n = 1, 2, \ldots),$$

$$c_n = [p_{n-1} + p_n]/2, \qquad p_n = n^2 \ln^2 n, \quad d_{nk} = k \ln P_n.$$

Функция

$$M(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda^2/\lambda_{nk}^2)$$

является целой, нули которой образуют регулярное множество при уточненном порядке $\rho(r) = 1 - (\ln\ln r)/\ln r$. Поскольку $|\lambda_k|^{1-\rho(|\lambda_k|)} = \ln|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$, то вне кружков $U_{nk} = \{\lambda\colon |\lambda - \lambda_{nk}| < 1\}$ имеет место оценка [1, с. 48].

$$\ln\left|\frac{1}{M(\xi)}\right| < \varepsilon \frac{|\xi|}{\ln|\xi|}, \qquad |\xi| > r_0(\varepsilon) \quad \forall\varepsilon > 0. \tag{13}$$

Введем в рассмотрение контур Γ_{nk}, состоящий из дуг окружностей $|\lambda| = p_{n-1}$, $|\lambda| = p_n$ и соединяющих их отрезков лучей $\arg\lambda = [\theta_{nk} + \theta_{nk-1}]/2$, $\arg\lambda = [\theta_{nk} + \theta_{nk+1}]/2$. Контур Γ_{nk} виден из начала координат под углом $\beta_{nk} = o(\ln^{-1} p_n)$, $n \to \infty$.

Видно, что $d(\lambda_{nk}, \Gamma_{nk}) \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, оценка (15) имеет место на контурах Γ_{nk} при $n > n_0$. Положим

$$M_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} [1 - \lambda^2/(\lambda_{nk} + \varepsilon_{nk}^2)],$$

$$\varepsilon_{nk} = \exp[-\alpha_{nk} p_n / \ln p_n],$$

где $\alpha_{nk} = p$, если $k = 2s - 1$, и $\alpha_{nk} = 2p$, если $k = 2s$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$; $s = 1, 2, \ldots$).

Точно так же, как и в работе [4, с. 423] убеждаемся в том, что вне кружков постоянного радиуса с центрами в точках λ_{nk} выполняется оценка

$$0 < A \leqslant |M_1(\lambda)|/|M(\lambda)| \leqslant B < \infty. \tag{14}$$

Рассмотрим функцию

$$F(\lambda) = [\lambda - \lambda_{nk}][\lambda - (\lambda_{nk} + \varepsilon_{nk})]/L(\lambda), \quad L(\lambda) = M_1(\lambda) \cdot M(\lambda).$$

Используя (13), (14), отсюда легко получаем, что $\forall\tau$ $(0 < \tau \leqslant \pi)$ $q_\tau = 2p$.

Последовательность нулей функции $L(\lambda)$ пронумерованная в порядке неубывания модулей, удовлетворяет всем требованиям.

В заключение автор благодарит В. В. Напалкова за полезные советы.

Башкирский государственный
университет

Поступило
09.02.88
Переработанный вариант
08.01.90

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
[2] Леонтьев А. Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.
[3] Шеремета М. Н. Рост в полосе целых функций, представленных рядами Дирихле // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 3. С. 674—687.
[4] Гайсин А. М. Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе // Мат. сб. 1982. Т. 117 (159), № 3. С. 412—424.
[5] Гайсин А. М. Поведение суммы ряда Дирихле в полуполосах // Математические заметки. 1987. Т. 42, вып. 5. С. 660—669.
[6] Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983.
[7] Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент для функций с определенным ростом вблизи границы // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1980. Т. 44, № 6. С. 1308—1328.