V. L. Popov, On Conjugacy of Stabilizers of Reductive Group Actions, *Mat. Zametki*, 2019, Volume 105, Issue 4, 589–591

DOI: 10.4213/mzm12368

Математические заметки

Том 105 выпуск 4 апрель 2019

УДК 512.745.2

О сопряжённости стабилизаторов действий редуктивных групп

В. Л. Попов

Доказано, что основной результат работы [1] является частным случаем более общего утверждения, которое можно вывести с помощью короткого рассуждения из классических теорем Ричардсона и Луны.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: редуктивная алгебраическая группа, действие, стабилизатор, сопряженность.

1. В недавнем препринте [1] получен, используя редукцию с помощью теоремы Кемпфа–Несс к теореме о главном орбитном типе для компактных групп Ли, следующий основной результат:

"Пусть G – редуктивная аффинная алгебраическая группа и пусть (ρ, V) – регулярное представление G. Пусть X – такое неприводимое $\mathbb{C}^\times G$-инвариантное замкнутое по Зарисскому подмножество, что G имеет замкнутую орбиту максимальной размерности среди размерностей всех орбит (это эквивалентно тому, что орбиты общего положения замкнуты). Тогда существует подмножество W в X, открытое и плотное в метрической топологии, с дополнением меры 0 и такое, что если $x, y \in W$, то $(\mathbb{C}^\times G)_x$ сопряжена $(\mathbb{C}^\times G)_y$. Более того, если Gx – замкнутая орбита максимальной размерности и если x – гладкая точка X, то существует такая $y \in W$, что $(\mathbb{C}^\times G)_x$ содержит сопряженную к $(\mathbb{C}^\times G)_y$."

Ниже показано, что из классических теорем Ричардсона и Луны можно вывести с помощью короткого рассуждения более общее утверждение.

2. Мы фиксируем алгебраически замкнутое поле k характеристики 0 и свободно используем стандартные обозначения из [2], [3].

Пусть G – такая редуктивная алгебраическая группа, что $G = CR$, где C – диагонализируемая алгебраическая подгруппа центра G, а R – редуктивная алгебраическая подгруппа G. Мы обозначаем через $\mathcal{X}(C)$ группу характеров C и, для заданного алгебраического C-модуля M и характера $\alpha \in \mathcal{X}(C)$, через M_α весовое подпространство веса α в M. Поскольку C диагонализируема, M является прямой суммой пространств M_α; см. [2; III.8.17].

Пусть X – неприводимое аффинное алгебраическое многообразие, снабженное регулярным действием G.

Теорема 1. *Используя предыдущие обозначения, допустим, что существует замкнутая R-орбита размерности максимальной среди размерностей всех R-орбит в X. Тогда выполнено следующее*:

(a) *в X существует такое плотное открытое (в топологии Зарисского) подмножество U, что если $x, y \in U$, то G_x сопряжена G_y*;

(b) *если R-орбита $R(z)$ точки $z \in X$ замкнута, то существует такая точка $y \in U$, что G_z содержит сопряженную к G_y*.

Доказательство. (a) Пусть S – множество особых точек многообразия X. Мы можем (и будем) предполагать, что $S \neq \varnothing$, поскольку в противном случае подлежащее доказательству утверждение немедленно следует из теоремы Ричардсона [4; предложение 5.3] (см. также [5; следствие 8]). Поскольку S является замкнутым G-инвариантным подмножеством в X, мы имеем

$$k[S] = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{X}(C)} k[S]_\alpha.$$

Предположение об R-орбите влечет существование в X плотного открытого подмножества, R-орбиты точек которого замкнуты и имеют максимальную размерность [6; теорема 4]. Следовательно, существует такая замкнутая R-орбита $\mathcal{O}$, что $S \cap \mathcal{O} = \varnothing$. Отсюда вытекает существование такой функции $f \in k[X]^R$, что $f|_S = 0$, $f|_{\mathcal{O}} = 1$ (см, например, [2; лемма 8.19 (ii)] или [3; теорема 4.7]). Поскольку C централизует R, алгебра $k[X]^R$ является C-инвариантной, так что мы имеем весовое разложение

$$k[X]^R = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{X}(C)} (k[X]^R)_\alpha.$$

Пусть $\pi_\alpha\colon k[X]^R \to (k[X]^R)_\alpha$ является естественной проекцией. Поскольку $f|_{\mathcal{O}} \neq 0$, существует такой характер $\alpha \in \mathcal{X}(C)$, что для $f_\alpha := \pi_\alpha(f)$ мы имеем $f_\alpha|_{\mathcal{O}} \neq 0$. Из $G = CR$ следует, что функция f_α является полуинвариантом группы G. В силу G-инвариантности S, гомоморфизм $\varrho\colon k[X] \to k[S]$, $h \mapsto h|_S$, является G-эквивариантным, поэтому $\varrho(k[X]_\alpha) \subseteq k[S]_\alpha$. Ввиду $\varrho(f) = 0$, отсюда следует, что $\varrho(f_\alpha) = 0$. Таким образом, f_α является ненулевым полуинвариантом группы G, обращающимся в нуль на S. Значит, $X_{f_\alpha} := \{x \in X \mid f_\alpha(x) \neq 0\}$ является G-инвариантным плотным открытым подмножеством в X, которое является гладким аффинным многообразием. Теперь по теореме Ричардсона [4; предложение 5.3] (см. также [5; следствие 8]), в X_{f_α} существует такое плотное открытое подмножество U, что если $x, y \in U$, то G_x сопряжена G_y. Это доказывает (a).

(b) Пусть $\overline{G(z)}$ – замыкание G-орбиты точки z в X. Тогда $B := \overline{G(z)} \setminus G(z)$ является замкнутым G-инвариантным подмножеством в X. Если $B = \varnothing$, то существование y немедленно следует из теоремы Луны о слайсе, см. [5; замечание 4° на с. 98] (ср. [3; теорема 6.3]). Рассмотрим реперь случай $B \neq \varnothing$. Поскольку $B \cap R(z) = \varnothing$, теми же рассуждениями, что и выше в доказательстве (a), устанавливается существование такого G-полуинварианта $f \in k[X]^R$, что $f|_B = 0$, $f|_{R(z)} = 1$. Из последнего равенства следует, что f не обращается в нуль нигде на $G(z)$. Поэтому X_f является G-инвариантным плотным открытым подмножеством в X, содержащим $G(z)$, и $G(z)$ замкнута в X_f. Теперь, ввиду аффинности X_f, существование y вытекает из теоремы Луны о слайсе, как и выше. Это доказывает (b).

Замечание 1. В [1; § 6] приведен пример линейного действия полупростой группы, показывающий, что из существования точки с тривиальным стабилизатором не вытекает тривиальность стабилизаторов точек общего положения. Следует отметить, что этот феномен не является новым, аналогичные примеры известны давно (возможно, самый ранний принадлежит Ричардсону, см. [5; замечание 4° на с. 98]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] N. R. Wallach, *Principal Orbit Type Theorems for Reductive Algebraic Group Actions and the Kempf–Ness Theorem*, 2018, arXiv: 1811.07195v1.

[2] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Springer, New York, 1991.

[3] V. L. Popov, E. B. Vinberg, "Invariant theory", *Algebraic Geometry IV*, Encyclopaedia of Math. Sci., **55**, Springer-Verlag, Berlin, 1994, 123–278.

[4] R. W. Richardson, "Principal orbit types for algebraic transformation spaces in characteristic zero", *Invent. Math.*, **16** (1972), 6–14.

[5] D. Luna, "Slices étales", *Bull. Soc. Math. France*, **33** (1973), 81–105.

[6] В. Л. Попов, "Критерий стабильности действия полупростой группы на факториальном многообразии", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:3 (1970), 523–531.

В. Л. Попов
Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва;
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики", г. Москва
E-mail: popovvl@mi-ras.ru

Поступило
04.03.2019
Принято к публикации
04.03.2019