В заключение приведем одно тривиальное, но важное в прикладном отношении следствие доказанной теоремы.

Следствие. *Если функция $f(x, t)$ имеет кусочно по $t$ непрерывную в $\bar{Q}$ частную производную $f_t(x, t)$, то смешанная задача* (1)—(3) *разрешима.*


## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чернятин В. А. О необходимых и достаточных условиях существования классического решения смешанной задачи для одномерного волнового уравнения//Докл. АН СССР. 1986. **287**, № 5. 1080—1083.
2. Чернятин В. А. К проблеме существования решений смешанной задачи для одномерного волнового уравнения//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1987. № 6. 9—21.
3. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа//Успехи матем. наук. 1962. **17**, вып. 3. 3—146.
4. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970.
5. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1966.
7. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М., 1970.
8. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., 1976.
9. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М., 1961.
10. Будак Б. М., Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды. М., 1967.



Поступила в редакцию
03.03.89



ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1990. № 6

УДК 513.83



**Ю. В. Лубенец**


# О ТЕОРЕМЕ ГУРЕВИЧА ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Теорема о понижении обычной размерности при отображениях хорошо известна в разных предположениях [1—3]. Здесь доказывается

Теорема. *Имеет место неравенство* $\mathrm{Fd}\,X \leqslant \dim(fX) + \mathrm{Fd}\,f$, *где* $\mathrm{Fd}\,X$ — *фундаментальная размерность компакта* $X$ [4], *а* $\mathrm{Fd}\,f = \sup\limits_y \{\mathrm{Fd}(f^{-1}y)\}$.

Рассматриваются только непрерывные отображения метризуемых компактов. Заменить $\dim(fX)$ на $\mathrm{Fd}(fX)$ здесь нельзя, как видно на примере проекции окружности на ее диаметр.

Лемма. *Для всякого отображения $f: Z \to L$ компакта в полиэдр и для всякого его подкомпакта $X$, $\mathrm{Fd}\,X \leqslant k$, найдется такая окрестность $U$ множества $X$, что $f|_U$ гомотопно некоторому отображению в $k$-мерный остов $L^k$ полиэдра $L$.*

Это утверждение легко следует из равенства размерности Fd и деформационной размерности в смысле Дыдака [5] и того, что остов $L^k$ является деформационным ретрактом некоторой своей окрестности.

Доказательство теоремы. В силу теоремы Новака [6] можно считать компакт $X$ связным. При $\dim(fX)=0$ теорема очевидна. Предположим, что она верна для всех компактов из $Y=fX$ размерности $<n=\dim Y$. Пусть $m=\mathrm{Fd}\,f$. Вложим $X$ в гильбертов куб $Q$. Достаточно показать, что для любой призматической (окрестность $\mathcal{O}$ называем призматической, если она имеет вид $\pi_i^{-1}(L)$, где $L$ — подполиэдр

куба $I^l\times 0\times 0\times\ldots$, а $\pi_l : Q\to L$ — естественная проекция) окрестности $\mathcal{O}$ компакта $X$ в $Q$ включение $X\subseteq\mathcal{O}$ гомотопно в $\mathcal{O}$ некоторому отображению в $(m+n)$-мерный компакт [5, 6]. Для этого согласно лемме для каждого $y$ из $Y$ выберем такую призматическую окрестность $U_y$ слоя $f^{-1}(y)$ и такую окрестность $V_y$ точки $y$, что $\operatorname{Int}\mathcal{O}\supset U_y\supset f^{-1}(V_y)$ и проекция $\pi_l|_{U_y} : U_y\to L$ гомотопна некоторому отображению в $m$-мерный остов основания $L$ призмы $\mathcal{O}$, так как $\operatorname{Fd}(f^{-1}y)\leqslant m$ для каждого $y$ $(l=l(y))$.

В покрытие $\{V_y\}$ можно вписать такое конечное замкнутое покрытие $\{Y_i\}$, что $\dim(Y_{i_0}\cap\ldots\cap Y_{i_k})\leqslant n-k$ для любых индексов $i_j$ и любого $k$, $0\leqslant k\leqslant n+1$, так как $\dim Y\leqslant n$ [7]. Покрытие $\{X_i\}$, $X_i=f^{-1}(Y_i)$, вписано в $\{U_y\}$. Пусть $U_i=U_{y_i}\supset X_i$. По предположению $\operatorname{Fd}(X_{i_0}\cap\ldots\cap X_{i_k})\leqslant m+n-k$ для любых индексов $i_j$ и любого $k$, $1\leqslant k\leqslant n+1$.

Построим такие призматические окрестности $U_{i_0,\ldots,i_k}$ непустых пересечений $X_{i_0}\cap\ldots\cap X_{i_k}$, что $U_{i_0,\ldots,i_k}\subset\mathcal{O}_{i_0,\ldots,i_k}=\bigcap_j U_{i_0,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_k}$ ($\widehat{\ }$ — знак вычеркивания индекса $i_j$) и проекция $\pi_l|_{U_{i_0,\ldots,i_k}} : U_{i_0,\ldots,i_k}\to L_{i_0,\ldots,i_k}$ в основание призмы $\mathcal{O}_{i_0,\ldots,i_k}$ гомотопна отображению в $(m+n-k)$-мерный остов полиэдра $L_{i_0,\ldots,i_k}$ $(l=l(i_0,\ldots,i_k))$. Сделаем это по индукции, начиная с двухиндексных окрестностей $U_{i_0,i_1}$ пересечений $X_{i_0}\cap X_{i_1}$, с помощью леммы и неравенств

$$\operatorname{Fd}(X_{i_0}\cap\ldots\cap X_{i_k})\leqslant m+n-k.$$

Найдется одно такое число $l$, что $\mathcal{O}=\pi_l^{-1}L$, $\mathcal{O}_{i_0,\ldots,i_k}=\pi_l^{-1}L_{i_0,\ldots,i_k}$; $U_{i_0,\ldots,i_k}=\pi_l^{-1}K_{i_0,\ldots,i_k}$ для всех построенных выше окрестностей, при этом основания всех этих призм лежат в $I^l\times 0\times 0\times\ldots$. Схема пересечений всех этих призм — та же, что и у их оснований. Можно считать, что эти основания — подкомплексы куба $I^l\times 0\times 0\times\ldots$, взятого с достаточно мелкой триангуляцией, и что при всех гомотопиях основания рассмотренных призм уже лежат в $I^l\times 0\times 0\times\ldots$. Дело в том, что если $U\subset\mathcal{O}=\pi_{l'}^{-1}L'=\pi_l^{-1}L$ при $l'>l$ и если $\pi_l|_U : U\to L$ гомотопно отображению в $k$-мерный остов полиэдра $L$, то $\pi_{l'}|_U : U\to L'$ гомотопно отображению в $k$-мерный остов полиэдра $L'$. В самом деле композиция включения $i : L\subset L'$ с данной гомотопией дает искомую гомотопию, так как $i\pi$, где $\pi : L'\to L$ — естественная проекция, есть деформационная ретракция и $i\pi_l=i\pi\pi_{l'}\simeq\pi_{l'}$.

Заметим, что для всех построенных по индукции включений $U_{i_0,\ldots,i_k}\subset\mathcal{O}_{i_0,\ldots,i_k}$ включения оснований $K_{i_0,\ldots,i_k}\subset L_{i_0,\ldots,i_k}$ также гомотопны отображениям в те же $(m+n-k)$-мерные остовы, нужно лишь прежние гомотопии $H_{i_0,\ldots,i_k}$ заменить на гомотопии $H_{i_0,\ldots,i_k}i$, где $i$ — включения $K_{i_0,\ldots,i_k}\subset U_{i_0,\ldots,i_k}$.

Индукционное построение в обратную сторону сложнее. Если $X_{i_0}\cap\ldots\cap X_{i_n}\neq\varnothing$, то (так как $\operatorname{Fd}(X_{i_0}\cap\ldots\cap X_{i_n})\leqslant m$) проекция $\pi_l|_{X_{i_0}\cap\ldots\cap X_{i_n}}$ гомотопна в $K_{i_0,\ldots,i_n}$ отображению в $m$-мерный остов $K^{(m)}_{i_0,\ldots,i_n}$. Пусть $Z=X_{i_1}\cap\ldots\cap X_{i_n}$. Пересечения $Z_j=X_j\cap X_{i_1}\cap\ldots\cap X_{i_n}$ попарно не пересекаются. В силу предыдущего утверждения проекция $\pi_l|_{\cup Z_j}$ гомотопна в $\bigcup K_{j,i_1,\ldots,i_n}\subset K_{i_1,\ldots,i_n}$ отображению в $m$-мерный остов $K^m_{i_1,\ldots,i_n}$. По теореме Борсука [8] эту гомотопию можно продолжить в такую гомотопию $G=G_{i_1,\ldots,i_n} : Z\times I\to K_{i_1,\ldots,i_n}$, что $G_0=\pi_l|_Z$ и $G_1(Z_j)\subset K^m_{ji_1,\ldots,i_n}$ для всякого

$j$ (для любой гомотопии $\psi(x, t)$ мы полагаем $\psi_t(x)=\psi(x, t)$). Эту гомотопию можно подправить.

Пусть $f$—включение $K_{i_1,\ldots,i_n} \subset L_{i_1,\ldots,i_n}$, а $A$—остов $K^m_{i_1,\ldots,i_n}$. Так как $f$ гомотопно отображению в $L^m_{i_1,\ldots,i_n}$ (т. е. $\omega(f) \leqslant m$), то по лемме 4.3 из [6] найдется такая гомотопия $\varphi=\varphi_{i_1,\ldots,i_n}: K_{i_1,\ldots,i_n} \times I \to L_{i_1,\ldots,i_n}$, что $\varphi_0$ является включением $K=K_{i_1,\ldots,i_n} \subset L_{i_1,\ldots,i_n}$, $\varphi_1(k) \subset L^{m+1}_{i_1,\ldots,i_n}$ и $\varphi_t(K^m) \subset \subset L^{m+1}_{i_1,\ldots,i_n}$ при любом $t$.

Далее, по теореме 2.2.5 из [5] существует такая гомотопия $F=F_{i_1,\ldots,i_n}: :K \times I \to L_{i_1,\ldots,i_n}$, что $F_0(y)=y$ при $y \in K=K_{i_1,\ldots,i_n}$, $F_t(y)=y$ при $y \in \in K^m=K^m_{i_1,\ldots,i_n}$ и любом $t$ и $F_1(K) \subset L^{m+1}_{i_1,\ldots,i_n}$. Наконец, полагаем

$$H=H_{i_1,\ldots,i_n}(x, t)=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} G(x, 2t) & \text{при } t \leqslant \frac{1}{2} \\ F(G(x, 1), 2t-1) & \text{при } t > \frac{1}{2} \end{array}\right| \text{ и } x \in X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_n}.$$

Это определение корректно, так как $F(G(x, 1), 0)=F_0(G(x, 1))=G(x, 1)$.

Легко проверить, что $H_0(x)=\pi_l(x)$ и $H_1(x) \in L^{m+1}_{i_1,\ldots,i_n}$ при любом $x \in \in X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_n}$ и что $H_1(x) \in L^m_{i_1,\ldots,i_n}$ и $H_t(x) \in L_{ji_1,\ldots,i_n}$ при любых $x \in \in X_j \cap X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_n}$ и любом $t$. Беря всевозможные непустые $X_{i_1} \cap \ldots \ldots \cap X_{i_n}$, получаем таким образом гомотопии $H_{i_1,\ldots,i_n}$, которые совпадают друг с другом на пересечениях по $n+1$-му элементу.

Это же построение проводим для непустых пересечений $Z=X_{i_2} \cap \ldots \ldots \cap X_{i_n}$: «продолжаем гомотопии» $H_{ji_2,\ldots,i_n}$ с $\bigcup Z_j$, где $Z_j=X_j \cap X_{i_2} \cap \ldots \ldots \cap X_{i_n} \neq \varnothing$, в такую гомотопию $G=G_{i_2,\ldots,i_n}: Z \times I \to K_{i_2,\ldots,i_n}$, что $G_0= =\pi_l|_Z$ и $G_1(Z_j) \subset K^{m+1}_{ji_2,\ldots,i_n}$. С помощью уже упомянутой леммы 4.3 и теоремы 2.2.5 получаем такую гомотопию $F=F_{i_2,\ldots,i_n}: K_{i_2,\ldots,i_n} \times I \to L_{i_2,\ldots,i_n}$, что $F_0(y)=y$ при $y \in K=K_{i_2,\ldots,i_n}$, $F_t(y)=y$ при $y \in K^{m+1}$ и любом $t$ и что $F_1(K) \subset L^{m+2}_{i_2,\ldots,i_n}$. Из $G=G_{i_2,\ldots,i_n}$ и $F=F_{i_2,\ldots,i_n}$ по формуле, приведенной выше, строим гомотопии $H=H_{i_2,\ldots,i_n}: X_{i_2} \cap \ldots \cap X_{i_n} \times I \to L_{i_2,\ldots,i_n}$ для любого непустого пересечения $X_{i_2} \cap \ldots \cap X_{i_n}$. Эти гомотопии совпадают друг с другом на попарных пересечениях и обладают следующими свойствами:
1) $H_0(x)=\pi_l(x)$ и $H_1(x) \in L^{m+2}_{i_2,\ldots,i_n}$ при $x \in X_{i_2} \cap \ldots \cap X_{i_n}$;
2) $H_1(x) \in L^{m+1}_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ и $H_t(x) \in L_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ при $x \in X_{i_1} \cap X_{i_2} \cap \ldots \cap X_{i_n}$ и любом $t$;
3) $H_1(x) \in L^m_{i_0,i_1,i_2,\ldots,i_n}$ и $H_t(x) \in L_{i_0,i_1,i_2,\ldots,i_n}$ при $x \in X_{i_0} \cap X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_n}$ и любом $t$.

Эти свойства гарантируют дальнейшее индукционное построение, и в конце концов мы приходим к таким гомотопиям $H_i: X_i \times I \to L_i \subset L$, что $H_i(x, 0)=x$ и $H_i(x, 1) \in L^{m+n}_i \subset L^{m+n}$ при $x \in X_i$. Все эти гомотопии совпадают друг с другом на попарных пересечениях. Поэтому получаем гомотопию $H: X \times I \to L$, связывающую проекцию $\pi_l: X \to L$ с отображением в $(m+n)$-мерный остов $L^{m+n}$. Так как тождество $1_{\mathcal{O}}$ гомотопно проекции $\pi_l|_{\mathcal{O}}$, то включение $X \subset \mathcal{O}$ гомотопно ограничению $\pi_l|_X$ и тем самым отображению в $(m+n)$-мерный полиэдр $L^{m+n}$, лежащий в $\mathcal{O}$. Таким образом, $\mathrm{Fd}\,X \leqslant n+m$.

Автор выражает благодарность профессору Ю. М. Смирнову за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. М., 1948.
2. Пасынков Б. А. О формуле Гуревича//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1965. № 4. 3—5.
3. Филлипов В. В. О размерности замкнутых отображений//Докл. АН СССР. 1972. **205**, № 1. 40—43.
4. Борсук К. Теория шейпов. М., 1976.
5. Dydak J., Segal J. Shape theory. An introduction//Lect. Notes Math. 1979. N 688.
6. Nowak S. Some properties of fundamental dimension//Fund. math. 1974. **85**, N 3. 221—227.
7. Куратовский К. Топология. Т. 2. М., 1969.
8. Борсук К. Теория ретрактов. М., 1971.

Поступила в редакцию
10.04.89

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1990. № 6

УДК 511.36

Н. В. Шестакова

## ОЦЕНКИ МЕРЫ ВЗАИМНОЙ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЧИСЕЛ

**1. Введение.** В 1949 г. А. О. Гельфонд и Н. И. Фельдман доказали [1], что если $\alpha$ и $\beta$ — алгебраические числа, $\alpha$ отлично от 0 и 1, степень $\beta$ равна 3, $P(x, y)$ — многочлен с целыми рациональными коэффициентами степени $d$ и высоты $H$, то при достаточно большом $T$, где $T=\max(d, \ln H)$, и для любого $\varepsilon>0$ выполнено неравенство

$$|P(\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2})| \geqslant \exp(-\exp(T^{4+\varepsilon})).$$

Дальнейшие улучшения этого результата есть в работах Г. В. Чудновского [2] и Д. Броунвелла [3].

В данной работе доказывается следующая

Теорема. *Если $P$, $\alpha$ и $\beta$ такие же, как выше,* $t(P)=\deg P+\ln H(P)$, *то существует постоянная* $\mu=\mu(\alpha, \beta)>0$, *такая, что*

$$|P(\alpha^{\beta}, \alpha^{\beta^2})| \geqslant \exp(-\exp(\mu t(P)\deg P)).$$

Аналогичный результат доказан Диасом [4] с использованием оценок кратностей нулей многочленов на алгебраических многообразиях и критерия алгебраической независимости Джаббури.

**2. Доказательство оценок для идеалов.** Пусть $\mathbf{Z}[X]=\mathbf{Z}[x_{0,0}, x_{i,j}]$, $0\leqslant j\leqslant 3$, $1\leqslant i\leqslant 3$, — кольцо многочленов от 13 переменных с целыми рациональными коэффициентами, а величины $N(\mathfrak{p})$, $H(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p}(\bar{\omega})$, $\rho$ определены так же, как в работе [5]. Можно также считать, что $\beta$ — целое алгебраическое число.

Предложение 1. *Пусть $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют условиям теоремы, $\mathfrak{p}$ — однородный простой идеал кольца $\mathbf{Z}[X]$ высоты* 12,

$$\mathfrak{p}\cap\mathbf{Z}=(0),\ t_\lambda(\mathfrak{p})=N(\mathfrak{p})+\ln H(\mathfrak{p}),\ \bar{\omega}=(1,\ a_i,\ e^{a_ib_j}),\ a_i=\beta^{i-1},$$

$$b_j=\beta^{j-1}\ln\alpha,\ 1\leqslant i,\ j\leqslant 3.$$