Ф. Ю. Попеленский, Алгебраическая K-теория верхнетреугольных колец и ее обобщение,
Матем. заметки, 2019, том 106, выпуск 5, 736–743

Математические заметки

Том 106 выпуск 5 ноябрь 2019

УДК 512.667.3

Алгебраическая K-теория верхнетреугольных колец и ее обобщение

Ф. Ю. Попеленский

В работе строится "тензорное" обобщение алгебраической K-теории верхнетреугольных колец и доказывается, что соответствующие K_m-группы естественно изоморфны прямой сумме K_m-групп диагональной части.

Библиография: 6 названий

Ключевые слова: K-теория Квиллена, верхнетреугольное кольцо.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12157

1. Введение и постановка задачи. Пусть A и B – асоциативные кольца с 1. Пусть также M – A-левый и B-правый бимодуль. Рассмотрим множество верхнетреугольных матриц R вида $\left(\begin{smallmatrix} a & m \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$, где $a \in A$, $b \in B$ и $m \in M$. Стандартные формулы сложения и умножения матриц задают на R структуру ассоциативного кольца с единицей $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Часто кольцо R удобно обозначать через $\left(\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$.

Аналогичным образом строится диагональное кольцо D, состоящее из матриц $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$, где $a \in A$, $b \in B$. Имеется гомоморфизм колец $p\colon R \to D$, который задается формулой $p\colon \left(\begin{smallmatrix} a & m \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$. В работе [1] было доказано, что индуцированный гомоморфизм $p_*\colon K_s(R) \to K_s(A) \oplus K_s(B)$ является естественным изоморфизмом для $s = 0, 1, 2$. Затем в работе [2] было доказано, что p_* является изоморфизмом для всех s; здесь высшие алгебраические K-группы (т.е. при $s \geqslant 2$) определяются по Квиллену с помощью $+$-конструкции, а для отрицательных s используется изоморфизм надстройки. Доказательства в обеих работах основаны на исследовании когомологий групп. Несколько позже в работе [3] было получено короткое и элегантное доказательство этого изоморфизма для высших K-групп, определенных с помощью Q-конструкции, также предложенной Квилленом. Напомним, что высшие K-группы, определенные с помощью $+$-конструкции, и высшие K-группы, определенные с помощью Q-конструкции естественно изоморфны. Таким образом, мы имеем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любых колец A и B с единицами и любого A-левого и B-правого модуля M гомоморфизм $p_*\colon K_s(R) \to K_s(A) \oplus K_s(B)$ является изоморфизмом для всех s.*

Работа выполнена при поддержке программы "Ведущие научные школы" (грант № НШ-6399.2018.1, соглашение № 075-02-2018-867) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-01-00398).

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть A_i, $i = 1, \dots, n$, – конечный набор ассоциативных колец с 1. Пусть также для каждой пары $1 \leqslant i < j \leqslant n$ задан A_i-левый и A_j-правый бимодуль M_{ij}. Тогда можно рассмотреть множество R, состоящее из верхнетреугольных матриц

$$\begin{pmatrix} a_1 & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ 0 & a_2 & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

где $a_i \in A_i$ и $m_{ij} \in M_{ij}$ для всех i и j. Чтобы стандартная формула для умножения матриц задавала структуру ассоциативного кольца на R, потребуем, чтобы для всех $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ существовали отображения $\pi_{ijk} \colon M_{ij} \otimes_{A_j} M_{jk} \to M_{ik}$, такие что

(1) π_{ijk} является A_i-линейным слева и A_k-линейным справа,

(2) для любых $1 \leqslant i < j < k < l \leqslant n$ имеет место равенство $\pi_{ikl}(\pi_{ijk} \otimes 1) = \pi_{ijl}(1 \otimes \pi_{jkl})$.

Заменой всех m_{ij} на 0 получим определение диагонального кольца D. Как и выше, определен гомоморфизм $p \colon R \to D$.

Индукцией по n нетрудно доказать, что для всех s индуцированный гомоморфизм

$$p_* \colon K_s(R) \to K_s(D) = \oplus_i K_s(A_i) \tag{1.1}$$

является изоморфизмом.

В данной работе мы определим "верхнетреугольную тензороподобную" структуру, для которой существует кольцо, похожее на кольцо R, определенное выше. Затем мы покажем, что K_s-группы этого кольца выражаются через K_s-группы "диагональной" части структуры с помощью изоморфизма типа (1.1).

Основной интерес к рассматриваемой задаче мотивирован гипотезой Брунса–Губеладзе, состоящей в том, что полиэдральные высшие алгебраические K-группы выражаются через K-группы основного кольца, см. [4].

Вместе с тем следует отметить, что данная заметка представляет отдельный самостоятельный интерес, поскольку она не зависит от гипотезы Брунса–Губеладзе даже в случае K-теории четырехугольной пирамиды, рассмотренном в работе [5]. Это связано с различным устройством "внедиагональных" частей конструкций, использованных в работе [5] и в настоящей заметке.

2. Основная конструкция.

Определение 1. Зафиксируем произвольное конечное частично упорядоченное множество Δ. Порядок в нем будем обозначать $\prec$. Зафиксируем также множество $\overline{\Delta}$, состоящее из пар (α, I), где $\alpha \in \Delta$ и $I \subset \Delta$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) для любой пары $(\alpha, I) \in \overline{\Delta}$ и любого $\beta \in I$ выполняется $\alpha \prec \beta$;

(2) если $(\alpha, I), (\beta, J) \in \overline{\Delta}$, причем $\beta \in I$ и $I \cap J = \varnothing$, то $(\alpha, (I \cup J) \setminus \beta) \in \overline{\Delta}$.

Будем называть набор данных $\overline{\Delta}$ *обобщенной верхнетреугольной схемой.*

Определим верхнетреугольное тензороподобное кольцо, соответствующее $\overline{\Delta}$.

Для этого зафикисируем для каждого $\alpha \in \Delta$ ассоциативное кольцо A_α. Для каждой пары $(\alpha, I) \in \overline{\Delta}$ зафиксируем M_I^α – A_α-левый и $\prod_{\beta \in I} A_\beta$-правый модуль.

Кроме того, потребуем, чтобы для всех пар $(\alpha, I), (\beta, J) \in \overline{\Delta}$, удовлетворяющих пункту (2) определения 1, был задан гомоморфизм

$$\pi^{\alpha,\beta}_{I,J}\colon M^\alpha_I \otimes_{A_\beta} M^\beta_J \longrightarrow M^\alpha_{(I\cup J)\setminus\beta}$$

A_α-левых и $\prod_{\gamma\in(I\cup J)\setminus\beta} A_\gamma$-правых модулей. Наконец, потребуем выполнения очевидного условия ассоциативности

$$\pi^{\alpha,\gamma}_{(I\cup J)\setminus\beta,K}(\pi^{\alpha,\beta}_{I,J} \otimes \mathrm{id}) = \pi^{\alpha,\beta}_{I,(J\cup K)\setminus\gamma}(\mathrm{id} \otimes \pi^{\beta,\gamma}_{J,K})$$

для всех пар $(\alpha, I), (\beta, J), (\gamma, K) \in \overline{\Delta}$, для которых $\beta \in I, \gamma \in J$, $I \cap J = J \cap K = I \cap K = \varnothing$.

По этому набору данных $(\overline{\Delta}, \{A_\alpha\}, \{M^\alpha_I\})$ определим кольцо $R(\overline{\Delta}, \{A_\alpha\}, \{M^\alpha_I\})$, которое для краткости будем обозначать $R(\overline{\Delta})$, а чаще – просто R. Элементами этого кольца служат наборы

$$a = (\delta_\alpha(a) \in A_\alpha,\ m^\alpha_I(a) \in M^\alpha_I \mid \alpha \in \Delta,\ (\alpha, I) \in \overline{\Delta}).$$

Сложение таких наборов определим покомпонентно. Произведение $ab = (\delta_\alpha(ab) \in A_\alpha,\ m^\alpha_I(ab) \in M^\alpha_I \mid \alpha \in \Delta,\ (\alpha, I) \in \overline{\Delta})$ определим формулами

$$\delta_\alpha(ab) = \delta_\alpha(a)\delta_\alpha(b), \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} m^\alpha_I(ab) &= \delta_\alpha(a)m^\alpha_I(b) + m^\alpha_I(a)\prod_{\beta\in I}\delta_\beta(b) \\ &\quad + \sum_{I=(J\setminus\beta)\cup K,\, \beta\in J,\, J\cap K=\varnothing,\, (\alpha,J),(\beta,K)\in\overline{\Delta}} \pi^{\alpha,\beta}_{J,K}(m^\alpha_J(a), m^\beta_K(b)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Так определенное умножение ассоциативо в силу свойств отображений $\pi^{\alpha,\beta}_{J,K}$. Единицей кольца R служит набор $(\delta_\alpha = 1, m^\alpha_I = 0)$.

Пример 1. Верхнетреугольные матрицы соответствуют выбору $\Delta = \{1, 2, \dots, n\}$ со стандартным порядком на целых числах и $\overline{\Delta} = \{(i, \{j\}) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$.

Пример 2. Менее тривиальный пример доставляют верхнетреугольные матрицы с нулевыми блоками, расположенными так, что произведение двух таких матриц также является матрицей с нулями на тех же местах. Например, кольцо матриц вида $\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{smallmatrix}\right)$ удовлетворяет нашему определению для $\Delta = \{1 \prec 2 \prec 3\}$ и $\overline{\Delta} = \{(1, \{3\}), (2, \{3\})\}$. С другой стороны, множество матриц вида $\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{smallmatrix}\right)$ не замкнуто относительно умножения и поэтому не является кольцом.

Имеется проекция $p\colon R(\overline{\Delta}) \to \prod_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$, которая состоит в забывании компонент $m(a)^\alpha_I$ элемента $a \in R$. Легко видеть, что p является гомоморфизмом. Основной результат этой статьи – следующее утверждение.

Теорема 2. *Для всех s индуцированный гомоморфизм*

$$p_*\colon K_s(R(\overline{\Delta})) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Delta} K_s(A_\alpha)$$

является изоморфизмом.

3. Матрицы над кольцом R. В этом разделе мы приведем некоторые предварительные результаты об алгебре матриц $\mathrm{Mat}_n(R)$. Матрицу

$$P \in \mathrm{Mat}_n(R), \qquad P = (p_{ij} \mid p_{ij} \in R,\, 1 \leqslant i, j \leqslant n),$$

будем представлять как набор матриц $\delta_\alpha(P) \in \mathrm{Mat}_n(A_\alpha)$ и $m_I^\alpha(P) \in \mathrm{Mat}_n(M_I^\alpha)$, матричные элементы которых определятся как

$$\delta_\alpha(P)_{ij} = \delta_\alpha(p_{ij}), \qquad m_I^\alpha(P)_{ij} = m_I^\alpha(p_{ij}).$$

Матрицы $\delta_\alpha(P)$ удобно представлять себе как диагональные компоненты матрицы P, а матрицы $m_I^\alpha(P)$ – как ее внедиагональные (точнее, наддиагональные) компоненты.

В терминах компонент δ_α и m_I^α нетрудно описать операции с матрицами $P, Q \in \mathrm{Mat}_n(R)$. А именно, при сложении P и Q их одноименные компоненты складываются. Из формулы (2.1) следует, что $\delta_\alpha(PQ)$ является (матричным) произведением одноименных диагональных компонент:

$$\delta_\alpha(PQ) = \delta_\alpha(P)\delta_\alpha(Q). \tag{3.1}$$

Из формулы (2.2) следует, что $m_I^\alpha(PQ)$ является суммой (матричных) произведений:

$$\begin{aligned} m_I^\alpha(PQ) = \delta_\alpha(P) m_I^\alpha(Q) + m_I^\alpha(P) \prod_{\beta\in I} \delta_\beta(Q) \\ + \sum_{I=(J\setminus\beta)\cup K,\, \beta\in J,\, J\cap K=\varnothing,\, (\alpha,J),(\beta,K)\in\overline{\Delta}} \pi_{J,K}^{\alpha,\beta}(m_J^\alpha(P), m_K^\beta(Q)), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $\prod_{\beta\in I} \delta_\beta(Q)$ – матрица, у которой элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен $\prod_{\beta\in I} \delta_\beta(q_{ij})$.

Лемма 1. *Выберем некоторым образом $(\alpha, I) \in \overline{\Delta}$ и матрицу $\Lambda \in \mathrm{Mat}_n(M_I^\alpha)$. Элемент $e_I^\alpha(\Lambda) \in \mathrm{Mat}_n(R)$, компоненты которого определены как $m_I^\alpha = \Lambda$, $m_J^\beta = 0$ для всех $(\beta, J) \neq (\alpha, I)$ и $\delta_\beta(P) = E$ для всех β, обратим. Более того, $e_I^\alpha(\Lambda)^{-1} = e_I^\alpha(-\Lambda)$.*

Доказательство. В произведении $e_I^\alpha(\Lambda)e_I^\alpha(-\Lambda)$ все диагональные компоненты равны E. В формуле (3.2) для компоненты m_I^α этого произведения первое слагаемое равно $-\Lambda$, второе равно Λ, а в третьей сумме все слагаемые нулевые. Остальные компоненты типа m_J^β рассматриваемого произведения нулевые по той же формуле.

Предложение 1. *Матрица $P \in \mathrm{Mat}_n(R)$ обратима тогда и только тогда, когда $\delta_\alpha(P) \in GL_n(A_\alpha)$ для всех $\alpha \in \Delta$.*

Доказательство. Из формулы (3.1) для диагональных компонент произведения следует, что если P обратима, то $\delta_\alpha(P)$ обратимы для всех $\alpha \in \Delta$.

Покажем теперь, что если у элемента $P \in GL_n(R)$ все диагональные компоненты обратимы, а внедиагональные произвольные, то P обратим. Без ограничения общности можно считать, что все диагональные компоненты $\delta_\alpha(P)$ – единичные матрицы. В самом деле, в противном случае достаточно домножить P на обратимый элемент Q, для которого $\delta_\alpha(Q) = \delta_\alpha(P)^{-1}$ для всех $\alpha \in \Delta$ и все $m_I^\alpha(Q) = 0$.

Покажем, теперь как разложить P в произведение матриц вида $e_I^\alpha(\Lambda)$. Для этого рассмотрим множество Δ_1 индексов $\beta \in \Delta$ таких, что для всех $(\beta, J) \in \overline{\Delta}$ и для всех $(\gamma, K) \in \overline{\Delta}$, где $\beta \prec \gamma$, выполняются равенства $m_J^\beta(P) = 0$ и $m_K^\gamma(P) = 0$. Множество всех пар (β, J) с $\beta \in \Delta_1$ обозначим $\overline{\Delta}_1$. Обозначим через $\overline{\Delta}_2$ множество всех пар $(\alpha, I) \in \overline{\Delta}$, для которых $\beta \in \Delta_1$ для всех β, удовлетворяющих $\alpha \prec \beta$, и $m_I^\alpha(P) = 0$.

Выберем максимальный индекс $\alpha \in \Delta$, для которого найдется $(\alpha, I) \in \overline{\Delta}$ такой, что $m_I^\alpha(P) = L \neq 0$. Заметим, что если $\alpha \prec \beta$, то $m_J^\beta(P) = 0$ для всех $(\beta, J) \in \overline{\Delta}$, в частности $\beta \in \overline{\Delta}_1$. Рассмотрим произведение $e_I^\alpha(-\Lambda)P$. Из формулы (3.1) следует, что диагональные компоненты этого произведения – единичные матрицы. Компонента m_I^α произведения $e_I^\alpha(-\Lambda)P$ равна 0, так как первое слагаемое в формуле (3.2) равно Λ, второе равно $-\Lambda$, а остальные слагаемые нулевые, так как $m_J^\beta(P) = 0$ как только $\alpha \prec \beta$. Компоненты m_J^α произведения $e_I^\alpha(-\Lambda)P$ (если они есть) совпадают с одноименными компонентами элемента P. В самом деле, в формуле (3.2) для компоненты m_J^α этого произведения первое слагаемое равно $m_J^\alpha(P)$, а остальные слагаемые равны 0. Наконец, для всех $\beta \in \Delta_1$ выполняется $m_J^\beta(P) = 0$, и формула (3.2) снова показывает, что $m_J^\beta(e_I^\alpha(-\Lambda)P) = 0$.

Таким образом, при переходе от P к $e_I^\alpha(-\Lambda)P$ множество элементов $\overline{\Delta}_1 \cup \overline{\Delta}_2$ увеличивается на одну пару (α, I). Множество $\overline{\Delta}$ состоит из конечного числа элементов, поэтому за конечное число шагов мы получим произведение

$$e_{I_s}^{\alpha_s}(-\Lambda_s) \cdots e_{I_2}^{\alpha_2}(-\Lambda_2) e_{I_1}^{\alpha_1}(-\Lambda_1) P,$$

равное единичному элементу $GL_n(R)$.

Рассмотрим группу $GL(R)$, равную прямому пределу групп $GL_n(R)$ относительно стандартного вложения матриц в левый верхний угол. Компоненты элемента $GL(R)$ определяются так же, как для элемента группы $GL_n(R)$, при этом формулы для умножения (3.1) и (3.2) верны и для элементов группы $GL(R)$.

Как известно, подгруппа $E(R) = [GL(R), GL(R)]$ совершенна, т.е. совпадает со своим коммутантом.

Предложение 2. *Элемент $P \in GL(R)$ тогда и только тогда принадлежит $E(R)$, когда $\delta_\alpha(P) \in E(A_\alpha)$ для всех $\alpha \in \Delta$.*

Доказательство. Ясно, что если $P \in E(R)$, то $\delta_\alpha(P) \in E(A_\alpha)$ для всех $\alpha \in \Delta$.

Докажем, что если для $P \in GL(R)$ выполняются условия $\delta_\alpha(P) \in E(A_\alpha)$ для всех $\alpha \in \Delta$, а компоненты $m_J^\beta(P)$ произвольны, то $P \in E(R)$.

Так же как и в доказательстве утверждения 1, можно считать, что все диагональные компоненты элемента P – единичные матрицы. В том же утверждении было показано, что такой элемент представляется в виде произведения матриц вида $e_I^\alpha(\Lambda)$, где $\Lambda \in \mathrm{Mat}(M_I^\alpha)$. Больше того, можно считать, что в матрице Λ имеется единственный отличный от 0 элемент λ, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца. Обозначим через $(m_I^\alpha)_{ij}^\lambda$ элемент группы $GL(R)$, у которого все диагональные компоненты единичные, все внедиагональные компоненты нулевые, за исключением компоненты m_I^α, в которой отличен от 0 только один элемент λ, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца. Обозначим через $(e_\alpha)_{ij}^\mu \in GL(R)$ элемент, у которого все внедиагональные компоненты нулевые, все диагональные компоненты единичные, исключая компоненту δ_α, которая равна стандартной элементарной матрице e_{ij}^μ.

Выберем номер k, отличный от i и от j. Тогда непосредственно легко поверить, что

$$[(a_\alpha)^1_{ik}, (m^\alpha_I)^\lambda_{kj}] = (m^\alpha_I)^\lambda_{ij},$$

откуда, $(m^\alpha_I)^\lambda_{ij} \in E(R)$.

Другой вариант доказательства получится, если подобрать такую обратимую матрицу $Z \in GL(A_\alpha)$, что $Z - E$ тоже обратима. Обозначим через $P \in GL(A)$ элемент с единственной нетривиальной компонентой $\delta_\alpha(P) = Z$, а через $Q \in GL(A)$ – элемент с единственной нетривиальной компонентой $m^\alpha_I(Q) = (Z - E)^{-1}\Lambda$. Тогда легко проверить, что $[P, Q] = e^\alpha_I(\Lambda)$.

4. Вычисление $K_0(R)$ и $K_1(R)$. Мы приведем отдельное доказательство теоремы 2 для $s = 0, 1$, хотя эти два случая укладываются в рамки общего доказательства, которое будет приведено в слудеющем разделе. Положим для краткости $D = \prod_{\alpha\in\Delta} A_\alpha$.

Рассмотрим в кольце R идеал J, состоящий из элементов, у которых все диагональные компоненты нулевые:

$$J = \{a \in R \mid \delta_\alpha(R) = 0 \text{ для всех } \alpha \in \Delta\}.$$

Из формулы (2.2) для внедиагональных компонент произведения элементов из R следует, что $J^n = 0$, где n – число элементов Δ. Тем самым, J содержится в радикале Джекобсона кольца R; кроме того, кольцо R является J-адически полным.

Предложение 3 (Басс, [6; гл. IX, предложение 1.3]). *Предположим, что идеал J содержится в радикале Джекобсона кольца A. Тогда естественный гомоморфизм $\pi\colon K_0(A) \to K_0(A/J)$ является мономорфизмом. Более того, π – изоморфизм, если кольцо A является J-адически полным.*

Применяя это утверждение к гомоморфизму факторизации $\pi\colon R \to R/J = D$, получаем, что он индуцирует изоморфизм $\pi_*\colon K_0(R) \to K_0(R/J)$.

Наконец, заметим, что $R/J = \prod_{\alpha\in\Delta} A_\alpha = D$, поэтому теорема 2 доказана для $s = 0$.

По утверждению 2 гомоморфизм групп $p\colon GL(R) \to GL(D)$ отображает $E(R)$ на $E(D)$, поэтому индуцированный гомоморфизм $p\colon GL(R)/E(R) \to GL(D)/E(D)$ является изоморфизмом, что дает нам доказательство теоремы 2 для $s = 1$.

5. Доказательство теоремы 2. Доказательство проведем индукцией по числу элементов множества Δ. Выберем в Δ минимальный элемент α_0, т.е. такой элемент, что не существует $\beta \in \Delta$, для которого $\beta \prec \alpha_0$. Рассмотрим множество $\Delta_1 = \Delta \setminus \alpha_0$ и множество $\overline{\Delta}_1$, состоящее из всех пар $(\beta, I) \in \overline{\Delta}$, в которых $\beta \neq \alpha_0$. Кроме того, рассмотрим частично упорядоченное множество Δ', состоящее из тех же элементов, что и Δ, при этом отношение порядка на Δ' получается из отношения порядка на Δ выбрасыванием всех сравнений $\alpha_0 \prec \beta$, где $\beta \in \Delta$. Положим также $\overline{\Delta}' = \overline{\Delta}_1$. Ясно, что $\overline{\Delta}$ и $\overline{\Delta}'$ отличаются только на пары вида (α_0, I).

Гомоморфизм забывания $p\colon R(\overline{\Delta}) \to D$ разлагается в композицию двух гомоморфизмов $p = p'' \circ p'$. Здесь p' – гомоморфизм, состоящий в забывании всех $m^{\alpha_0}_I$-компонент $p'\colon R(\overline{\Delta}) \to R(\overline{\Delta}')$, а $p''\colon R(\overline{\Delta}') \to D$ – гомоморфизм забывания всех внедиагональных компонент. По предположению индукции гомоморфизм забывания $p_1\colon R(\overline{\Delta}_1) \to \prod_{\beta\in\Delta_1} A_\beta$ индуцирует изоморфизм

$$(p_1)_*\colon K_s(R(\overline{\Delta}_1)) \to \bigoplus_{\beta\in\Delta_1} K_s(A_\beta).$$

Заметим теперь, что $R(\Delta') = A_{\alpha_0} \times R(\overline{\Delta}_1)$, причем $p'' = \mathrm{id}_{A_{\alpha_0}} \times p_1$.

Поэтому p''_* изоморфно отображает группу $K_s(R(\Delta'))$ на

$$K_s(A_{\alpha_0}) \oplus \bigoplus_{\beta\in\Delta_1} K_s(A_\beta) = \bigoplus_{\beta\in\Delta} K_s(A_\beta)$$

для всех s.

Остается доказать, что $(p')_*\colon K_s(R(\overline{\Delta})) \to K_s(R(\overline{\Delta}'))$ является изоморфизмом для всех s. Для этого мы воспользуемся теоремой 1. В качестве кольца A рассмотрим A_{α_0}, а в качестве B – кольцо $R(\overline{\Delta}_1)$. Модуль M определим как $\bigoplus_{(\alpha_0,I)\in\overline{\Delta}} M_I^{\alpha_0}$. Левое умножение на A_{α_0} для M определяется очевидным образом:

$$a\Bigl(\sum m_I^{\alpha_1}\Bigr) = \sum a m_I^{\alpha_0}.$$

Правое умножение $m = (m_I^{\alpha_0} \mid (\alpha_0, I) \in \overline{\Delta})$ на $b = (b_\beta, n_I^\beta \mid \beta\in\Delta_1, (\beta, I) \in \overline{\Delta}_1)$ определим следующим образом. Элементы m и b можно рассматривать как элементы кольца $R(\overline{\Delta})$. Определим произведение mb как произведение m и b в кольце $R(\overline{\Delta})$. Все нужные свойства модульной структуры являются непосредственным следствием кольцевой структуры $R(\overline{\Delta})$. Остается лишь показать, что так определенное произведение mb лежит в M. В самом деле, диагональные компоненты этого произведения по формуле (2.1) равны

$$\delta_\beta(mb) = \delta_\beta(m)\delta_\beta(b) = 0,$$

поскольку у m нет нетривиальных диагональных компонент, т.е. $\delta_\beta(m) = 0$ для всех $\delta \in \Delta$. Внедиагональные компоненты $m_I^\beta(mb)$ вычисляются по формуле (2.2) и при $\beta \neq \alpha_0$ оказываются нулевыми, поскольку в этом случае каждое слагаемое этой формулы содержит сомножитель вида $m_J^\beta(m)$, равный 0. Тем самым, в произведении mb ненулевыми могут быть только компоненты вида $m_I^{\alpha_0}$, т.е. $mb \in M$. Теперь легко видеть, что $R(\overline{\Delta})$ изоморфно треугольному кольцу $\left(\begin{smallmatrix} A & M \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$. Применяя к нему теорему 1, получаем изоморфизм

$$K_s(\overline{\Delta}) \xrightarrow{p'_*} K_s(A) \oplus K_s(B) = K_s(\alpha_0) \oplus K_s(R(\Delta_1)),$$

что завершает доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] R. K. Dennis, S. C. Geller, “K_i of upper triangular matrix rings”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **56** (1976), 73–78.

[2] A. J. Berrick, M. E. Keating, “The K-theory of triangular matrix rings”, *Applications of Algebraic K-theory to Algebraic Geometry and Number Theory*, Part I, Contemp. Math., **55**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, 69–74.

[3] M. E. Keating, “The K-theory of triangular matrix rings. II”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **100**:2 (1987), 235–236.

[4] W. Bruns, J. Gubeladze, “Polytopes and K-theory”, *Georgian Math. J.*, **11**:4 (2004), 655–670.

[5] Ф. Ю. Попеленский, М. В. Приходько, “K-группы Брунса–Губеладзе для четырехугольной пирамиды”, *Топология*, СМФН, **51**, РУДН, М., 2013, 142–151.

[6] H. Bass, *Algebraic K-Theory*, W. A. Benjamin, New York, 1968.

Ф. Ю. Попеленский
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
E-mail: popelens@mech.math.msu.su

Поступило
22.08.2018
Принято к публикации
16.01.2019