Ю. Г. Смирнов, О разрешимости интегрального уравнения электрического поля для непоглощающих сред, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2024, выпуск 1, 38–50

DOI: 10.21685/2072-3040-2024-1-4

УДК 517.927.2
doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-4

О разрешимости интегрального уравнения электрического поля для непоглощающих сред

Ю. Г. Смирнов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

mmm@pnzgu.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Рассматривается задача о разрешимости интегрального уравнения электрического поля для непоглощающих сред. *Материалы и методы.* Применен метод квадратичных форм для анализа операторов задачи. *Результаты и выводы.* Доказана непрерывная обратимость оператора уравнения электрического поля в случае плоских экранов и непоглощающих сред.

Ключевые слова: интегральное уравнение, непоглощающая среда, разрешимость задачи

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-20087).

Для цитирования: Смирнов Ю. Г. О разрешимости интегрального уравнения электрического поля для непоглощающих сред // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 38–50. doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-4

On the solvability of the integral electric field equation for nonabsorbing media

Yu.G. Smirnov

Penza State University, Penza, Russia

mmm@pnzgu.ru

Abstract. *Background.* The problem of solvability of the electric field integral equation for non-absorbing media is considered. *Materials and methods.* The method of quadratic forms is applied to investigation of the operators of the problem. *Results and conclusions.* The study proves the continuous reversibility of the operator of the electric field equation in the case of plane screens and nonabsorbing media.

Keywords: integral equation, non-absorbing medium, solvability of the problem

Financing: the research was financed by the RSF (project No. 20-11-20087).

For citation: Smirnov Yu.G. On the solvability of the integral electric field equation for nonabsorbing media. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;(1):38–50. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2024-1-4

Введение

Наиболее естественный подход к решению задачи дифракции электромагнитного поля на идеально проводящем тонком ограниченном экране – сведение ее к решению интегрального уравнения электрического поля (electric field integral equation – EFIE) на экране [1]. По-видимому, впервые это уравнение было получено А. Мауэ в 1949 г. [2]. Точнее, это векторное интегро-дифференциальное уравнение, которое имеет вид

$$Lu := \mathrm{grad}_\tau A\left(\mathrm{div}\, u\right) + k^2 A_\tau u = f,\ x \in \Omega, \tag{1}$$

где div – операция «поверхностной» дивергенции; A – интегральный оператор,

$$A_\tau u = \int_\Omega \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y)\, ds, \tag{2}$$

u – касательное к поверхности экрана Ω векторное поле (плотность поверхностного тока). Индекс τ в (1), (2) показывает взятие касательных компонент к Ω соответствующего поля.

Центральной проблемой при исследовании разрешимости уравнения (1) является выбор пространств для решений и для правых частей таким образом, чтобы обеспечить фредгольмовость (и, если удастся, однозначную разрешимость) этого уравнения в выбранных пространствах. Кроме того, пространство решений должно быть достаточно широким и содержать все физически допустимые поля. Такие пространства $W(\bar{\Omega})$ впервые были предложены в [3, 4] и позднее стали использоваться во всем мире при решении задач дифракции на экранах (в зарубежных публикациях они обычно обозначаются как $H_{div}^{-1/2}(\bar{\Omega})$).

Изучение уравнения (1) было начато уже в работе А. Мауэ [2]. Позднее в фундаментальной монографии [1] была доказана теорема единственности для решений уравнения (1) (и краевой задачи дифракции), исследовано поведение дифракционных полей на бесконечности и в окрестности гладкого края экрана, получены аналитические решения задач дифракции на тонком диске и на сфере.

Подробно интегральное уравнение электрического поля было исследовано в [3–7]. Основная трудность при обосновании применимости численного метода для решения уравнения состоит в том, что, как доказано в [3–7], оператор уравнения не является эллиптическим, поэтому известные результаты о сходимости проекционных методов для решения уравнений с эллиптическими операторами [8, 9] непосредственно нельзя применить. Более того, доказано [10], что свойства аппроксимации для базисных функций недостаточно для сходимости проекционного метода, если оператор уравнения неэллиптический.

Далее будет показано, что в случае непоглощающей среды интегральное уравнение электрического поля не будет эллиптическим, но, тем не менее, оператор уравнения будет непрерывно обратимым. В статье рассматривается только случай плоского экрана.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$,

$$\Omega = \bigcup_i \Omega, \ \bar{\Omega}_i \bigcap \bar{\Omega}_j = \varnothing\ (i \neq j) -$$

объединение конечного числа непересекающихся областей в $\mathbf{R}^2$. Пусть граница $\partial\Omega_j = \overline{\Omega}_j \setminus \Omega_j$ области Ω_j есть кусочно-гладкая кривая без точек самопересечения, состоящая из конечного числа простых дуг класса C^∞, сходящихся под углами, отличными от нулевого: $\Gamma = \partial\Omega = \bigcup_j \partial\Omega_j$.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение (EFIE):

$$\operatorname{grad} A(\operatorname{div} u) + k^2 Au = f,\ x \in \Omega, \tag{3}$$

$$Au = \int_\Omega \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} u(y)\,dy, \tag{4}$$

где $u = u(x) = (u_1, u_2)^T$, $x = (x_1, x_2)$, а операции «поверхностной дивергенции и градиента» определены так:

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2};\ \operatorname{grad} g = \frac{\partial g}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} e_2;$$

e_1, e_2 – орты декартовой системы координат в $\mathbf{R}^2$.

Будем считать, что $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Это условие выполняется, если источники электромагнитного поля не лежат на поверхности экрана. Будем рассматривать случай непроводящей среды: $\operatorname{Im} k = 0,\ k > 0$.

Для удобства исследования уравнения выполним преобразование переменных $x_1' := kx_1, x_2' := kx_2$ (переход к безразмерным переменным [7]), и, опуская штрих и сохраняя прежние обозначения для переменной, неизвестной функции, области и правой части, получим

$$\operatorname{grad} A(\operatorname{div} u) + Au = f,\ x \in \Omega, \tag{5}$$

$$Au = \int_\Omega \frac{e^{i|x-y|}}{|x-y|} u(y)\,dy. \tag{6}$$

Все результаты о разрешимости уравнения (5), (6), очевидно, будут справедливы и для уравнения (3), (4).

2. Пространства $W(\mathbf{R}^2)$ и $W(\overline{\Omega})$

Определим скалярное произведение и норму в пространстве Соболева $H^s(\mathbf{R}^2)$ обычным образом [11]:

$$(u, v)_s = \int \langle\xi\rangle^{2s} \hat{u}(\xi)\,\overline{\hat{v}(\xi)}\,d\xi,$$

$$\|u\|_s^2 = (u, u)_s;\ \langle\xi\rangle := \left(1 + \xi^2\right)^{1/2},\ \xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

Через $\hat{u}$ обозначено преобразование Фурье распределения u. Здесь и всюду ниже, где не указана область интегрирования, подразумевается интеграл по $\mathbf{R}^2$. В дальнейшем нас будут интересовать главным образом пространства вектор-функций, поэтому через u, v будем обозначать векторы $u=(u_1,u_2)^T$, $v=(v_1,v_2)^T$ и т.д. При этом в записи $u\in H^s$ символ H^s уже понимается как декартово произведение двух экземпляров пространства H^s со скалярным произведением и нормой:

$$(u,\ v)_s=(u_1,\ v_1)_s+(u_2,\ v_2)_s=\int\langle\xi\rangle^{2s}\hat{u}(\xi)\cdot\overline{\hat{v}(\xi)}\,d\xi,$$

$$\|u\|_s^2=\|u_1\|_s^2+\|u_2\|_s^2=\int\langle\xi\rangle^{2s}\,|\,\hat{u}(\xi)\,|^2\,d\xi.$$

Сохраним те же обозначения для пространств в векторном случае, так как во всех ситуациях из контекста ясно, о каком пространстве идет речь.

Положим для любого $s\in\mathrm{R}$ [11]:

$$H^s(\Omega):=\left\{\left.u\right|_\Omega : u\in H^s\left(\mathbf{R}^2\right)\right\};\ \tilde{H}^s\left(\overline{\Omega}\right):=\left\{u\in H^s\left(\mathbf{R}^2\right):\operatorname{supp}u\subset\overline{\Omega}\right\}.$$

Пространство $\tilde{H}^s(\Omega)$ может быть получено замыканием $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_s$.

Определим гильбертово пространство $W\left(\mathbf{R}^2\right)$ как пополнение $C_0^\infty\left(\mathbf{R}^2\right)$ (гладких функций с компактным носителем) по норме $\|\cdot\|_W$

$$\|u\|_W^2=\int\langle\xi\rangle^{-1}\,|\,\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi+\int\langle\xi\rangle^{-1}\,|\,\xi\cdot\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi$$

со скалярным произведением

$$(u,v)_W=\int\langle\xi\rangle^{-1}\hat{u}(\xi)\cdot\overline{\hat{v}(\xi)}\,d\xi+\int\langle\xi\rangle^{-1}(\xi\cdot\hat{u}(\xi))(\xi\cdot\overline{\hat{v}(\xi)})\,d\xi.$$

Далее, следуя [3, 4], определим гильбертово пространство $W\left(\overline{\Omega}\right)$ как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по той же норме $\|\cdot\|_W$.

Следующие предложения описывают свойства пространств $W\left(\mathbf{R}^2\right)$ и $W\left(\overline{\Omega}\right)$ [3–7].

Утверждение 1:

$$W(\mathbf{R}^2)=\left\{u\in H^{-1/2}\left(\mathbf{R}^2\right):\operatorname{div}u\in H^{-1/2}\left(\mathbf{R}^2\right)\right\}.$$

Утверждение 2:

$$W(\overline{\Omega})=\left\{u\in\tilde{H}^{-1/2}\left(\overline{\Omega}\right):\operatorname{div}u\in\tilde{H}^{-1/2}\left(\overline{\Omega}\right)\right\}.$$

Утверждение 3. Имеют место непрерывные вложения:

$$\tilde{H}^{1/2}\left(\bar{\Omega}\right) \subset W(\bar{\Omega}) \subset \tilde{H}^{-1/2}\left(\bar{\Omega}\right),$$

и оценки норм

$$\|u\|_{-1/2} \le \|u\|_W \le C_0 \|u\|_{1/2}. \tag{7}$$

Пусть $\xi' := (\xi_2, -\xi_1)$. Определим пространства $W_1\left(\mathbf{R^2}\right)$ и $W_2\left(\mathbf{R^2}\right)$ как подпространства $W\left(\mathbf{R^2}\right)$ с условиями:

$$W_1\left(\mathbf{R^2}\right) := \left\{u \in W\left(\mathbf{R^2}\right) : \xi \cdot \hat{u}(\xi) = 0\right\},$$

$$W_2\left(\mathbf{R^2}\right) := \left\{u \in W\left(\mathbf{R^2}\right) : \xi' \cdot \hat{u}(\xi) = 0\right\}.$$

В формулах выше равенства нулю можно понимать как равенство функций из $L_2\left(\mathbf{R^2}\right)$ с весом $\langle\xi\rangle^{-1}$, т.е. с точностью до эквивалентных функций.

Утверждение 4. Пространство $W\left(\mathbf{R^2}\right)$ разлагается в прямую сумму (замкнутых) ортогональных подпространств:

$$W(\mathbf{R^2}) = W_1(\mathbf{R^2}) \oplus W_2(\mathbf{R^2}).$$

Доказательство. Пусть $u = g + h$, $g \in W_1\left(\mathbf{R^2}\right)$, $h \in W_2\left(\mathbf{R^2}\right)$. Тогда $\hat{u} = \hat{g} + \hat{h}$, $\xi \cdot \hat{g} = 0$, $\xi' \cdot \hat{h} = 0$. Эта система уравнений имеет единственное решение $\hat{g} = \xi' |\xi|^{-2} (\xi' \cdot \hat{u})$, $\hat{h} = \xi |\xi|^{-2} (\xi \cdot \hat{u})$. Функции g и h находятся с помощью обратного преобразования Фурье. Нетрудно видеть, что функции g и h ортогональны и принадлежат $W\left(\mathbf{R^2}\right)$, так как $|\hat{g}| \le |\hat{u}|$, $|\hat{h}| \le |\hat{u}|$.

Утверждение 5. $W\left(\bar{\Omega}\right)$ есть замкнутое подпространство пространства $W\left(\mathbf{R^2}\right)$, $W\left(\bar{\Omega}\right) \subset W\left(\mathbf{R^2}\right)$.

3. Разрешимость интегрального уравнения электрического поля

Умножим уравнение (5) на произвольный элемент $\bar{v} \in C_0^{\infty}(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω, получим вариационное соотношение

$$-\left(A\left(\operatorname{div} u\right), \operatorname{div} v\right)_W + \left(Au, v\right)_W = \left(f, v\right)_{L_2(\Omega)}. \tag{8}$$

Определение 1. Элемент $u \in W(\bar{\Omega})$ будем называть (обобщенным) решением уравнения (5), если для любых $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$ выполняется вариационное соотношение (8).

Исследуем уравнение (5) в пространстве $W(\overline{\Omega})$, $u \in W(\overline{\Omega})$, $f \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Сначала определим оператор A на $C_0^{\infty}(\Omega)$.

Будем рассматривать также оператор A, определяемый формулой (6), как псевдодифференциальный оператор (ПДО) [3–7]:

$$Au = \int a(\xi)\hat{u}(\xi)\mathrm{e}^{ix\cdot\xi}\, d\xi, \ x \in \Omega, \tag{9}$$

с символом

$$a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}}. \tag{10}$$

Везде, где не указаны пределы интегрирования, понимаются интегралы по $\mathbf{R}^2$. В выражении (10) выбирается та ветвь квадратного корня, для которой

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = \frac{\sqrt{\left|\xi^2 - 1\right| + \mathrm{Re}\left(\xi^2 - 1\right)} + i\sqrt{\left|\xi^2 - 1\right| - \mathrm{Re}\left(\xi^2 - 1\right)}}{\sqrt{2}\left|\xi^2 - 1\right|}. \tag{11}$$

Представим символ ПДО (9) в другом виде:

$$a'(\xi) = \langle\xi\rangle^{-1} + b(\xi), \tag{12}$$

$$b(\xi) = \langle\xi\rangle^{-3} + g(\xi), \tag{13}$$

$$g(\xi) = F\left(\eta(|x|)\left(\frac{e^{i|x|}}{|x|} - \frac{e^{-|x|}}{|x|} - e^{-|x|}\right)\right), \tag{14}$$

где Fu – преобразование Фурье элемента u.

Для функции $g(\xi) \in C^{\infty}(\mathbf{R}^2)$ верна оценка [5, с. 63]:

$$|g(\xi)| \le C\langle\xi\rangle^{-7/2}. \tag{15}$$

Несмотря на то, что символы $a(\xi)$ и $a'(\xi)$ различны, они определяют один и тот же оператор A (на Ω). Мы будем использовать одно или другое представление по мере необходимости.

Рассмотрим полуторалинейную форму (мы поменяли знак левой части уравнения по сравнению с (8)):

$$t(u,v) := -\int a(\xi)\hat{u}(\xi)\cdot\overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi + \int a(\xi)(\xi\cdot\hat{u}(\xi))(\xi\cdot\overline{\hat{v}(\xi)})\, d\xi, \tag{16}$$

с символом $a(\xi)$, определенным формулой (10).

Вариационное соотношение (8) можно записать в виде

$$t(u,v) = -(f,v)_{L_2(\Omega)}, \ \forall v \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Далее, $t(u,v)$ на $W(\bar{\Omega})$ есть ограниченная полуторалинейная форма $t(u,v)$ на (комплексном) пространстве $W(\bar{\Omega}) : |t(u,v)| \le C\|u\|_W \|v\|_W$. Тогда она однозначно определяет линейный ограниченный оператор $T : W(\bar{\Omega}) \to W(\bar{\Omega})$ по формуле [12]:

$$t(u,v) = (Tu,v)_W, \forall u \in W(\bar{\Omega}). \tag{17}$$

Ограниченность формы достаточно проверять на $C_0^\infty(\Omega)$, поскольку $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в W. Саму форму также достаточно определять только на $C_0^\infty(\Omega)$. Очевидно, что полуторалинейная форма $(u,v)_W$ порождает единичный оператор $I : W(\bar{\Omega}) \to W(\bar{\Omega})$.

Утверждение 6. Оператор $T : W(\bar{\Omega}) \to W(\bar{\Omega})$ является инъективным.

Доказательство следует из теоремы о единственности решения соответствующей краевой задачи [5, 6].

Наша цель теперь – доказать фредгольмовость оператора $T : W(\bar{\Omega}) \to W(\bar{\Omega})$, представив его в виде суммы непрерывно обратимого и компактного операторов.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$t'(u,v) := -\int a'(\xi)\hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi + \int a'(\xi)(\xi \cdot \hat{u}(\xi))(\xi \cdot \overline{\hat{v}(\xi)})\, d\xi \tag{18}$$

с символом $a'(\xi)$, определенным формулами (12)–(14). Представим эту форму в виде суммы двух форм:

$$t'(u,v) = t_0(u,v) + t_c(u,v), \tag{19}$$

где

$$t_0(u,v) := -\int \langle\xi\rangle^{-1}\hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi + \int (1+i)\langle\xi\rangle^{-3}\hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi +$$

$$+\int \left(\langle\xi\rangle^{-1} + \langle\xi\rangle^{-3}\right)(\xi \cdot \hat{u}(\xi))(\xi \cdot \overline{\hat{v}(\xi)})\, d\xi,$$

$$t_c(u,v) := -\int b(\xi)\hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi -$$

$$-\int (1+i)\langle\xi\rangle^{-3}\hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi + \int g(\xi)(\xi \cdot \hat{u}(\xi))(\xi \cdot \overline{\hat{v}(\xi)})\, d\xi.$$

Здесь в первой форме собраны главные части символов и добавлена для удобства форма, определяемая вторым слагаемым. Во второй форме – остальные слагаемые.

Утверждение 7. Оператор $T_c : W(\bar{\Omega}) \to W(\bar{\Omega})$, порождаемый формой $t_c(u,v)$, является ограниченным и компактным.

Доказательство. Из оценок (13) и (15) получаем, что

$$|t_c(u,v)| = \left|(T_c u,v)_W\right| \le C\|u\|_{-1}\|v\|_{-1/2}.$$

Полагая в этой оценке $v = T_c u$, находим, что (см. (7)):

$$\|T_c u\|_W^2 \le C\|u\|_{-1}\|T_c u\|_{-1/2} \le C\|u\|_{-1}\|T_c u\|_W ,$$

откуда имеем

$$\|T_c u\|_W \le C\|u\|_{-1} .$$

Пусть $u_n \to u$, $n \to \infty$ слабо в $W(\bar{\Omega})$. В силу непрерывности вложения $W\left(\bar{\Omega}\right) \subset \tilde{H}^{-1/2}\left(\bar{\Omega}\right)$ (утверждение 3) и компактности вложения $\tilde{H}^{-1/2}\left(\bar{\Omega}\right) \subset \tilde{H}^{-1}\left(\bar{\Omega}\right)$ (см. [11]) имеем $u_n \to u$, $n \to \infty$ сильно в $\tilde{H}^{-1}\left(\bar{\Omega}\right)$, и, из последней оценки заключаем, что $T_c u_n \to T_c u$, $n \to \infty$ сильно в $W(\bar{\Omega})$, поэтому оператор $T_c : W\left(\bar{\Omega}\right) \to W\left(\bar{\Omega}\right)$ компактен. □

Рассмотрим форму $t_0(u,v)$. Сначала будем ее рассматривать на более широком пространстве $W(\mathbf{R^2})$. Легко видеть, что $t_0(u,v)$ определена на $W(\mathbf{R^2})$ и является ограниченной полуторалинейной формой на (комплексном) пространстве $W(\mathbf{R^2})$: $|t_0(u,v)| \le C\|u\|_W \|v\|_W$. Тогда она однозначно определяет линейный ограниченный оператор $T_r : W(\mathbf{R^2}) \to W(\mathbf{R^2})$ по формуле [12]:

$$t_0(u,v) = (T_r u, v)_W , \forall u \in W(\mathbf{R^2}). \tag{20}$$

Ограниченность формы достаточно проверять на $C_0^\infty(\mathbf{R^2})$, поскольку $C_0^\infty(\mathbf{R^2})$ плотно в $W(\mathbf{R^2})$. Саму форму также достаточно определять только на $C_0^\infty(\mathbf{R^2})$. Очевидно, что полуторалинейная форма $(u,v)_W$ порождает единичный оператор $I : W(\mathbf{R^2}) \to W(\mathbf{R^2})$.

Пусть $u \in W_1\left(\mathbf{R^2}\right)$, $v \in W_2\left(\mathbf{R^2}\right)$. Тогда имеем $(T_r u, v)_W = t(u,v) = 0$, поэтому $T_r u \perp W_2(\mathbf{R^2})$ и $T_r u \in W_1(\mathbf{R^2})$ в силу утверждения 4. Таким образом, $W_1(\mathbf{R^2})$ является инвариантным подпространством для оператора T_r . Перестановка индексов $1 \leftrightarrow 2$ доказывает, что $W_2(\mathbf{R^2})$ также является инвариантным подпространством для T_r . Получаем разложение

$$T_r = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} W_1(\mathbf{R^2}) \\ W_2(\mathbf{R^2}) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} W_1(\mathbf{R^2}) \\ W_2(\mathbf{R^2}) \end{pmatrix} \tag{21}$$

с операторами $T_j : W_j(\mathbf{R^2}) \to W_j(\mathbf{R^2})$, $j = 1,2$, порождаемыми сужением формы $t_0(u,v)$ на $W_j(\mathbf{R^2})$:

$$(T_1u,v)_{W_1}=t_1(u,v)=\int\left(-\langle\xi\rangle^{-1}+(1+i)\langle\xi\rangle^{-3}\right)\hat{u}(\xi)\cdot\overline{\hat{v}(\xi)}\,d\xi,\ \forall v\in W_1(\mathbf{R}^2),$$

$$(T_2u,v)_{W_2}=t_2(u,v)=\int\left(\xi^2\left(\langle\xi\rangle^{-1}+\langle\xi\rangle^{-3}\right)-\langle\xi\rangle^{-1}+\right.$$

$$\left.+(1+i)\langle\xi\rangle^{-3}\right)\hat{u}(\xi)\cdot\overline{\hat{v}(\xi)}\,d\xi,\ \forall v\in W_2(\mathbf{R}^2),$$

или, после преобразования,

$$t_1(u,v)=\int\left(-\xi^2+i\right)\langle\xi\rangle^{-3}\,\hat{u}(\xi)\cdot\overline{\hat{v}(\xi)}\,d\xi,\ \forall v\in W_1(\mathbf{R}^2),$$

$$t_2(u,v)=\int\left(\xi^2\langle\xi\rangle^{-1}+i\langle\xi\rangle^{-3}\right)\hat{u}(\xi)\cdot\overline{\hat{v}(\xi)}\,d\xi,\ \forall v\in W_2(\mathbf{R}^2).$$

Здесь мы воспользовались тождеством

$$\xi^2\left(\hat{u}(\xi)\cdot\overline{\hat{v}(\xi)}\right)=\left(\xi\cdot\hat{u}(\xi)\right)\left(\xi\cdot\overline{\hat{v}(\xi)}\right)+\left(\xi'\cdot\hat{u}(\xi)\right)\left(\xi'\cdot\overline{\hat{v}(\xi)}\right).$$

Рассмотрим квадратичную форму $(T_1u,u)_{W_1}=t_1(u,u),u\in W_1(\mathbf{R}^2)$. Имеем

$$t_1(u,u)=\int\left(-\xi^2+i\right)\langle\xi\rangle^{-3}\left|\hat{u}(\xi)\right|^2\,d\xi,$$

тогда

$$\left|t_1(u,u)\right|^2=\left(\int\xi^2\langle\xi\rangle^{-3}\left|\hat{u}(\xi)\right|^2d\xi\right)^2+\left(\int\langle\xi\rangle^{-3}\left|\hat{u}(\xi)\right|^2d\xi\right)^2\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\left(\int\xi^2\langle\xi\rangle^{-3}\left|\hat{u}(\xi)\right|^2d\xi+\int\langle\xi\rangle^{-3}\left|\hat{u}(\xi)\right|^2d\xi\right)^2=\frac{1}{2}\left(\int\langle\xi\rangle^{-1}\left|\hat{u}(\xi)\right|^2d\xi\right)^2\geq\frac{1}{2}\|u\|_W^4.$$

Таким образом, $\left|t_1(u,u)\right|\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\|u\|_W^2$, $u\in W_1(\mathbf{R}^2)$, поэтому оператор $T_1:W_1(\mathbf{R}^2)\to W_1(\mathbf{R}^2)$ является коэрцитивным [9] и, следовательно, непрерывно обратимым.

Далее рассмотрим квадратичную форму $(T_2u,u)_{W_2}=t_2(u,u)$, $u\in W_2(\mathbf{R}^2)$. Имеем $t_2(u,u)=\int\left(\xi^2\langle\xi\rangle^{-1}+i\langle\xi\rangle^{-3}\right)\left|\hat{u}(\xi)\right|^2d\xi$.

Тогда

$$\left|t_2(u,u)\right|^2=\left(\int\xi^2\langle\xi\rangle^{-1}\left|\hat{u}(\xi)\right|^2d\xi\right)^2+\left(\int\langle\xi\rangle^{-3}\left|\hat{u}(\xi)\right|^2d\xi\right)^2\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\left(\int\xi^2\langle\xi\rangle^{-1}\left|\hat{u}(\xi)\right|^2d\xi+\int\langle\xi\rangle^{-3}\left|\hat{u}(\xi)\right|^2d\xi\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int\left(\xi^2+\langle\xi\rangle^{-2}\right)\langle\xi\rangle^{-1}\left|\hat{u}(\xi)\right|^2d\xi\right)^2=\frac{1}{8}\left(\int\langle\xi\rangle\left|\hat{u}(\xi)\right|^2d\xi\right)^2>\frac{1}{8}\|u\|_W^4.$$

Таким образом, $\left|t_2(u,u)\right| \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}\|u\|_W^2$, $u \in W_2(\mathbf{R}^2)$, поэтому оператор $T_2 : W_2(\mathbf{R}^2) \to W_2(\mathbf{R}^2)$ является коэрцитивным [9] и, следовательно, непрерывно обратимым.

Объединяя полученные результаты и учитывая разложение (21), получаем

Утверждение 8. Оператор $T_r : W(\mathbf{R}^2) \to W(\mathbf{R}^2)$, порождаемый формой $t_0(u,v)$, является непрерывно обратимым.

Из утверждения 8 следует [13, с. 121] оценка

$$\|T_r u\|_W \geq m\|u\|_W, \; m > 0, \tag{22}$$

для некоторого m.

Вернемся к рассмотрению оператора $T_0 : W(\bar{\Omega}) \to W(\bar{\Omega})$, порождаемого той же формой $t_0(u,v)$, но на пространстве $W(\bar{\Omega})$. Поскольку $W(\bar{\Omega})$ есть (замкнутое) подпространство $W(\mathbf{R}^2)$, из утверждения 8 следует

Лемма 1. Для оператора $T_0 : W(\bar{\Omega}) \to W(\bar{\Omega})$, порождаемого формой $t_0(u,v)$, верна оценка

$$\|T_0 u\|_W \geq m\|u\|_W, \; m > 0, \tag{23}$$

для некоторого m.

Далее докажем следующий результат.

Лемма 2. Оператор $T_0 : W(\bar{\Omega}) \to W(\bar{\Omega})$ является инъективным.

Доказательство. Вычисляя мнимую часть квадратичной формы $t_0(u,u)$, имеем

$$\operatorname{Im} t_0(u,u) = \int \langle \xi \rangle^{-3} \left|\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi > 0$$

при $u \neq 0$ (как элемент пространства $W(\bar{\Omega})$). Поэтому уравнение $T_0 u = 0$ имеет только тривиальное решение в $W(\bar{\Omega})$.

Сопряженный к T_0 оператор $T_0^* : W(\bar{\Omega}) \to W(\bar{\Omega})$ определяется сопряженной формой

$$t_0^*(u,v) := -\int \langle \xi \rangle^{-1} \hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi + \int (1-i)\langle \xi \rangle^{-3} \hat{u}(\xi) \cdot \overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi +$$

$$+\int \left(\langle \xi \rangle^{-1} + \langle \xi \rangle^{-3} \right) (\xi \cdot \hat{u}(\xi)) (\xi \cdot \overline{\hat{v}(\xi)})\, d\xi,$$

для которой имеем

$$\left|\operatorname{Im} t_0(u,u)\right| = \int \langle \xi \rangle^{-3} \left|\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi > 0$$

при $u \neq 0$ (как элемент пространства $W(\bar{\Omega})$). Поэтому верна

Лемма 3. Ядро оператора $T_0^* : W(\bar{\Omega}) \to W(\bar{\Omega})$ состоит только из нулевого элемента, $\ker T_0^* = \{0\}$.

Теперь все готово, чтобы доказать основной результат статьи.

Теорема 1. Оператор $T : W(\bar{\Omega}) \to W(\bar{\Omega})$ является непрерывно обратимым.

Доказательство. Из леммы 1 (оценки (23)) следует [13, с. 210], что область значений оператора $T_0 : W(\bar{\Omega}) \to W(\bar{\Omega})$ замкнута. Тогда, по теореме Хаусдорфа [13, с. 205], оператор T_0 нормально разрешим. По лемме 3 получаем [13, с. 205], что уравнение $T_0 u = f$, $u \in W(\bar{\Omega})$, однозначно разрешимо для любой правой части $f \in W(\bar{\Omega})$. Таким образом, доказано, что оператор $T_0 : W(\bar{\Omega}) \to W(\bar{\Omega})$ непрерывно обратим.

Тогда оператор $T : W(\bar{\Omega}) \to W(\bar{\Omega})$ является суммой непрерывно обратимого оператора T_0 и компактного оператора T_c (утверждение 7), $T = T_0 + T_c$. Значит, оператор T фредгольмов (с нулевым индексом) [13, с. 206]. Тогда из инъективности оператора T (утверждение 6) и альтернативы Фредгольма [13, с. 206] получаем, что оператор $T : W(\bar{\Omega}) \to W(\bar{\Omega})$ непрерывно обратим.

В силу теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Следствие 1. Обобщенное решение $u \in W(\bar{\Omega})$ уравнения (5) (и (3)) существует и единственно при любой правой части $f \in C^\infty\left(\bar{\Omega}\right)$.

Заключение

Доказана непрерывная обратимость оператора уравнения электрического поля в случае плоского экрана и непоглощающих сред, т.е. при условии $\operatorname{Im} k = 0$. Применен метод квадратичных форм. В отличие от [5, 6], разложение пространства $W(\bar{\Omega})$ на подпространства не использовалось.

Список литературы

1. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М. : Мир, 1964. 428 с.
2. Maue A. W. Toward Formulator of a General Diffraction Problem via an Integral Equation // Zeitschrift fur Physik. 1949. Vol. 12. P. 601–618.
3. Смирнов Ю. Г. О фредгольмовости задачи дифракции на плоском ограниченном идеально проводящем экране // Доклады Академии наук СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 147–149.
4. Смирнов Ю. Г. О фредгольмовости системы псевдодифференциальных уравнений в задаче дифракции на ограниченном экране // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28, № 1. С. 136–143.
5. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М. : ИПРЖР, 1996. 176 с.
6. Ilyinsky A. S., Smirnov Yu. G. Electromagnetic Wave Diffraction by Conducting Screens. VSP, Utrecht, the Netherlands, 1998. 114 p.
7. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза : Инф.-изд. центр ПГУ, 2009. 266 с.
8. Costabel M. Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains: Elementary Results // SIAM Journal of Mathematical Analysis. 1988. Vol. 19, № 3. P. 613–626.

9. Kress R. Linear Integral Equations // Applied Mathematical sciences. New York : Springer-Verlag, 1989. Vol. 82. 300 p.
10. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М. : Наука, 1971. 352 с.
11. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М. : Мир, 1980. 664 с.
12. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М. : Мир, 1972. 740 с.
13. Треногин В. А. Функциональный анализ. М. : Наука, 1993. 439 с.

References

1. Khenl Kh., Maue A., Vestpfal' K. *Teoriya difraktsii = Diffraction theory*. Moscow: Mir, 1964:428. (In Russ.)
2. Maue A.W. Toward Formulator of a General Diffraction Problem via an Integral Equation. *Zeitschrift fur Physik*. 1949;12:601–618.
3. Smirnov Yu.G. On the Fredholm property of the diffraction problem on a flat bounded ideally conducting screen. *Doklady Akademii nauk SSSR = Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1991;319(1):147–149. (In Russ.)
4. Smirnov Yu.G. On the Fredholm property of a system of pseudodifferential equations in the problem of diffraction on a limited screen. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations.* 1992;28(1):136–143. (In Russ.)
5. Il'inskiy A.S., Smirnov Yu.G. *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na provodyashchikh tonkikh ekranakh = Diffraction of electromagnetic waves on conductive thin screens*. Moscow: IPRZhR, 1996:176. (In Russ.)
6. Ilyinsky A.S., Smirnov Yu.G. *Electromagnetic Wave Diffraction by Conducting Screens*. VSP, Utrecht, the Netherlands, 1998:114.
7. Smirnov Yu.G. *Matematicheskie metody issledovaniya zadach elektrodinamiki = Mathematical methods for studying electrodynamics problems*. Penza: Inf.-izd. tsentr PGU, 2009:266. (In Russ.)
8. Costabel M. Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains: Elementary Results. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*. 1988;19;(3):613–626.
9. Kress R. Linear Integral Equations. *Applied Mathematical sciences*. New York: Springer-Verlag, 1989;82:300.
10. Gokhberg I.Ts., Fel'dman I.A. *Uravneniya v svertkakh i proektsionnye metody ikh resheniya = Convolution equations and projection methods for solving them*. Moscow: Nauka, 1971:352. (In Russ.)
11. Tribel' Kh. *Teoriya interpolyatsii, funktsional'nye prostranstva, differentsial'nye operatory = Interpolation theory, function spaces, differential operators*. Moscow: Mir, 1980:664. (In Russ.)
12. Kato T. *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov = Perturbation theory of linear operators*. Moscow: Mir, 1972:740. (In Russ.)
13. Trenogin V.A. *Funktsional'nyy analiz = Functional analysis*. Moscow: Nauka, 1993:439. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Юрий Геннадьевич Смирнов
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Yuriy G. Smirnov
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 07.12.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 15.01.2024

Принята к публикации / Accepted 12.02.2024