



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. I. Matov, The topological classification of germs of the maximum and minimax functions of a family of functions in general position, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1982, Volume 37, Issue 4, 167–168

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.88

January 22, 2025, 14:14:09



ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ РОСТКОВ ФУНКЦИЙ МАКСИМУМА И МИНИМАКСА СЕМЕЙСТВ ФУНКЦИЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

В. И. М а т о в

0. Каждой непрерывной действительной функции f , определенной на пространстве локально тривиального расслоения $p_1: X \rightarrow Y$ с компактным слоем, можно сопоставить непрерывную функцию, заданную на базе: точке y базы ставится в соответствие максимальное значение функции f на слое $p_1^{-1}(y)$. Полученная функция называется функцией максимума функции f . Если база Y в свою очередь является пространством локально тривиального расслоения с компактным слоем $p_2: Y \rightarrow Z$, то, взяв функцию минимума функции максимума, получим функцию минимакса. В настоящей заметке доказывается, что любой росток как функции максимума, так и функции минимакса гладкой функции общего положения топологически эквивалентен ростку морсовской функции.

1. **Определения.** Пусть $\dim X = n$, $\dim Y = k$, $\dim Z = m$. Гладкая функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *семейством функций* от n_1 переменных с k параметрами, где $n_1 = n - k$. Пусть M и N — гладкие многообразия. Росток отображения $H: M \rightarrow N$ в точке $x \in M$ будем обозначать $H: (M, x) \rightarrow (N, H(x))$ или $[H]_x$. Ростки функций $F: (M, x) \rightarrow (\mathbb{R}, F(x))$ и $G: (N, y) \rightarrow (\mathbb{R}, G(y))$ топологически эквивалентны, если существует росток гомеоморфизма $H: (M, x) \rightarrow (N, y)$ такой, что $F = G \circ H$. Функцию $M \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *C-морсовской*, если ее росток в любой точке $x \in M$ топологически эквивалентен либо ростку линейной функции, либо ростку морсовской функции в особой точке (в этом случае точку x будем называть *C-особой*, а ее индексом — индекс соответствующей квадратичной формы). *Прямой суммой* ростков $F: (M, x) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $G: (N, y) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ будем называть росток $F \oplus G: (M \times N, (x, y)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, где $(F \oplus G)(u, v) = F(u) + G(v)$. Функцию максимума и функцию минимакса семейства f обозначим через $\max(f)$ и $\min\max(f)$ соответственно. Через $\mathfrak{m}(p)$ обозначим пространство гладких ростков $(\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$.

2. **Теорема 1.** *Функция максимума семейства общего положения является C-морсовской.*

Это утверждение было сформулировано в качестве гипотезы А. М. Вершиком при обсуждении работы [2], в которой оно проверено для $k \leq 6$; доводы в пользу общей гипотезы приведены В. И. Арнольдом в [4].

Теорема 2. *Функция минимакса семейства общего положения является C-морсовской.*

Теорема 3. *Индекс $v(y)$ C-особой точки y функции $\max(f)$ семейства f общего положения удовлетворяет неравенству $v(y) \leq k - s(y) + 1$, где $s(y)$ — число различных точек слоя $p_1^{-1}(y)$, в которых f достигает значения $\max(f)(y)$.*

Теорема 4. *Индекс $\eta(z)$ C-особой точки z функции $\min\max(f)$ семейства f общего положения удовлетворяет неравенствам $l(z) - 1 \leq \eta(z) \leq m + l(z) - (\max(1, s_1(z) - k_1) + \dots + \max(1, s_l(z) - k_l))$, где $k_1 = k - m$, $l(z)$ — число различных точек (пусть это — точки $y^1, \dots, y^l(z)$) слоя $p_2^{-1}(z)$, в которых $\max(f)$ достигает значения $\min\max(f)(z)$, $s_i(z)$ — число различных точек слоя $p_1^{-1}(y^i)$, в которых f достигает этого значения.*

3. **Схема доказательства теорем 1 и 3.** Пусть f — семейство общего положения, $y \in Y$, $\max(f)(y) = 0$. Пусть $X(s)$ — прообраз диагонали при субмерсии $p_1^s: X^s \rightarrow Y^s$, где $(\cdot)^s$ — s -кратное прямое произведение. Обозначим через $r(y)$ ранг композиции вложения $X(s) \hookrightarrow X^s$ и отображения $f^s: X^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ в мультиточке (x^1, \dots, x^s) , где $s = s(y)$ и $f(x^i) = \max(f)(y)$, $p_1(x^i) = y$.

Лемма. *Для семейства f общего положения для каждой точки $y \in Y$, за исключением множества $Y(f)$ размерности 0, $r(y) = s(y)$. Если $y \in Y(f)$, то $r(y) = s(y) - 1$ и точки x^i ($i = 1, \dots, s(y)$) являются морсовскими точками функции $f|_{p_1^{-1}(y)}$.*

Вводя в окрестности точек x^i подходящие системы координат, получим, что росток $[\max(f)]_y$ топологически эквивалентен ростку $[F]_0$ функции $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, где $F(v) = \max\{\max\{f_i(u, v) \mid u \in \mathbb{R}^{n_1}, \|u\| \leq \varepsilon\} \mid i = 1, \dots, s\}$, $\varepsilon > 0$ и $0 \in \mathbb{R}^{n_1}$ — точка

максимума гладкой функции $f_i | \mathbb{R}^{n_1} \times \{0\}$. В случае $r(y) = s - 1$ из теоремы о неявной функции следует, что $[F]_0 = \max(\varphi_1, \dots, \varphi_s)$, где $\varphi_i \in \mathfrak{m}(k)$.

Л е м м а. Если отображение $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^s$ с компонентами f_1, \dots, f_s имеет в нуле ранг s , то росток $[F]_0$ топологически эквивалентен ростку линейной функции.

Л е м м а. Если f — семейство общего положения и росток $(\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^s, 0)$ с компонентами $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ имеет в нуле ранг $s - 1$, то росток $[F]_0$ топологически эквивалентен прямой сумме роста $\max(\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, где $\gamma_i \in \mathfrak{m}(s - 1)$, и роста невырожденной квадратичной формы из $\mathfrak{m}(k - s + 1)$. При этом набор ростков $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ удовлетворяет условиям следующей леммы.

Л е м м а. Если любые p из q векторов $\text{grad } \gamma_i(0)$ ($i = 1, \dots, q; q > p$), где $\gamma_i \in \mathfrak{m}(p)$, линейно независимы, то росток $\max(\gamma_1, \dots, \gamma_q)$ топологически эквивалентен либо росту y_1 , либо росту $y_1^2 + \dots + y_p^2$, где y_1, \dots, y_p — координаты в \mathbb{R}^p .

4. Схема доказательств теорем 2 и 4. Пусть f — семейство общего положения, $z \in Z$, $\min \max(f)(z) = 0$. Пусть для $i = 1, \dots, l; j = 1, \dots, s_i$, где $l = l(z)$, $s_i = s_i(z)$, точки x^{ij} таковы, что $x^{ij} \in p_i^{-1}(y^i)$ и $f(x^{ij}) = \min \max(f)(z)$. Обозначим через $r_i(z)$ ранг сужения композиции вложения $X(s_i) \hookrightarrow X^{s_i}$ и $f^{s_i}: X^{s_i} \rightarrow \mathbb{R}^{s_i}$ на прообраз слоя $p_i^{-1}(z)$ при отображении $X(s_i) \rightarrow Y$ в мультиточке $(x^{i1}, \dots, x^{is_i})$. Пусть $X(s_1, \dots, s_l)$ — прообраз диагонали при сквозном отображении $X(s_1) \times \dots \times X(s_l) \rightarrow Y^l \rightarrow Z^l$. Обозначим через $r(z)$ ранг композиции вложения $X(s_1, \dots, s_l) \hookrightarrow X^s$ и отображения $f^s: X^s \rightarrow \mathbb{R}^s$, где $s = s_1 + \dots + s_l$, в мультиточке $(x^{11}, \dots, x^{ls_l})$.

Л е м м а. Для семейства f общего положения для каждой точки $z \in Z$, за исключением множества $Z(f)$ размерности 0, $r(z) = s(z)$. Если $z \in Z(f)$, то $r(z) = s(z) - 1$, $r_i(z) = \min(s_i(z) - 1, k - m)$ и точки x^{ij} ($j = 1, \dots, s_i(z)$) являются морсовскими точками функций $f | p_i^{-1}(y^i)$ ($i = 1, \dots, l(z)$).

Л е м м а. Для семейства f общего положения росток $[\min \max(f)]_z$ в случае $z \in Z \setminus Z(f)$ топологически эквивалентен росту линейной функции $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, а в случае $z \in Z(f)$ —

прямой сумме роста $\min(\alpha_1, \dots, \alpha_l) \bigoplus_{i=1}^l \max(\beta_1^i, \dots, \beta_{s_i}^i)$, где $l = l(z)$, $\alpha_j \in \mathfrak{m}(l - 1)$,

$\beta_j^i \in \mathfrak{m}(s_i - r_i - 1)$, и роста невырожденной квадратичной формы из $\mathfrak{m}(m + r_1 + \dots + r_l - s + 1)$. При этом наборы $\{\alpha_j\}$ и $\{\beta_1^i, \dots, \beta_{s_i}^i\}$ удовлетворяют условиям последней леммы п. 3.

5. При доказательстве последней леммы используется теорема 5.

Т е о р е м а 5. Пусть $g: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ — полуквазиоднородная функция степени d с показателями $(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)$ и квазиоднородной частью φ и $0 \in \mathbb{R}^p$ — точка локального минимума функций $g | \mathbb{R}^p \times \{0\}$, $\varphi | \mathbb{R}^p \times \{0\}$. Тогда при малых $\varepsilon > 0$ росток $\hat{g}: (\mathbb{R}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, где $\hat{g}(y) = \min\{g(x, y) \mid \|x\| \leq \varepsilon\}$, равен $\hat{\varphi} + \psi$, где $\hat{\varphi}(y) = \min\{\varphi(x, y) \mid \|x\| \leq \varepsilon\}$ — квазиоднородный росток степени d с показателями $(\beta_1, \dots, \beta_q)$, а на компактах $\psi(t^{\beta_1} y_1, \dots, t^{\beta_q} y_q)/t^q \rightrightarrows 0$ при $t \rightarrow +0$.

Автор глубоко благодарен В. И. Арнольду за постановку и полезные обсуждения задачи и А. Г. Кушвиренко за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] V. I. Arnol'd. On some problems in singularity theory.— *Geometry and Analysis*— Indian Academy of Sciences, Bangalore, 1980, p. 1—10.
 [2] Л. Н. Брызгалова. Особенности функций максимума.— Диссертация, М.: МГУ, 1978.