M. F. Prokhorova, Problems of homeomorphism arising in the theory of grid generation, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2008, Volume 14, Number 1, 112–129

https://www.mathnet.ru/eng/timm11

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 14, № 1 2008

УДК 515.126, 515.16, 519.6

ПРОБЛЕМЫ ГОМЕОМОРФИЗМА, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ТЕОРИИ ПОСТРОЕНИЯ СЕТОК

М. Ф. Прохорова

В данной работе доказываются некоторые общие критерии гомеоморфности для непрерывных отображений топологических пространств и топологических многообразий, а также критерии диффеоморфности для гладких отображений гладких многообразий.

Введение

При разработке алгоритмов построения сеток для численных расчетов в областях сложной конфигурации необходимо использовать (см., например, [1, 2]) различные критерии для определения того, является ли непрерывное отображение гомеоморфизмом или гладкое — диффеоморфизмом. Такие критерии для ограниченных областей в $\mathbb{R}^n$ были предложены в работах [3, 4]. К сожалению, некоторые теоремы в [3, 4] неверны, а доказательства некоторых других неполны (см. разд. 6).

В данной работе формулируются и доказываются некоторые общие критерии гомеоморфности для непрерывных отображений топологических пространств, топологических многообразий и триангулированных топологических многообразий, а также критерии диффеоморфности для гладких отображений гладких многообразий. Эта работа является продолжением работы [5].

Для удобства читателя, занимающегося численными методами, а не топологией, в статье приведены определения основных топологических понятий, фигурирующих в формулировках теорем. Более детально с ними можно ознакомиться, например, в [6, 7]. Также для удобства читателя в начале разд. 1 приведены доказательства некоторых элементарных топологических утверждений, активно используемых в следующих разделах. В разд. 1 описаны некоторые критерии для определения того, является ли непрерывное отображение из одного топологического пространства в другое погружением, вложением или гомеоморфизмом. В разд. 2 рассматриваются непрерывные отображения топологических многообразий. В разд. 3 — непрерывные отображения топологических многообразий с особенностью на клеточном подпространстве, а также непрерывные отображения топологических многообразий, снабженных клеточным разбиением. В разд. 4 рассматриваются непрерывные отображения триангулированных топологических многообразий и псевдомногообразий. В разд. 5 приводятся некоторые очевидные следствия результатов предыдущих разделов для гладких и кусочно-гладких отображений. В разд. 6 дается краткое сравнение результатов работы с работами [3, 4].

Автор благодарит П.Е.Пушкаря, Е.Г.Пыткеева и автора блога [14] за полезные советы, О.В.Ушакову — за привлечение внимания к данной тематике. Работа была закончена во время моего пребывания в Институте высших научных исследований — IHES (Франция); я благодарна этому институту за гостеприимство и замечательные рабочие условия.

1. Топологические пространства

Обозначения

- Пусть $A, A_1, \ldots, A_k$ — подпространства X, $B, B_1, \ldots, B_k$ — подпространства Y (подпространство — это подмножество, наделенное топологией, индуцированной с основного пространства). Будем обозначать

  $C(X, Y)$ — множество непрерывных отображений из X в Y,

  $C(X, A; Y, B)$ — множество $f \in C(X, Y)$ таких, что $f(A) \subset B$,

  $C(X, A_1, \ldots, A_k; Y, B_1, \ldots, B_k)$ — множество $f \in C(X, Y)$ таких, что $f(A_i) \subset B_i$ для всех $i = 1 \ldots k$.

- Для $f \in C(X, A; Y, B)$ будем обозначать $f|_{A \to B}$ отображение, получающееся из f сужением области определения до A и области значений — до B.

Заметим, что отображения $f = f|_{X \to Y}$, $f|_A = f|_{A \to Y}$ и $f|_{A \to B}$ различны и могут обладать разными свойствами. Например, отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задаваемое формулой $f(x) = \sin x$, не является открытым, а $f|_{\mathbb{R} \to [-1,1]}$ открыто.

Определение 1. Пусть X, Y — топологические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ будем называть

- вложением, если $f|_{X \to f(X)}$ — гомеоморфизм,
- погружением, если у любой точки $x \in X$ существует окрестность U такая, что $f|_{U \to f(U)}$ — гомеоморфизм,
- локальным гомеоморфизмом, если у любой точки $x \in X$ существует окрестность U такая, что $f(U)$ открыто в Y, и $f|_{U \to f(U)}$ — гомеоморфизм.

Замечания

1. Все вложения, погружения и локальные гомеоморфизмы непрерывны.
2. Как вложение, так и локальный гомеоморфизм являются погружениями.
3. Отображение является локальным гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда оно открытое погружение.

Далее везде X, Y — хаусдорфовы топологические пространства, удовлетворяющие второй аксиоме счетности.

Напомним, что непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *собственным*, если для любого компактного $K \subset Y$ его прообраз $f^{-1}(K)$ компактен. Для компактного X любое непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ является собственным.

Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ называется *накрытием*, если у любой точки $y \in Y$ существует окрестность V такая, что f гомеоморфно отображает каждую компоненту связности $f^{-1}(V)$ на V.

Лемма 1. *Пусть Y связно, $f\colon X \to Y$ — собственное отображение, являющееся локальным гомеоморфизмом. Тогда f — накрытие.*

Доказательство. Для любой точки $y \in \operatorname{Im} f$ существует окрестность $V \ni y$, $V \subset \operatorname{Im} f$, так как f — локальный гомеоморфизм. Следовательно, $\operatorname{Im} f$ открыт в Y. Если $\operatorname{Im} f \neq Y$, то выберем произвольную точку y на границе $\operatorname{Im} f$. Выберем $y_n \in \operatorname{Im} f$, $y_n \to y$, $x_n \in f^{-1}(y_n)$. Множество $\bigcup\{y_n\} \cup \{y\}$ компактно, следовательно, его прообраз K также компактен. Из последовательности $\{x_n\} \subset K$ можно выбрать сходящуюся в K подпоследовательность $\{x'_n\} \to x \in K$. Но $f(x) = \lim f(x'_n) = y$, значит, $y \in \operatorname{Im} f$. Следовательно, f сюръективно.

Возьмем произвольную точку $y \in Y$. Прообраз y дискретен (так как f — локальный гомеоморфизм) и компактен; следовательно, он конечен.

Пусть $f^{-1}(y) = \{x_i : i \in I\}$ (I конечно), U_i — непересекающиеся окрестности точек x_i, гомеоморфно проектирующиеся в открытые множества в Y, $V = \bigcap f(U_i)$.

Покажем, что существует окрестность $W \ni y$, прообраз которой содержится в $\bigcup U_i$. Если это не так, то найдутся $z_k \notin \bigcup U_i$, $k \in \mathbb{N}$, $f(z_k) \to y$. Множество $\bigcup\{f(z_k)\} \cup \{y\}$ компактно, поэтому его прообраз K также компактен. Из последовательности $\{z_k\} \subset K$ можно выбрать сходящуюся в K подпоследовательность $\{z'_k\} \to z \in K$. Но $f(z) = \lim f(z'_k) = y$, значит, $z = x_i$ для некоторого i, и z'_k начиная с некоторого $k = k_0$ лежат в U_i, что противоречит предположению.

Таким образом, существует окрестность $W \ni y$, прообраз которой является несвязным объединением областей $W_i = f^{-1}(W) \cap U_i$, и каждое из них гомеоморфно проектируется на W. Следовательно, f — накрытие.

Следующие две леммы являются очевидным следствием леммы 1 и элементарных свойств накрытий; для удобства читателя здесь будут приведены их полные доказательства.

Лемма 2. *Пусть $f\colon X \to Y$ — собственный локальный гомеоморфизм, Y связно, и существует точка $y_0 \in Y$ с одноточечным прообразом: $f^{-1}(y_0) = \{x_0\}$. Тогда f — гомеоморфизм.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : Y \to \mathbb{Z}_+$, $\varphi(y) = \operatorname{card} f^{-1}(y)$. Так как f — накрытие, φ локально постоянна. Но Y связно, так что φ глобально постоянна и тождественно равна $\varphi(y_0) = 1$. Значит, отображение $f\colon X \to Y$ биективно. По условию локальной гомеоморфности f — гомеоморфизм.

Лемма 3. *Пусть X линейно связно, Y связно и односвязно, $f\colon X \to Y$ — собственный локальный гомеоморфизм. Тогда f — гомеоморфизм.*

Доказательство. Предположим, что существуют две различные точки x_0, $x_1 \in X$ с совпадающими образами: $f(x_0) = f(x_1) = y$. Так как X линейно связно, существует непрерывная кривая $\gamma : [0,1] \to X$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. Так как Y односвязно, существует гомотопия $h_t : [0,1] \to Y$, $h_0 = f \circ \gamma$, $h_t(0) = h_t(1) = h_1(s) \equiv y$. По лемме 1, f — накрытие. Значит, гомотопия h_t поднимается до гомотопии $H_t : [0,1] \to X$ так, что $f \circ H_t = h_t$, $H_0 = \gamma$ [7]. Рассмотрим кривую $H_1(s)$, соединяющую точки x_0 и x_1. Ее проекция на Y — точка y. Однако это противоречит условию локальной гомеоморфности f в x_0 (в некоторой окрестности точки x_0 не должно быть точек, проектирующихся в y и отличных от x_0). Следовательно, f — инъекция. Так как Y связно, а f — накрытие, f сюръективно и, следовательно, является гомеоморфизмом.

Лемма 4. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное собственное инъективное отображение. Тогда f — вложение.*

Доказательство. Так как X удовлетворяет второй аксиоме счетности, достаточно доказать, что для $y_n, y \in \operatorname{Im} f$, $\{y_n\} \to y$, последовательность $x_n = f^{-1}(y_n)$ сходится к $x = f^{-1}(y)$. Множество $K = \bigcup\{y_n\} \cup \{y\}$ компактно, следовательно, $f^{-1}(K)$ также компактно, и последовательность $\{x_n\}$ имеет предельную точку в $f^{-1}(K)$. Если x' — предельная точка $\{x_n\}$ в X, то $f(x')$ — предельная точка $\{y_n\}$, и $x' = x$. Значит, $\lim x_n = x$, так что $f^{-1}\colon \operatorname{Im} f \to X$ непрерывно.

Напомним, что хаусдорфово топологическое пространство X называется *регулярным*, если для любой точки $x \in X$ и ее окрестности U существует окрестность $V \ni x$, замыкание которой содержится в U.

Лемма 5. *Пусть X — регулярное топологическое пространство, $X' \subset X$ открыто, $f\colon X \to Y$ — непрерывное собственное отображение, $f' = f|_{X'}$ — локальная инъекция (т.е. у любой точки X' существует такая ее окрестность U в X', что ограничение f' на U является инъекцией). Тогда f' является погружением.*

Доказательство. Пусть $x \in X'$, $U \subset X'$ — окрестность x, $f'|_U$ — инъекция. Пусть W — окрестность точки x, замыкание $\overline{W}$ которой содержится в U. Для любого компакта $K \subset f(W)$ прообраз $\left(f|_W\right)^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cap W = f^{-1}(K) \cap \overline{W}$ компактен, так что $f|_{W \to f(W)}$ — собственное отображение. По лемме 4 оно является вложением. Следовательно, f' — погружение.

Теорема 1. *Пусть X регулярно, $f\colon X \to Y$ — непрерывное собственное отображение, $A \subset X$, $f(A) \cap f(X \backslash A) = \varnothing$, $f|_A$ — инъекция, $f|_{X\backslash A \to Y\backslash f(A)}$ — локальный гомеоморфизм, и выполняется одно из двух условий:*

- *$Y\backslash f(A)$ связно и существует точка в $Y\backslash f(A)$ с одноточечным прообразом, или*
- *$X\backslash A$ линейно связно, $Y\backslash f(A)$ связно и односвязно.*

Тогда f — гомеоморфизм.

Доказательство. $f|_{X\backslash A \to Y\backslash f(A)}$ — собственный локальный гомеоморфизм и по леммам 2, 3 является гомеоморфизмом. Тогда $f\colon X \to Y$ — непрерывная биекция. По лемме 4 f является гомеоморфизмом.

Теорема 2. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное собственное отображение, $A \subset X$, ограничение f на $X\backslash A$ — локальный гомеоморфизм.*

1. *Если $Y_1 = Y\backslash f(A)$ связно и выполняется одно из двух условий:*
   - *для некоторой точки $y_0 \in Y_1$ ее прообраз $f^{-1}(y_0)$ одноэлементен, или*
   - *$X_1 = f^{-1}(Y_1)$ линейно связно, Y_1 односвязно,*

   то $f|_{X_1}$ — вложение.
2. *Если $f|_{X\backslash f^{-1}(f(A))}$ — инъекция и $f(A)$ имеет пустую внутренность в Y, то $f|_{X\backslash A}$ — открытое вложение.*
3. *Если $f|_{X\backslash A}$ — открытое вложение, A замкнуто и имеет пустую внутренность в X и X/A хаусдорфово, то $f(A) \cap f(X\backslash A) = \varnothing$. Если при этом $Y\backslash f(A)$ связно, то $f|_{X\backslash A \to Y\backslash f(A)}$ — гомеоморфизм.*

Здесь X/A — факторпространство X со стянутым в точку подпространством A. Заметим, что требование хаусдорфовости X/A в п.2 теоремы выполняется, в частности, если X регулярно или если A компактно.

Доказательство

1. Для любого компакта $K \subset Y_1$ прообраз $\left(f|_{X_1 \to Y_1}\right)^{-1}(K) = f^{-1}(K)$ компактен в силу собственности f, так что $f|_{X_1 \to Y_1}$ — собственное отображение. Применяя леммы 2, 3, находим, что $f|_{X_1 \to Y_1}$ — гомеоморфизм.

2. Рассмотрим множество $\left\{y \in Y\colon \operatorname{card}\left(f^{-1}(y) \cap (X\backslash A)\right) > 1\right\}$. Оно открыто (так как $f|_{X\backslash A}$ — локальный гомеоморфизм) и содержится в $f(A)$ и, следовательно, пусто. Значит, $f|_{X\backslash A}$ — открытое вложение.

3. Пусть $U \subset X\backslash A$ — открытое множество, замыкание которого также лежит в $X\backslash A$. Множество $U' = (X\backslash \overline{U}) \cap f^{-1}(f(U))$ открыто в X и содержится в A. Так как внутренность A в X пуста, U' также пусто, так что $f^{-1}(f(U)) \subset \overline{U} \subset X\backslash A$. Так как для любой точки $x \in X\backslash A$ у x и A существуют непересекающиеся окрестности, то объединение всех таких U совпадает с $X\backslash A$, поэтому $f(A) \cap f(X\backslash A) = \varnothing$. $f|_{X\backslash A \to Y\backslash f(A)}$ — собственное открытое вложение. По лемме 1 оно является гомеоморфизмом на открыто-замкнутое подмножество $Y\backslash f(A)$.

Теорема 3. *Пусть* $f\colon X \to Y$ *— непрерывное собственное отображение,* X *регулярно,* $A \subset X$ *замкнуто,* $\operatorname{int}_X A = \operatorname{int}_Y f(A) = \varnothing$*,* $f|_{X\setminus A}$ *— локальный гомеоморфизм,* $f|_{X\setminus f^{-1}(f(A))}$ *— инъекция. Тогда*

1. *Если* $f|_A$ *— инъекция, то* f *— вложение; если при этом* $Y\setminus f(A)$ *связно, то* f *— гомеоморфизм.*
2. *Если* $f|_A$ *— погружение, то и* f *является погружением.*
3. *Если* $A' \subset A$ *замкнуто и* $f|_{A\setminus A'}$ *— погружение, то и* $f|_{X\setminus A'}$ *является погружением.*

Доказательство. $f|_{X\setminus f^{-1}(f(A))\to Y\setminus f(A)}$ — собственное отображение; по лемме 4 оно является вложением. По теореме 2 $f|_{X\setminus A}$ также является вложением, $f(A)\cap f(X\setminus A) = \varnothing$, и $f|_{X\setminus A}$ является гомеоморфизмом на открыто-замкнутое подмножество $Y\setminus f(A)$.

1. Отображение f — инъекция; по лемме 4 оно является вложением. Если $Y\setminus f(A)$ связно, то согласно п.3 теоремы 2 f — биекция; применяя лемму 4, получаем, что f — гомеоморфизм.
2. Этот пункт является следствием более общего п.3 данной теоремы, доказываемого ниже.
3. Пусть $x \in A\setminus A'$ — произвольная точка. Возьмем окрестность $U \ni x$ в $X\setminus A'$ такую, что $f|_{U\cap A}$ — вложение. $f|_{U\setminus A}$ также является вложением, и $f(U\cap A)\cap f(U\setminus A) = \varnothing$. Поэтому $f|_U$ — инъекция, $f|_{X\setminus A'}$ — локальная инъекция. По лемме 5 получаем, что $f|_{X\setminus A'}$ — погружение.

Теорема 4. *Пусть*

- X *регулярно,* $A \subset X$ *замкнуто, для любой точки* a *границы* A *и любой ее окрестности* U *в* X *существует окрестность* $U' \subset U$ *точки* a *такая, что* $U'\setminus A$ *линейно связно,*
- $B \subset Y$*, для любой точки* b *границы* B *и любой ее окрестности* V *в* Y *существует окрестность* $V' \subset V$ *точки* b *такая, что* $V'\setminus B$ *связно и односвязно,*
- $f \in C(X, A, X\setminus A; Y, B, Y\setminus B)$ *— собственное отображение,* $f|_{A\to B}$ *и* $f|_{X\setminus A\to Y\setminus B}$ *— локальные гомеоморфизмы.*

Тогда f *— накрытие.*

Доказательство. По лемме 1 $f|_{A\to B}$ является накрытием над каждой компонентой связности B, а $f|_{X\setminus A\to Y\setminus B}$ — накрытием над каждой компонентой связности $Y\setminus B$.

Пусть a лежит на границе A, $b = f(a)$, V — окрестность b в Y такая, что $V\setminus B$ связно и односвязно, U — окрестность a в $f^{-1}(V)$ такая, что $U\setminus A$ линейно связно и $f|_{U\cap A}$ — вложение. $f|_{U\setminus A}$ — тоже вложение, и $f(U\cap A)\cap f(U\setminus A) = \varnothing$. Значит, $f|_U$ — инъекция, f — локальная инъекция. По лемме 5 получаем, что f — погружение.

Покажем, что f открыто. Достаточно доказать, что для любой точки a на границе A и для сколь угодно малой окрестности $U \ni a$ в X точка $b = f(a)$ содержится во внутренности $f(U)$ в Y. Без ограничения общности U можно выбрать так, чтобы $f|_{\overline{U}}$ было вложением, а $U\setminus A$ было связно. Предположим, что $b \notin \operatorname{int}_Y f(U)$. Тогда для любой окрестности $V \ni b$ выполняется $(V\setminus B)\setminus(f(U)\setminus B) \neq \varnothing$, так как $f(U)$ содержит окрестность b в B. Если $V\setminus B$ связно, то его пересечение с границей множества $f(U)\setminus B$ непусто, так как $f(U)\setminus B = f(U\setminus A)$ непусто и открыто в $Y\setminus B$. Пусть $\{y_i\}$ — последовательность точек в границе $f(U)$, сходящихся к b и не лежащих на B. Так как $y_i \in \overline{f(U)}\setminus B$, а $f|_{X\setminus A\to Y\setminus B}$ — собственное накрытие, то $f^{-1}(y_i)\cap\overline{U} = \{x_i\}$ для некоторых точек $x_i \in \overline{U}\setminus(U\cup A)$. $\bigcup\{x_i\}\cup\{a\} = f^{-1}(K)\cap\overline{U}$, где $K = \bigcup\{y_i\}\cup\{b\}$, и компактно в силу собственности f. Для любой предельной точки x' последовательности $\{x_i\}$ $f(x') = \lim y_i = b$, так что $\lim x_i = a$. Но a не может быть предельной точкой границы открытого множества $U \ni a$. Полученное противоречие показывает, что $b \in \operatorname{int} f(U)$.

Итак, f — открытое погружение, т.е. локальный гомеоморфизм. Тогда по лемме 1 f — накрытие.

2. Топологические многообразия

О п р е д е л е н и е 2. Хаусдорфово топологическое пространство M со счетной базой называется *n-мерным топологическим многообразием*, если для любой точки $x \in M$ некоторая ее окрестность гомеоморфна пространству $\mathbb{R}^n$ либо полупространству $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n)\colon x_i \in \mathbb{R}, x_1 \geq 0\}$.

Точки $x \in M$, имеющие окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$, называются *внутренними.* Подпространство M, состоящее из точек, не являющихся внутренними, называется *краем* ∂M многообразия M. Если $\partial M = \varnothing$, то M называется многообразием без края. Край n-мерного многообразия является $(n-1)$-мерным многообразием без края.

Если подпространство $A \subset M$ многообразия M само является многообразием, то оно называется *подмногообразием* M.

Приведем вначале два очевидных следствия результатов, полученных в предыдущем разделе:

Теорема 5. *Пусть M, N — связные топологические многообразия одинаковой размерности, $f\colon M \to N$ — непрерывное собственное отображение, $A \subset M$ замкнуто,* $\operatorname{int}_M A = \operatorname{int}_N f(A) = \varnothing$, *$f|_{M \setminus A}$ — локальный гомеоморфизм, $f|_{M \setminus f^{-1}(f(A))}$ — инъекция. Тогда*

1. *Если $f|_A$ — погружение, то и f — погружение.*
2. *Если $f|_A$ — инъекция, то f — вложение.*
3. *Если $f|_A$ — инъекция и $N \setminus f(A)$ связно, то f — гомеоморфизм.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следствие теоремы 3.

Теорема 6. *Пусть M, N — связные топологические многообразия одинаковой размерности, $f\colon M \to N$ — непрерывное собственное отображение, $A \subset M$ замкнуто,* $\operatorname{int}_M A = \operatorname{int}_N f(A) = \varnothing$, *$N \setminus f(A)$ связно, $f|_{M \setminus A}$ — локальный гомеоморфизм, и выполняется одно из двух условий*:

- *для некоторой точки $y_0 \in N \setminus f(A)$ ее прообраз $f^{-1}(y_0)$ одноэлементен или*
- *$M \setminus A$ связно, $N \setminus f(A)$ односвязно.*

Тогда если $f|_A$ — погружение, то и f — погружение; если $f|_A$ — инъекция, то f — гомеоморфизм.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следствие лемм 2, 3 и теоремы 3.

Теорема 7. *Пусть M, N — топологические многообразия одинаковой размерности, $f \in C(M, \partial M; N, \partial N)$, $f|_{\partial M}$ и $f|_{M \setminus \partial M}$ — погружения. Тогда f — локальный гомеоморфизм.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если f — собственное отображение, то f является локальным гомеоморфизмом по теореме 4 (если положить $X = M$, $A = \partial M$, $Y = N$, $B = \partial N$). Докажем теорему в общем случае.

∂M, ∂N — топологические многообразия без края одинаковой размерности, и по теореме об инвариантности области [6] $f|_{\partial M \to \partial N}$ — локальный гомеоморфизм. По той же теореме $f(M \setminus \partial M) \subset N \setminus \partial N$ и $f|_{M \setminus \partial M \to N \setminus \partial N}$ — также локальный гомеоморфизм.

Разобьем доказательство на два этапа: (1) f открыто, (2) f является локальным гомеоморфизмом.

1. Докажем, что для любой точки $x_0 \in \partial M$ и для сколь угодно малой ее окрестности U у точки $y_0 = f(x_0)$ имеется окрестность V, содержащаяся в $f(U)$.

Пусть $x_0 \in \partial M$, U — окрестность x_0 в M такая, что $f|_{U\cap\partial M\to\partial N}$ — вложение. Рассмотрим n-мерный симплекс Δ^n, $n = \dim M$, вложенный в U таким образом, что одна его $(n-1)$-мерная грань Δ^{n-1} вложена в $U \cap \partial M$ и содержит x_0 в своей относительной внутренности, а оставшаяся часть $\tilde{\Delta}^n = \Delta^n \backslash \Delta^{n-1}$ вложена в $U\backslash\partial M$. Тогда $x_0 \in \operatorname{int}_M \Delta^n$.

Пусть V — связная окрестность точки $y_0 = f(x_0)$ в N, не пересекающаяся с $f(Q)$, $Q = \partial\Delta^n \backslash \left(\Delta^{n-1}\backslash\partial\Delta^{n-1}\right)$, и такая, что $V \cap \partial N \subset f\left(\Delta^{n-1}\right)$ (такая окрестность существует, поскольку Q компактно). Предположим, что $V \not\subseteq f(\Delta^n)$. Тогда и $V\backslash\partial N \not\subseteq f(\Delta^n)$. Так как $f^{-1}(V) \cap \Delta^n$ непусто (содержит x_0) и открыто в Δ^n, то $f^{-1}(V) \cap (M\backslash\partial M) \cap \Delta^n \neq \varnothing$, и $V \cap (N\backslash\partial N) \cap f(\Delta^n) \neq \varnothing$. Значит, в $V\backslash\partial N$ есть точки, как принадлежащие $f(\Delta^n)$, так и не принадлежащие. Тогда граница Γ множества $f(\Delta^n)$ в N должна пересекаться с $V\backslash\partial N$. Пусть $y \in (V\backslash\partial N) \cap \Gamma$. $f(\Delta^n)$ компактно, поэтому $\Gamma \subset f(\Delta^n)$ и $y = f(x)$ для некоторого $x \in \tilde{\Delta}^n$. $(V\backslash\partial N) \cap f(\partial\Delta^n) = \varnothing$, поэтому $x \in \Delta^n\backslash\partial\Delta^n$. Но $f(\Delta^n\backslash\partial\Delta^n)$ открыто в $N\backslash\partial N$, так как $f|_{M\backslash\partial M\to N\backslash\partial N}$ — локальный гомеоморфизм, поэтому $y = f(x)$ лежит во внутренности $f(\Delta^n)$ в N, что противоречит предположению $x \in \Gamma$. Следовательно, $V \subset f(\Delta^n) \subset f(U)$, и f открыто.

2. $f|_{M\backslash\partial M\to N\backslash\partial N}$ — локальный гомеоморфизм, и $M\backslash\partial M$ открыто в M, поэтому достаточно доказать, что для любого $x_0 \in \partial M$ существует такая окрестность точки x_0 в M, что ограничение f на эту окрестность — вложение.

Положим $U' = f^{-1}(V) \cap \Delta^n = f^{-1}(V) \cap (\Delta^n\backslash Q)$. Так как $f^{-1}(V)$ и $\Delta^n\backslash Q$ открыты в M, то и U' открыто в M. Отображение $f|_{U'\to V}$ сюръективное и собственное, так как для любого компакта $K \subset V$ прообраз $\left(f|_{U'\to V}\right)^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cap U' = f^{-1}(K) \cap \Delta^n$ — замкнутое подмножество компакта Δ^n и поэтому само компактно.

Рассмотрим n-мерный симплекс σ^n, вложенный в V таким образом, что одна его $(n-1)$-мерная грань σ^{n-1} вложена в ∂N и содержит y_0 в своей относительной внутренности, а оставшаяся часть $\tilde{\sigma}^n = \sigma^n\backslash\sigma^{n-1}$ вложена в $V\backslash\partial N$. Напомним, что U была выбрана так, что $f|_{U\cap\partial M\to\partial N}$ — вложение, поэтому $f|_{U'\cap\partial M\to V\cap\partial N}$ — гомеоморфизм. Значит, f задает гомеоморфизм между некоторым $(n-1)$-мерным симплексом ρ^{n-1}, вложенным в $U' \cap \partial M$, и σ^{n-1}.

Так как $f|_{U'\backslash\partial M\to V\backslash\partial N}$ — накрытие (по лемме 1) и $\tilde{\sigma}^n$ односвязно, то его прообраз $\left(f|_{U'\backslash\partial M\to V\backslash\partial N}\right)^{-1}(\tilde{\sigma}^n)$ гомеоморфен несвязному объединению одного или нескольких экземпляров $\tilde{\sigma}^n$: $f^{-1}(\tilde{\sigma}^n) \cong J \times \tilde{\sigma}^n$, где J — множество индексов с дискретной топологией. Таким образом, получены гомеоморфизмы $\tilde{g}_j : \tilde{\sigma}^n \to U'\backslash\partial M$, $j \in J$ такие, что $f \circ \tilde{g}_j = \mathrm{id}$, и $\operatorname{Im}\tilde{g}_i \cap \operatorname{Im}\tilde{g}_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Гомеоморфизмы $\tilde{g}_j$ можно продолжить до гомеоморфизмов $g_j : \sigma^n \to U'$ так, что $f \circ g_j = \mathrm{id}$.

Значит, замкнутая окрестность $f^{-1}(\sigma^n)$ точки x_0 гомеоморфна факторпространству $J \times \sigma^n$ по отображению $J \times \sigma^{n-1} \to \sigma^{n-1}$ (т.е. каждый экземпляр n-симплекса $j \times \sigma^n$ приклеивается к единственному экземпляру σ^{n-1} по стандартному вложению $\sigma^{n-1} \to \sigma^n$). Это совместимо с условием, что окрестность точки x_0 в M гомеоморфна полупространству $\mathbb{R}^n_+$, лишь тогда, когда множество индексов J одноэлементно.

Таким образом, ограничение f на некоторую окрестность произвольной точки $x_0 \in \partial M$ — вложение, и f — локальный гомеоморфизм.

Теорема 8. *Пусть M, N — связные топологические многообразия одинаковой размерности, $f \in C(M, \partial M; N, \partial N)$ — собственное отображение, $f|_{\partial M}$ и $f|_{M\backslash\partial M}$ — погружения. Тогда f — накрытие.*

Если выполняется одно из двух условий:

- *N односвязно, или*
- *существует точка в N с одноточечным прообразом,*

то f — гомеоморфизм.

Доказательство является следствием теоремы 7 и лемм 1–3 (а также следствием теоремы 4 и лемм 2–3).

Следующий результат является очевидным следствием теоремы 8; он сформулирован здесь в качестве отдельного утверждения ввиду наличия его аналогов для ограниченных областей в $\mathbb{R}^n$ в работах [3, 4] и отсутствия полного доказательства соответствующих теорем в этих работах.

Теорема 9. *Пусть M, N — связные топологические многообразия одинаковой размерности с непустым краем, $f \in C(M, \partial M; N, \partial N)$ — собственное отображение, $f|_{\partial M \to \partial N}$ — инъекция, $f|_{M \setminus \partial M}$ — погружение. Тогда f — гомеоморфизм.*

Доказательство. Так как $f(M \setminus \partial M) \subset N \setminus \partial N$ и $f|_{\partial M \to \partial N}$ — инъекция, то существует $y_0 \in \partial N$ с одноточечным прообразом. $f|_{\partial M}$ — погружение по лемме 4. Осталось применить теорему 8.

В предыдущих теоремах требовалось, чтобы край M отображался в край N; хотелось бы избавиться от этого условия.

Теорема 10. *Пусть M, N — связные топологические многообразия одинаковой размерности, N односвязно, ∂M компактно, $f\colon M \to N$ — собственное погружение, ограничение f на каждую компоненту связности ∂M — инъекция. Тогда f — вложение.*

Эта теорема является обобщением леммы 1 из [8] (там рассматриваются гладкие компактные M, N и локальный диффеоморфизм $f\colon M \to N$, причем $\partial N = \varnothing$). Воспользуемся идеей доказательства из [8], заключающейся в разрезании N вдоль образов компонент связности ∂M и приклеивании возникающих при этом “шапочек” к M вдоль соответствующих компонент ∂M. Однако в нашей ситуации возникают дополнительные трудности, связанные с отсутствием гладкости (например, мы не знаем, являются ли образы компонент связности ∂M локально плоскими подмногообразиями N) и незамкнутостью N. В частности, потребуется следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть M, N — топологические многообразия, ∂M компактно, $f\colon M \to N$ — погружение, ограничение f на ∂M — вложение. Тогда существует окрестность $U \supset \partial M$ в M такая, что ограничение f на U также является вложением.*

Заметим, что здесь, в отличие от остальных теорем данного раздела, не требуется равенства размерностей M, N.

Доказательство. Так как нас интересует поведение f лишь в окрестности ∂M, а ∂M обладает воротником в M [9], то без ограничения общности можно считать, что $M = \partial M \times [0, 1)$. Поэтому доказываемое утверждение является следствием следующего факта:

Лемма 7. *Пусть A, N — метрические пространства, A компактно, $M = A \times [0, 1)$, $f\colon M \to N$ — погружение, $f|_{A \times \{0\}}$ — вложение. Тогда существует окрестность $U \supset A \times \{0\}$ в M такая, что ограничение f на U также является вложением.*

Доказательство. Зададим метрику на M равенством $\rho((x, t), (x', t')) = \rho(x, x') + |t - t'|$ (метрики на A, M, N будем обозначать одной буквой ρ для удобства; из контекста всюду будет ясно, о каком пространстве идет речь). Обозначим через $B_a(x)$ открытый шар радиуса a с центром в точке x.

Так как f — погружение, для каждой точки $x \in A$ существует $a \in (0, 1)$ такое, что $f|_{B_a \times [0,a)}$ — вложение. Так как A компактно, его можно покрыть конечным числом шаров $B_{a_i}(x_i)$; положим $a = \min a_i$.

Множество $\{(x, y)\colon x, y \in A, \rho(x, y) \geq a\} \subset A^2$ компактно, и непрерывная функция $(x, y) \mapsto \rho(f(x, 0), f(y, 0))$ принимает на нем минимальное значение $d > 0$. f равномерно непрерывна на компактном множестве $A \times [0, a]$, так что

$$\exists \epsilon \in (0, a)\ \forall z, z' \in A \times [0, a] \quad \rho(z, z') < 2\epsilon \Rightarrow \rho(f(z), f(z')) < d/2.$$

Для любой пары точек $(x, t), (x', t') \in A \times [0, 2\epsilon)$ возможны два варианта:

- либо $\rho(x,x') < a$, и тогда $f(x,t) \neq f(x',t')$ в силу выбора a,
- либо $\rho(x,x') \geq a$, и тогда $\rho(f(x,t),f(x',t')) > \rho(f(x,0),f(x',0)) - d/2 - d/2 \geq 0$.

Таким образом, $f|_{A\times[0,2\epsilon)}$ инъективно, $f|_{A\times[0,\epsilon]}$ — вложение, и $f|_{A\times[0,\epsilon)}$ — также вложение.

Доказательство теоремы 10. ∂M обладает воротником в M [9], т.е. существует вложение $\varphi\colon \partial M\times[0,1) \hookrightarrow M$, $\varphi(x,0) = x$ при $x \in \partial M$. По лемме 6 этот воротник можно выбрать так, чтобы ограничение f на каждую компоненту связности $\operatorname{Im}\varphi$ было вложением. Определим изотопию $H\colon [0,1) \times M \to M$ формулой

$$H_t(x) = \begin{cases} x, & x \notin \operatorname{Im}\varphi \\ \varphi(q, s + t(1-s)), & x = \varphi(q,s). \end{cases}$$

$H_0 = \mathrm{id}$, и H_t является вложением $M \hookrightarrow M$ для любого $t \in [0,1)$.

Положим $F_t = f \circ H_t$ и зафиксируем произвольное $t \in (0,1)$.

Пусть A — компонента связности ∂M, $B = F_t(A)$. По построению $F_t|_{A\to B}$ — гомеоморфизм, $B \subset N\backslash\partial N$. Так как N односвязно, а B — связное замкнутое подмногообразие $N\backslash\partial N$ коразмерности 1, то $N\backslash B$ распадается на две компоненты связности. Для $U = \varphi(A\times[0,1))$ образ $F_t(U\backslash A)$ связен и не пересекается с B, поэтому содержится в одной из компонент связности $N\backslash B$. Обозначим эту компоненту через N_1, а другую — N_2. $N_2 \cup B$ содержит воротник $f\circ\varphi(A\times(0,t])$ подмногообразия $B = f\circ\varphi(A\times\{t\})$ и, следовательно, является n-мерным топологическим многообразием с краем, одной из компонент связности которого является B, а оставшиеся компоненты содержатся в ∂N. Приклеим к M вдоль A многообразие $N_2 \cup B$ по гомеоморфизму $F_t|_{A\to B}$, и продолжим F_t на полученное многообразие, полагая $F_t|_{N_2} = \mathrm{id}$.

Проделав эту процедуру последовательно для всех компонент связности ∂M (их конечное число в силу компактности ∂M), получаем вложение $i_t\colon M \hookrightarrow \tilde{M}_t$ и погружение $\tilde{F}_t\colon \tilde{M}_t \to N$, причем ограничение $\tilde{F}_t$ на каждую компоненту связности $\partial\tilde{M}_t$ является вложением в ∂N. По построению $\tilde{F}_t$ — собственное отображение. По теореме 8 $\tilde{F}_t$ — гомеоморфизм, а его ограничение $\tilde{F}_t\Big|_M = F_t$ — вложение.

Таким образом, для любого $t \in (0,1)$ отображение $F_t\colon M \to N$ является вложением. Так как $\bigcup_{t>0} H_t(M) = M\backslash\partial M$, то $f|_{M\backslash\partial M}$ также является вложением и $f(M\backslash\partial M) \cap f(\partial M) = \varnothing$.

Предположим, что существует пара различных точек $x_0, x_1 \in \partial M$ с совпадающими образами $f(x_0) = f(x_1)$. Пусть γ — несамопересекающийся путь в M, соединяющий x_0 с x_1 и весь, за исключением концевых точек, лежащий в $M\backslash\partial M$; A — компонента связности ∂M, содержащая x_0. Тогда $\operatorname{Im}(f\circ\gamma)$ — окружность в N, и ее индекс пересечения с $f(A)$ равен 1, что противоречит односвязности N.

Следовательно, $f|_{\partial M}$ инъективно, f также инъективно, и по лемме 4 f является вложением.

3. Клеточные разбиения

Определение 3. Разбиение топологического пространства X называется *клеточным*, если для каждого элемента разбиения (*открытой клетки*) e: (1) задано неотрицательное целое число k (*размерность* e), (2) существует непрерывное отображение φ замкнутого диска D^k в X такое, что ограничение φ на внутренность D^k является гомеоморфизмом на e, а образ ограничения φ на границу D^k содержится в объединении клеток размерности меньше k (такое отображение φ называется характеристическим отображением для клетки e).

Хаусдорфово топологическое пространство X, наделенное клеточным разбиением, называется *клеточным пространством*, если выполняются два условия: (C) замыкание каждой клетки пересекается лишь с конечным числом клеток, (W) $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто пересечение A с замыканием каждой клетки.

Размерностью клеточного пространства называется верхняя граница размерностей его клеток. Клеточное пространство называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа клеток. *k-мерным остовом* клеточного пространства X называется объединение X_k открытых клеток X размерности не выше k. *Клеточным подпространством* клеточного пространства называется его подмножество, содержащее вместе с каждой точкой замыкание содержащей ее клетки.

Коразмерность 1

Теорема 11. *Пусть M, N — связные топологические n-мерные многообразия, $A \subset M$ — клеточное пространство размерности $\leq n-1$, замкнутое в M. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $f\colon M \to N$ *— гомеоморфизм.*
2. $f \in C(M, \partial M; N, \partial N)$ *— собственное отображение, ограничения f на $M \backslash A$ и на каждую открытую клетку A — погружения, $f|_{M\backslash f^{-1}(f(A))}$ — инъекция.*

Доказательство. Одна половина утверждения ($1 \Rightarrow 2$) очевидна. Докажем вторую половину.

Так как M имеет счетную базу, A состоит из не более чем счетного числа клеток. $f(A)$ является объединением не более чем счетного числа подмногообразий N ненулевой коразмерности. Каждое из них нигде не плотно в N, поэтому $f(A)$ имеет пустую внутренность в N. Аналогично, A является объединением не более чем счетного числа вложенных в M дисков ненулевой коразмерности, и $\operatorname{int}_M A = \varnothing$. По теореме 2 $f|_{M\backslash A}$ — открытое вложение, и $f(A) \cap f(M \backslash A) = \varnothing$.

Обозначим через A_k k-мерный остов A.

Предположим, что $f|_{M\backslash A_k}$ — открытое вложение. Так как $f|_{A_k\backslash A_{k-1}}$ — погружение, по п. 3 теоремы 3 $f|_{M\backslash A_{k-1}}$ является погружением. Так как $M\backslash A_{k-1}$ — n-мерное многообразие с краем $\partial\,(M\backslash A_{k-1}) \subset \partial M$, то по теореме 7 $f|_{M\backslash A_{k-1}}$ является локальным гомеоморфизмом. По теореме 2 $f|_{M\backslash A_{k-1}}$ — открытое вложение.

По индукции получаем, что f — открытое вложение. По лемме 1 f — гомеоморфизм.

Теорема 12. *Пусть M, N — связные топологические n-мерные ориентированные многообразия; $A \subset M$ — клеточное пространство размерности $\leq n-1$, замкнутое в M; $A \cap \partial M$ является клеточным подпространством A. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $f\colon M \to N$ *— сохраняющий ориентацию гомеоморфизм.*
2. $f \in C(M, \partial M; N, \partial N)$ *— собственное отображение, $f|_{M\backslash A}$ — сохраняющее ориентацию погружение, ограничение f на каждую открытую клетку A — погружение, и для некоторой точки $x_0 \in M\backslash A$ выполняется $f^{-1}\left(f\left(x_0\right)\right) = \{x_0\}$.*

Доказательство. ($1 \Rightarrow 2$) очевидно; докажем ($2 \Rightarrow 1$).

Без ограничения общности можно считать, что $\partial M = \partial N = \varnothing$, так как общий случай сводится к этому переходом к дублям $\mathcal{D}f\colon \mathcal{D}M \to \mathcal{D}N$. Здесь $\mathcal{D}$ — функтор взятия дубля: склеивания двух экземпляров многообразия вдоль края (при этом один из склеиваемых экземпляров остается с исходной ориентацией, а ориентация второго меняется на противоположную). Так как $A \cap \partial M$ является клеточным подпространством A, можно определить дубль A как замкнутое клеточное пространство $\mathcal{D}A \subset \mathcal{D}M$: клетки, лежащие в $A \cap \partial M$, оставим в единственном экземпляре, а все остальные клетки продублируем (характеристические отображения для дублированных клеток задаются очевидным образом).

Так как f — собственное отображение, определена степень $\deg f$, и $f_*(o_{f^{-1}(y)}) = (\deg f) o_y$ для любого $y \in N$, где $o_y \in H_n(N, N\backslash\{y\})$, $o_{f^{-1}(y)} \in H_n(M, M\backslash f^{-1}(y))$ — образующие соответствующих относительных гомологических групп [6]. По условию $f^{-1}\left(f\left(x_0\right)\right) = \{x_0\}$ и f —

сохраняющий ориентацию гомеоморфизм в окрестности x_0, поэтому $\deg f = 1$, f сюръективно и $f|_{M\setminus f^{-1}(f(A))\to N\setminus f(A)}$ — гомеоморфизм. Значит, $(N\setminus\partial N)\setminus(f(A)\setminus\partial N) = N\setminus(\partial N\cup f(A))$ связно.

Осталось применить теорему 11.

Коразмерность 2

Теорема 13. *Пусть M, N — связные топологические n-мерные многообразия, $A \subset M$ — конечное клеточное пространство размерности $\leq n-2$. Пусть $f \in C(M,\partial M;N,\partial N)$ — собственное отображение, ограничения f на $M\setminus A$ и на каждую открытую клетку A являются погружениями. Если выполняется одно из двух условий*:

1. *Существует точка $x_0 \in M\setminus A$ такая, что $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$, или*
2. *$N\setminus f(A)$ односвязно,*

то $f\colon M \to N$ — гомеоморфизм.

Для того, чтобы доказать эту теорему, нам понадобится ряд вспомогательных результатов.

Напомним определение размерности $\dim X$ топологического пространства X и некоторые основные ее свойства:

- $\dim X$ равна наименьшему целому числу $n \geq 0$, удовлетворяющему условию: в любое конечное открытое покрытие пространства X можно вписать конечное открытое покрытие кратности $\leq n+1$ ([10], II.2).
- Для произвольного подпространства X_0 совершенно нормального пространства X $\dim X_0 \leq \dim X$ ([10], IV.8, теорема 18).
- Если нормальное пространство X есть сумма счетного числа своих замкнутых подмножеств, каждое из которых имеет размерность $\leq n$, то и само пространство X имеет размерность $\leq n$ ([10], IV.7, теорема 16).
- Если M — n-мерное связное топологическое многообразие без края и $A \subset M$ имеет размерность $\leq n-2$, то $M\setminus A$ связно ([10], VIII.2, теорема 2).

Лемма 8. *Пусть A — конечное клеточное пространство размерности $\leq n-2$, N — n-мерное топологическое многообразие, $f\colon A \to N$ — непрерывное отображение, ограничение f на каждую открытую клетку A является погружением. Тогда, если N линейно связно, то и $N\setminus f(A)$ линейно связно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через E_i объединение открытых i-мерных клеток A.

Каждая точка $x \in E_i$ обладает окрестностью U_x в E_i, гомеоморфной i-мерному диску и такой, что $f|_{U_x}$ — вложение. Из покрытия $\{U_x\colon x \in E_i\}$ можно выделить счетное подпокрытие $\{U_{i,j}\}$ пространства E_i. Тогда $f(A)$ будет покрыто счетным числом дисков $f(U_{i,j})$ размерности $\leq n-2$, следовательно, и оно само, и его подпространство $f(A)\setminus\partial N$ должны иметь размерность $\leq n-2$.

Так как A компактно, $f(A)\setminus\partial N$ замкнуто в $N\setminus\partial N$, и $N\setminus(\partial N \cup f(A))$ — топологическое многообразие без края. Поэтому из связности $N\setminus(\partial N\cup f(A))$ вытекает его линейная связность.

Для любой точки $y_0 \in \partial N\setminus f(A)$ существует ее окрестность в N, не пересекающаяся с $f(A)$, и путь, связывающий y_0 с точкой из $N\setminus(\partial N \cup f(A))$, следовательно, $N\setminus f(A)$ также линейно связно.

Лемма 9. *Пусть M, N — связные топологические n-мерные многообразия, $A \subset M$ — конечное клеточное пространство размерности $\leq n-2$, $f\colon M \to N$ — непрерывное собственное отображение, ограничения f на $M\setminus A$ и на каждую открытую клетку A являются погружениями. Тогда $M\setminus f^{-1}(f(A))$ линейно связно.*

Доказательство. По доказанному в предыдущей лемме $\dim f(A) \le n-2$.

Пусть $x \in f^{-1}(f(A))\backslash A \subset M\backslash A$. По условию существует окрестность $U_x \subset M\backslash A$ точки x такая, что $f|_{U_x}$ — вложение. Тогда $\dim\bigl(f^{-1}(f(A)) \cap U_x\bigr) \le n-2$. $f^{-1}(f(A))\backslash A$ покрывается не более чем счетным числом таких окрестностей, так что $\dim\bigl(f^{-1}(f(A))\backslash A\bigr) \le n-2$, и $\dim f^{-1}(f(A)) \le n-2$.

Так как f собственно, $f^{-1}(f(A))$ компактно.

Отсюда, аналогично доказательству предыдущей леммы, получаем, что $M\backslash f^{-1}(f(A))$ линейно связно.

Доказательство теоремы 13. По леммам 8, 9 $N\backslash f(A)$ и $M\backslash f^{-1}(f(A))$ линейно связны. По теореме 2 $f|_{M\backslash f^{-1}(f(A))}$ — вложение. Осталось применить теорему 11.

Клеточные разбиения многообразий

Определение 4. Клеточное разбиение топологического многообразия M будем называть *правильным*, если ∂M является клеточным подпространством M.

Теорема 14. *Пусть M, N — связные топологические n-мерные ориентированные многообразия, и задано правильное клеточное разбиение M. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *$f\colon M \to N$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм.*
2. *$f \in C(M, \partial M; N, \partial N)$ — собственное отображение; ограничение f на каждую открытую клетку M — погружение, причем если клетка n-мерна, то это погружение сохраняет ориентацию; и для некоторой точки $x_0 \in (M\backslash M_{n-1}) \cup (\partial M\backslash M_{n-2})$, где M_i — i-мерный остов M, выполняется $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$.*

Доказательство

1. Пусть $x_0 \in \partial M\backslash M_{n-2}$. Покажем, что этот случай сводится к случаю $x_0 \in M\backslash M_{n-1}$.

Пусть e^{n-1} — открытая $(n-1)$-мерная клетка ∂M, содержащая x_0. По определению клеточного пространства, если замыкание некоторой клетки пересекается с e^{n-1}, то эта клетка n-мерна. Кроме того, M локально компактно, так что клеточное разбиение M локально конечно. Поэтому существует окрестность $U \ni x_0$ в M такая, что $U\backslash\partial M \subset \bigcup e_i^n$, где $\{e_i^n\}$ — некоторые n-мерные клетки. Без ограничения общности можно считать, что U гомеоморфно $\mathbb{R}^n_+$ и $U \cap \partial M \subset e^{n-1}$. Так как e_i^n открыты, а $U\backslash\partial M$ связно, то $U\backslash\partial M$ полностью содержится в одной из n-мерных клеток; обозначим ее e^n.

U является n-мерным топологическим многообразием с краем и $f|_U \in C(U, \partial U; N, \partial N)$. Ограничения $f|_{\partial U}$, $f|_{U\backslash\partial U}$ являются погружениями, так как ∂U и $U\backslash\partial U$ содержатся в открытых клетках e^{n-1} и e^n соответственно. По теореме 7 $f|_U$ — локальный гомеоморфизм.

Пусть $U' \Subset U$ — такая окрестность x_0, что $f|_{U'}$ — вложение. Предположим, что существует последовательность $\{x_i\} \subset M\backslash U'$ такая, что $f(x_i) \to y_0 = f(x_0)$. Так как $\bigcup\{f(x_i)\} \cup \{y_0\}$ компактно, а f собственно, то у последовательности $\{x_i\}$ есть предельная точка $x \in M$. По непрерывности f, $f(x) = y_0$, и по условию одноэлементности $f^{-1}(y_0)$ должно быть $x = x_0$. Но x_0 не может быть предельной точкой последовательности, все элементы которой лежат вне U'.

Полученное противоречие доказывает, что существует такая окрестность $V \ni y_0$ в N, что $f^{-1}(V) \subset U$. Но тогда $f|_{f^{-1}(V)}$ — вложение, и для любой точки $x_0 \in f^{-1}(V) \cap (M\backslash M_{n-1})$ будет выполняться $f^{-1}(f(x_0')) = \{x_0'\}$, так что точку x_0 в условии можно заменить точкой $x_0' \in M\backslash M_{n-1}$.

2. Пусть теперь $x_0 \in M\backslash M_{n-1}$. Положим $A = M_{n-1}$ и применим теорему 12.

В неориентируемом случае приходится дополнительно следить за поведением f в окрестности $(n-1)$-мерных клеток:

Теорема 15. *Пусть M, N — связные топологические n-мерные многообразия, M компактно, и задано правильное клеточное разбиение M. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $f\colon M \to N$ *— гомеоморфизм.*
2. $f \in C(M, \partial M; N, \partial N)$ *— собственное отображение*; *ограничение f на $M \backslash M_{n-2}$ и на каждую открытую клетку M_{n-2} — погружение, и для некоторой точки $x_0 \in M \backslash M_{n-2}$ выполняется $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$.*

Доказательство. Положим $A = M_{n-2}$ и применим теорему 13.

4. Триангуляции

Определение 5. Триангуляцией множества называется его покрытие симплексами такое, что (1) грани любого симплекса покрытия сами являются симплексами покрытия, (2) если один симплекс покрытия покрыт другим, то первый является гранью второго, (3) пересечение двух перекрывающихся симплексов покрытия также является симплексом покрытия.

Симплициальным пространством называется множество, наделенное триангуляцией и индуцированной этой триангуляцией топологией (подмножество замкнуто тогда и только тоогда, когда его пересечение с любым симплексом триангуляции замкнуто).

Следующая теорема является следствием теоремы 14:

Теорема 16. *Пусть M, N — связные топологические n-мерные ориентированные многообразия, K — триангуляция M (не обязательно комбинаторная), $f \in C(M, \partial M; N, \partial N)$ — собственное отображение, ограничение f на относительную внутренность каждого симплекса триангуляции является погружением, ограничение f на относительную внутренность каждого n-мерного симплекса сохраняет ориентацию. Пусть для некоторой точки $x_0 \in M$, лежащей в объединении относительных внутренностей n-мерных симплексов M и $(n-1)$-мерных симплексов ∂M, выполняется $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$. Тогда $f\colon M \to N$ — гомеоморфизм, переводящий K в триангуляцию N.*

Определение 6. Симплициальное пространство K называется *n-мерным псевдомногообразием*, если выполняются следующие условия: (1) каждый симплекс K является гранью некоторого n-мерного симплекса K, (2) каждый $(n-1)$-мерный симплекс K является гранью не более чем двух n-мерных симплексов K, (3) любые два n-мерных симплекса K можно включить в конечную последовательность n-мерных симплексов K такую, что каждые два соседних симплекса этой последовательности имеют общую $(n-1)$-мерную грань. *Краем ∂K* n-мерного псевдомногообразия K называется подпространство K, образованное $(n-1)$-мерными симплексами K, каждый из которых является гранью ровно одного n-мерного симплекса K [11].

Теорема 17. *Пусть K — компактное связное n-мерное ориентированное псевдомногообразие, N — связное n-мерное ориентированное топологическое многообразие. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. *K — триангулированное топологическое многообразие, а $f\colon K \to N$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм.*
2. $f \in C(K, \partial K; N, \partial N)$; *ограничение f на относительную внутренность каждого симплекса K — погружение, причем если симплекс n-мерный, то это погружение сохраняет ориентацию*; *и для некоторой точки $x_0 \in (K \backslash K_{n-1}) \cup (\partial K \backslash K_{n-2})$ (где K_i — i-мерный остов K) выполняется $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится обобщение на псевдомногообразия теоремы об инвариантности области:

Лемма 10. *Пусть K — n-мерное псевдомногообразие, $U \subset K \backslash \partial K$ открыто, $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ — погружение. Тогда f является локальным гомеоморфизмом, а U — топологическое многообразие.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ — вложение для открытого $U \subset K \backslash \partial K$, то $f(U)$ открыто. Доказательство аналогично доказательству теоремы об инвариантности области в [6]. Пусть $x \in U$, K' — измельчение триангуляции K такое, что звезда S точки x в триангуляции K' содержится в U. Обозначим через L линк точки x в K'; L является границей S.

По двойственности Александера — Понтрягина число компонент линейной связности $\mathbb{R}^n \backslash f(L)$ на единицу больше ранга свободного $\mathbb{Z}_2$-модуля $\check{H}^{n-1}(L; \mathbb{Z}_2)$ когомологий Чеха пространства L с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ [6]. Так как L — связное замкнутое $(n-1)$-мерное псевдомногообразие, то $\check{H}^{n-1}(L; \mathbb{Z}_2) = H^{n-1}(L; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$, и $\mathbb{R}^n \backslash f(L) = (\mathbb{R}^n \backslash f(S)) \cup f(S \backslash L)$ имеет две компоненты связности.

S стягиваемо, поэтому $\mathbb{R}^n \backslash f(S)$ связно.

Поскольку $f(S \backslash L)$ связно, оно должно быть компонентой связности $\mathbb{R}^n \backslash f(L)$. Так как $\mathbb{R}^n \backslash f(L)$ открыто в $\mathbb{R}^n$, то и $f(S \backslash L)$ открыто в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, для любой точки $x \in U$ существует такая ее окрестность $S \backslash L$ в U, что $f(S \backslash L)$ открыто в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство теоремы 17. $(1 \Rightarrow 2)$ очевидно; докажем $(2 \Rightarrow 1)$.

1. Обозначим через K_i i-мерный остов K, $K_{i-1} = \varnothing$. Случай $x_0 \in \partial K \backslash K_{n-2}$ сводится к случаю $x_0 \in K \backslash K_{n-1}$ так же, как и в доказательстве теоремы 14. Как и в доказательстве теоремы 12, сведем задачу к случаю $\partial K = \partial N = \varnothing$, перейдя, если надо, к дублям.

Положим $N' = N \backslash f(K_{n-2})$, $K' = K \backslash f^{-1}(f(K_{n-2})) \subset K \backslash K_{n-2}$. Так как K_{n-2} компактно, а $K \backslash K_{n-2}$ — топологическое многообразие, то K', N' также являются n-мерными топологическими многообразиями без края. Рассмотрим собственное отображение $f' = f|_{K' \to N'}$. По лемме 8 N' связно, так что определена степень $\deg f'$. По условию $\deg f' = 1$, так что $f|_{K \backslash f^{-1}(f(K_{n-1}))}$ является вложением. Применяя п.2 теоремы 2 к $X = K$, $A = K_{n-1}$, $Y = N$, находим, что $f|_{K \backslash K_{n-1}}$ — открытое вложение.

2. Пусть уже доказано, что $f|_{K \backslash K_i}$ является открытым вложением для некоторого $i \leq n-1$. Применяя теорему 3 к $X = K$, $A = K_i$, $A' = K_{i-1}$, $Y = N$, получаем, что $f|_{K \backslash K_{i-1}}$ — погружение. По лемме 10 это погружение является локальным гомеоморфизмом. По лемме 8 $N \backslash f(K_{i-1})$ связно, и по условию теоремы существует точка в $N \backslash f(K_{i-1})$ с одноточечным прообразом, так что к $X = K$, $A = K_i$, $Y = N$ применима теорема 2, и $f|_{K \backslash K_{i-1}}$ — открытое вложение.

По индукции получаем, что $f = f|_{K \backslash K_{-1}}$ — открытое вложение. Так как K компактно, f является гомеоморфизмом. K гомеоморфно топологическому многообразию N и, следовательно, само является топологическим многообразием.

В неориентируемом случае можно использовать следующую формулировку:

Теорема 18. *Пусть K — компактное связное n-мерное псевдомногообразие, N — связное n-мерное топологическое многообразие. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. *K — триангулированное топологическое многообразие, и $f \colon K \to N$ — гомеоморфизм.*

2. *$f \in C(K, \partial K; N, \partial N)$; ограничение f на $K \backslash K_{n-2}$ и на относительную внутренность каждого симплекса K_{n-2} — погружение, и для некоторой точки $x_0 \in K \backslash K_{n-2}$ выполняется $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$.*

Доказательство. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, сведем общий случай к случаю $\partial K = \partial N = \varnothing$ и рассмотрим собственное отображение $f' = f|_{K' \to N'}$. Отличие от условия предыдущей теоремы в том, что здесь уже само отображение f' является локальным гомеоморфизмом. По леммам 8, 9 многообразия K', N' связны. По теореме 8 f' — гомеоморфизм. По п. 2 теоремы 2 $f|_{K\setminus K_{n-2}}$ — открытое вложение. Остается повторить рассуждения п. 2 доказательства предыдущей теоремы с тем изменением, что начинать индукцию здесь надо с $i = n-2$, а не с $i = n-1$, как там.

5. Гладкие многообразия

Определение 7. Пусть M — n-мерное топологическое многообразие. *Картой* M называется гомеоморфизм φ открытой области $U \subset M$ на $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_+$. Две карты $\varphi\colon U \to V$, $\varphi'\colon U' \to V'$ называются C^r-согласованными, если отображение $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ и обратное ему являются C^r-гладкими на своей области определения. *C^r-структурой* на M называется покрытие M попарно C^r-согласованными картами. Две C^r-структуры на M считаются эквивалентными, если их объединение также является C^r-структурой.

C^r-многообразием (многообразием класса гладкости C^r) называется n-мерное топологическое многообразие M с заданной на нем C^r-структурой.

Отображение $f\colon M \to M'$, где M, M' — C^r-многообразия, называется гладким отображением класса C^r, или *C^r-отображением*, если для любой пары карт $\varphi\colon U \to V$, $\varphi'\colon U' \to V'$, $U \subset M$, $U' \subset M'$ отображение $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ C^r-гладко на своей области определения. Множество C^r-отображений $f\colon M \to M'$ будем обозначать $C^r(M, M')$.

C^r-отображение $f : M \to N$ называется *C^r-погружением*, если его дифференциал $\mathrm{d}f$ невырожден ($\mathrm{rang}(\mathrm{d}f) = \dim M$) в каждой точке. Инъективное C^r-погружение называется *C^r-вложением*. Биективное C^r-погружение называется *C^r-диффеоморфизмом*.

Заметим, что всякое C^r-погружение является (если забыть про гладкую структуру) погружением в смысле определения 1 и всякое C^r-вложение является вложением в смысле определения 1. Поэтому результаты разд. 2–4 легко переформулируются для гладкого случая (заметим, что прямое доказательство гладких и кусочно-гладких вариантов существенно проще, чем доказательство их топологических аналогов). Приведем гладкие варианты некоторых из них (всюду ниже $r \geq 1$):

Теорема 19. *Пусть M, N — связные C^r-многообразия одинаковой размерности, $f \in C^r(M, \partial M; N, \partial N)$ — собственное отображение, $\mathrm{d}f$ невырожден на M, и выполняется одно из двух условий:*

- *N односвязно, или*
- *существует точка в N с одноточечным прообразом.*

Тогда f — C^r-диффеоморфизм.

Теорема 20. *Пусть M, N — связные C^r-многообразия одинаковой размерности с непустым краем, $f \in C(M, \partial M; N, \partial N) \cap C^r(M\setminus\partial M, N)$ — собственное отображение, $\mathrm{d}f$ невырожден на $M\setminus\partial M$, $f|_{\partial M}$ — инъекция. Тогда f — гомеоморфизм, а ограничение $f|_{M\setminus\partial M \to N\setminus\partial N}$ — C^r-диффеоморфизм. Если $\mathrm{d}f$ невырожден на M, то f — C^r-диффеоморфизм.*

Теорема 21. *Пусть M, N — связные C^r-многообразия одинаковой размерности, N односвязно, ∂M компактно, $f \in C^r(M, N)$ — собственное погружение, ограничение f на каждую компоненту связности ∂M — инъекция. Тогда $f|_{M\to f(M)}$ — C^r-диффеоморфизм.*

Пусть K — симплициальное пространство, N — C^r-многообразие. В [12] для отображений из K в N вводятся понятия (кусочно-гладкого) C^r-отображения, C^r-погружения, C^r-вложения, а также C^r-триангуляции многообразия N. Там же доказывается следующий результат (теорема 3.8):

> Всякое невырожденное C^r-отображение $f\colon K \to N$, являющееся гомеоморфизмом полиэдра K на многообразие N, представляет собой C^r-триангуляцию этого многообразия.

Очевидным следствием этой теоремы и наших теорем 17–18 являются следующие результаты (ориентируемый и неориентируемый варианты):

Теорема 22. *Пусть K — компактное связное n-мерное ориентированное псевдомногообразие, N — связное n-мерное ориентированное C^r-многообразие, $f \in C(K, \partial K; N, \partial N)$ — невырожденное C^r-отображение, ограничение f на относительную внутренность каждого n-мерного симплекса сохраняет ориентацию. Пусть для некоторой точки $x_0 \in (K \backslash K_{n-1}) \cup (\partial K \backslash K_{n-2})$ выполняется $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$. Тогда f задает C^r-триангуляцию N.*

Теорема 23. *Пусть K — компактное связное n-мерное псевдомногообразие, N — связное n-мерное C^r-многообразие, $f \in C(K, \partial K; N, \partial N)$ — невырожденное C^r-отображение, ограничение f на $K \backslash K_{n-2}$ является C^r-погружением, Пусть для некоторой точки $x_0 \in K \backslash K_{n-2}$ выполняется $f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}$. Тогда f задает C^r-триангуляцию N.*

6. Заключение

Доказываемые в данной работе критерии могут быть использованы для определения характеристик непрерывного отображения, заданного либо глобально на некотором многообразии, либо независимо на каждой ячейке (клетке или симплексе), на которые это многообразие разбито.

Некоторые результаты данной работы являются обобщениями критериев, сформулированных в работах [3, 4] и широко используемых в настоящее время при разработке алгоритмов построения сеток.

Так, теорема 3 в [4] является частным случаем теоремы 9 данной работы (и еще более частным случаем теоремы 8) и в нашей терминологии выглядит так: *Пусть $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерное C^1-многообразие, $f \in C^1(\overline{\Omega}, \partial\overline{\Omega}; \overline{\Omega}, \partial\overline{\Omega})$, $f|_{\partial\overline{\Omega} \to \partial\overline{\Omega}}$ — диффеоморфизм, $f|_{\Omega}$ — C^1-погружение; тогда f является гомеоморфизмом.* Заметим, что у нас в отличие от [4]

- не требуется гладкости f;
- не требуется, чтобы f задавало диффеоморфизм границы на границу (требуется лишь, чтобы оно инъективно отображало границу в границу, или — в теореме 8 — было погружением границы в границу);
- f определено на произвольном топологическом многообразии и действует в произвольное топологическое многообразие (а не в исходную или гомеоморфную исходной область).

Теоремы 7, 8, 9 работы [4] являются следствиями теоремы 14 данной работы.

Например, в теореме 7 работы [4] утверждается следующее: *Пусть Ω — ограниченная связная область в $\mathbb{R}^n$, и задано разбиение $\overline{\Omega}$ на ячейки $\overline{\Omega_i}$, причем каждая ячейка — выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, $f \in C(\overline{\Omega}, \partial\overline{\Omega}; \overline{\Omega}, \partial\overline{\Omega})$, $f|_{\partial\overline{\Omega} \to \partial\overline{\Omega}}$ — гомеоморфизм, ограничение $f_i = f|_{\overline{\Omega_i}}$ на замыкание каждой ячейки является C^1-погружением. Пусть для любой точки $x \in \overline{\Omega}$ выпуклая оболочка множества матриц $\left\{ \mathrm{d}f_i|_x : x \in \overline{\Omega_i} \right\}$ содержит лишь матрицы с положительным определителем. Тогда f — гомеоморфизм.* Заметим, что условие выпуклости ячеек означает, что все внутренние грани — клетки немаксимальной размерности — плоские.

В теореме 9 работы [4] рассматривается такое же разбиение $\overline{\Omega}$ на ячейки $\overline{\Omega_i}$, и для отображения $f \in C(\overline{\Omega}, \partial\overline{\Omega}; \overline{\Omega}, \partial\overline{\Omega})$ такого, что $f|_{\partial\overline{\Omega} \to \partial\overline{\Omega}}$ — гомеоморфизм, а для каждой замкнутой ячейки $f_i = f|_{\overline{\Omega_i}}$ — сохраняющее ориентацию C^1-погружение, ограничение которого на границу этой ячейки $f|_{\partial\overline{\Omega_i}}$ — вложение, доказывается, что f — гомеоморфизм.

В отличие от этих условий, в теореме 14 данной работы

- ячейки могут быть *произвольной* формы (не налагается никаких требований выпуклости, плоских граней и т.п.);
- не требуется гладкости отображения f (достаточно непрерывности);
- накладывается условие (“невырожденность”) лишь на поведение f внутри ячеек и граней, а не в их замыканиях, и не на совокупность всех матриц из выпуклой оболочки, как описано выше;
- не требуется инъективности ограничения f на границы ячеек;
- достаточно лишь наличия одной точки с одноэлементным прообразом (не требуется, чтобы f гомеоморфно отображало границу области на границу);
- отображение определено на произвольном топологическом многообразии (а не на замкнутой области в $\mathbb{R}^n$) и действует в произвольное топологическое многообразие (а не в исходную или гомеоморфную исходной область).

Ряд теорем в [3,4] относятся к отображениям замыкания *произвольной* ограниченной связной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в себя. К сожалению, две из них неверны, а доказательства других либо неполны, либо отсутствуют.

Ошибочность теоремы 4 в [3] показывает следующий контрпример: $\Omega = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq \rho \leq 2, \varphi \neq 0\}$ — ограниченная связная односвязная область в $\mathbb{R}^2$ (здесь (ρ, φ) — полярные координаты), гладкое отображение $h : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ задается формулой $(\rho, \varphi) \longmapsto (\rho, 2\varphi)$. Область Ω и отображение h удовлетворяют условиям данной теоремы, однако h не является гомеоморфизмом $\overline{\Omega}$ на $\overline{\Omega}$. Аналогично строится и контрпример к теореме 6 в [3].

В доказательствах теоремы 3 в [3], теорем 3 и 5 в [4] авторы используют необоснованное предположение о пустоте пересечения образа области и образа ее границы.

Например, в теореме 3 в [3] утверждается следующее: *Для ограниченной связной области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *и* $h \in C^1(\overline{\Omega}, \partial\Omega; \overline{\Omega}, \partial\Omega)$ *такого, что* $\det h' > 0$ *на* $\overline{\Omega}$ *и* $h|_{\partial\Omega \to \partial\Omega}$ *— гомеоморфизм,* h *является гомеоморфизмом* (*здесь* $\partial\Omega$ *— граница области* Ω). Доказательство сюръективности h основано на (не формулируемом явно) предположении, что для любой точки $x_1 \in \Omega$ векторное поле $\Phi_1(x) = h(x) - h(x_1)$ не обращается в нуль на $\partial\Omega$. Это предположение выполняется лишь тогда, когда $h(\partial\Omega) \cap h(\Omega) = \varnothing$. Однако оно никак не доказывается и не обсуждается в [3]. То, что это не так для произвольного локального гомеоморфизма $h \colon \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$, инъективно отображающего границу Ω в себя (т.е. при ослаблении условия биективности $h|_{\partial\Omega \to \partial\Omega}$ до инъективности), показывает следующий пример: $\Omega = (0,1) \times (0,1) \backslash \{2^{-2^i} : i \in \mathbb{N}\} \times \{1/2\} \subset \mathbb{R}^2$, $h(x,y) = (x^2, y)$.

Заметим, что отмеченный пробел в доказательствах связан с тем, что граница Ω может иметь “внутренние” точки — точки, лежащие в $\operatorname{int}_{\mathbb{R}^n} \overline{\Omega}$. Если же запретить такую возможность, т.е. ограничиться рассмотрением лишь таких областей Ω, которые совпадают со внутренностью своего замыкания, то теорема 3 в [3] и теоремы 1, 4, 5, 6 в [4] при таком ограничении на область Ω являются очевидными следствиями леммы 2 из [13] (надо подставить в условие этой леммы $X = \overline{\Omega}$, $Z = \varnothing$, $M_n = \mathfrak{M}_n = \mathbb{R}^n$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ushakova O.V.** On nondegeneracy of three-dimensional grids // Proc. of the Steklov Inst. of Math. 2004. Suppl. 1. P. S78–S100.
2. **Ushakova O.V.** Nondegeneracy conditions for different types of grids // Advances in grid generation. / Ed. O.V. Ushakova. New York: Nova Science Publishers, 2007. P. 241–278.
3. **Бобылев Н.А., Иваненко С.А., Исмаилов И.Г.** Несколько замечаний о гомеоморфных отображениях // Мат. заметки. 1996. Т. 60, № 4. С. 593–596.
4. **Бобылев Н.А., Иваненко С.А., Казунин А.В.** О кусочно-гладких гомеоморфных отображениях ограниченных областей и их приложениях к теории сеток // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2003. Т. 43, № 6. С. 808–817.

5. **Прохорова М.Ф.** Некоторые критерии гомеоморфности // Проблемы теоретической и прикладной математики. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С. 65–69.
6. **Дольд А.** Лекции по алгебраической топологии. М.: Мир, 1976.
7. **Рохлин В.А., Фукс Д.Б.** Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977.
8. **Novikov D., Khovanskii A.** On affine hypersurfaces with everywhere nondegenerate Second Quadratic Form // Moscow Math. J. 2006. Vol. 6, no. 1. P. 135–152.
9. **Brown M.** Locally flat imbeddings of topological manifolds // Ann. of Math. 1962. Vol. 75, no. 2. P. 331–341.
10. **Александров П.С., Пасынков Б.А.** Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности. М.: Наука, 1973.
11. **Спеньер Э.** Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.
12. **Манкрс Дж.** Элементарная дифференциальная топология. Приложение // Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы. М.: Мир, 1979.
13. **Meisters G.H., Olech C.** Locally one-to-one mappings and a classical theorem on schlicht functions // Duke Math. J. 1963. Vol. 30, no. 1. P. 63–80.
14. http://sowa.livejournal.com.

Поступила 01.11.2007.